22803

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

X. Band.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Inhalt des zehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

du Bois-Reymond in Tübingen. Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. (Abh. der K. Bayer. Akademie der W. II. Cl. XII. Bd., II. Abth.) 431

——— Notiz über infinitäre Gleichheiten 576

Eckardt †. Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. (Aus einem Programm der Realschule I. Ordnung zu Chemnitz) 227

Gordan in Erlangen. Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. (Zus. m. Nöther) 547

——— Ueber den Fundamentalsatz der Algebra 572

Harnack in Leipzig. Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven 189

Hermite in Paris. Lettre de M. Ch. Hermite à M. P. Gordan 287

Klein in München. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve 199

——— Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Mit 4 lithographirten Tafeln) 365

——— Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen 398

Krey in Kiel. Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar 221

Neumann in Leipzig. Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche 569

Nöther in Erlangen. Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. (Zus. mit Gordan) 547

Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig für die Jahre 1876—1879 417

Schläfli in Bern. Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{a}{J}(\beta_1 x),\ \overset{a}{J}(\beta_2 x),\ \overset{a}{J}(\beta_3 x),\ \cdots\cdots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = 0$ vorstellen 137

Schröder in Darmstadt. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe 289

Schröter in Breslau. Zur Construction eines äquianharmonischen Systems 420

Seite

Schubert in Hamburg. Beiträge zur abzählenden Geometrie. Erste Abhandlung 1
——— Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung . . 318
Sturm in Darmstadt. Das Problem der Collineation 117
Voss in Darmstadt. Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades 143
Zeuthen in Kopenhagen. Note sur les singularités des courbes planes . 210
——— Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques 446
Züge in Hildesheim. Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids . 273

Nachträgliche Verbesserungen zu Band IX.

S. 370 Z. 7 v. o. lies $[BA]$ statt $[AB]$.

S. 516 Z. 13 v. o. ist aus Versehen bei jedem der Werthe von ϱ und σ der Nenner 2 fortgelassen. Fügt man ihn hinzu, so wird $\varrho^2 + \sigma^2 = 1 - 3\cos^2\xi\sin^6\xi$ statt 4. $(1 - 3\cos^2\xi\sin^6\xi)$. (Durch einen Druckfehler fehlte hier auch die 3). Hiernach erkennt man, dass der in Gl. 17 stehende Werth für $\sin 2j$ imaginär ist. Also giebt es kein Azimuth, bei welchem ein $\parallel H_3$ oder S_3 geradlinig polarisirter Strahl austräte. — Auf den Gang der ganzen übrigen Abhandlung hat das Versehen bei der Discussion dieses Specialfalles keinen Einfluss.

S. 524 Z. 12 v. u. lies (IV) statt (VI).

S. 524 Z. 8 v. u. lies Doppelbrechung statt Doppeldrehung.

S. 537 Z. 9. v. u. füge nach „also für alle γ dieselben bleiben“ hinzu: „wenn die Wurzeln der Gleichung als sämmtlich verschieden vorausgesetzt werden“.

S. 538 Z. 4 v. o. ist „gleichen oder“ wegzulassen.

Beiträge zur abzählenden Geometrie.

Von

H. Schubert in Hildesheim.

Der Verfasser veröffentlicht unter diesem Titel drei Abhandlungen, von denen die erste hier vorliegt, die zweite und dritte nächstens folgen werden.

Allgemeine Einleitung.

Als Chasles die unter dem Namen „*Charakteristikentheorie*“*) bekannte Abzählungsmethode schuf (Comptes rendus, Februar 1864), waren es besonders *drei Momente*, welche ihm die Bestimmung seiner überraschenden *Anzahlen* ermöglichten. Kurz ausgesprochen, sind diese drei Momente folgende:

1) *Entdeckung des Correspondenzprincips*,
2) *Entdeckung des Satzes* $\alpha\mu + \beta\nu$,
3) *Möglichkeit der Zurückführung gewisser Kegelschnitt-Anzahlen auf bekannte Anzahlen der beiden Kegelschnitt-Ausartungen.*

Diesen *drei* Momenten entsprechend, lassen sich in den Untersuchungen, welche sich direct oder indirect an die Schöpfung Chasles' anschliessen, *drei* Hauptrichtungen unterscheiden, deren Verlauf hier kurz angedeutet werden soll.

Die erste Untersuchungsrichtung nimmt ihren Anfang in dem der Algebra entlehnten, von Chasles zunächst nur für die drei *einstufigen Grundgebilde* ausgesprochenen Correspondenzprincip. Chasles selbst

*) Einen genaueren Literaturnachweis der in die Charakteristikentheorie gehörigen Abhandlungen giebt Cayley in seiner Abhandlung „On the curves which satisfy given conditions“ (Philos. trans. London 1868, vol. 158), Painvin im Bull. des sciences math., tome 3, p. 155, und Lindemann in seinen „Vorlesungen von Clebsch“, 1. Theil, p. 391. Dem letztgenannten Werke hat der Verfasser mehrere der folgenden Citate entlehnt.

beutet dieses ursprüngliche Princip für die Ableitung von tausenden von Anzahlen und Formeln aus (namentlich in den C. R. des Jahres 1871), benutzt jedoch auch stellenweise den auf Curven vom Geschlechte Null ausgedehnten Correspondenzsatz (zuerst in den C. R. Bd. 62, p. 584, März 1866). Indessen erfährt das Princip zwei wichtige Erweiterungen. Die erste rührt von Cayley und Brill her, und setzt an die Stelle des einstufigen *Grundgebildes* ein einstufiges *allgemeines System* von Punkten, Ebenen oder Strahlen, die zweite rührt von Salmon und Zeuthen her, und setzt an die Stelle des *einstufigen* Grundgebildes ein *vielstufiges* Grundgebilde. Die Literatur und die Geschichte der Cayley-Brill'schen Erweiterung findet man in Clebsch-Lindemann*) p. 441. Diese Erweiterung ist bis jetzt für den Fall erledigt, dass der Träger der Correspondenz eine Plancurve von bekanntem Geschlechte ist, und dass die beweglichen Punktsysteme der Correspondenz durch feste Punkte zu einem vollständigen Schnittpunktsystem ergänzt werden. Von den Fällen der Salmon-Zeuthen'schen Erweiterung hat Salmon nur 1 Fall unvollständig erledigt, Zeuthen *mehrere* Fälle theils vollständig, theils unvollständig erledigt. (Salmon, Geom. of 3 dim. sec. ed. 1865, p. 511 oder Fiedler's Bearbeitung dieses Werks, II. Th., II. Aufl. p. 556), (Zeuthen, Comptes rendus, Juni 1874.) Der Verfasser betrachtet in dem dritten Abschnitt seiner hier vorliegenden ersten Abhandlung die Salmon-Zeuthen'sche Erweiterung von einem neuen Gesichtspunkte aus, und erledigt die aus ihr hervorgehenden Probleme durch Ableitung vieler neuer Formeln vollständig. Eine *dritte* Erweiterung des Correspondenzprincips ergiebt sich dadurch, dass man statt der durch die Correspondenz verbundenen Punkte, Ebenen oder Strahlen *andere höhere Gebilde*, z. B. Kegelschnitte, und als Träger der Correspondenz ein- oder mehrstufige von solchen Gebilden erzeugte Systeme setzt. Diese Erweiterung ist bis jetzt höchstens in sehr speciellen Fällen gelegentlich behandelt (vergl. § 26. und § 30. am Schluss).

Die zweite der drei anfangs erwähnten *Untersuchungsrichtungen* nimmt ihren Anfang in dem von Chasles durch Induction gefundenen Satze $\alpha\mu + \beta\nu$. Chasles vermuthet, dass die Anzahl der Plancurven eines ebenen Systems erster Stufe, welche eine Bedingung Z befriedigen, immer in der Form $\alpha\mu + \beta\nu$ ausgedrückt werden kann, wo μ angiebt, wieviel Plancurven des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen, ν angiebt, wieviel eine gegebene Gerade berühren, α und β aber Zahlen sind, die nur von der Natur der hinzugetretenen Bedingung Z abhängen.

*) So bezeichnen wir der Kürze wegen den ersten Theil des ersten Bandes des verdienstvollen Werkes von Lindemann „Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch".

Chasles betrachtet daher μ und ν als Charakteristiken des Systems. Der Satz wird für den Fall, dass die Bedingung Z die Berührung einer beliebigen festen Curve verlangt, von Zeuthen als richtig erkannt (Math. Annalen Bd. III, p. 153). Zwei andere Beweise finden sich in Clebsch-Lindemann (p. 424) und bei Brill in den Math. Annalen Bd. VIII, p. 534, wo auch die entsprechenden Sätze für Flächen und Raumcurven abgeleitet sind (vergl. auch hier § 28.). Dass derselbe aber *allgemein* gelte, wird durch die Zeuthen'schen Untersuchungen über die einstufigen Systeme von höheren Plancurven sehr *fraglich*. Da erkennt Clebsch (Math. Annalen Bd. VI, p. 1) den *algebraischen Kern* des Satzes, und zeigt damit, dass derselbe wohl für Kegelschnitte, aber wahrscheinlich nicht für höhere Plancurven gelte (vergl. Lindemann-Clebsch p. 424). Zugleich giebt auch Halphen in dem Heft I des Bulletin de la Soc. math. de France einen Beweis des Chasles'schen Satzes für Kegelschnitte in fester Ebene, seines Analogons für Kegelschnitte im Raume und seines Analogons für quadratische Flächen, und liefert die Ausdehnung des Satzes von einfachen Bedingungen bei einstufigen Systemen zu n-fachen Bedingungen bei n-stufigen Systemen. Endlich giebt Lindemann in Clebsch-Lindemann p. 398 bis 406 eine selbstständige Herleitung des Chasles'schen Satzes und seiner Ausdehnungen auf mehrfache Bedingungen bei Kegelschnitten in fester Ebene. Für andere Gebilde, als für den Kegelschnitt, die quadratische Fläche, den Punkt, die Ebene und den Strahl sind *eigentliche* Charakteristiken bisher noch nicht aufgefunden worden. Für die eben erwähnten Gebilde ist das Problem der Charakteristiken gleichbedeutend mit dem Problem der *Productensätze* (§ 26. der hier folgenden ersten Abhandlung des Verfassers). Die Productensätze sind für den Punkt und die Ebene aus der Algebra längst bekannt, für den Strahl erst 1872 (C. R. Bd. 74, p. 41) von Halphen allgemein bewiesen. Endlich erkennt der Verfasser in § 26.*) die sämmtlichen *Productensätze* für die drei Hauptelemente als specielle Fälle gewisser Correspondenzsätze zwischen diesen Hauptelementen.

Die dritte der anfangs erwähnten *drei Untersuchungsrichtungen* nimmt ihren Anfang in Chasles' Ableitung der Elementarzahlen (der Begriff der Elementarzahlen wird in § 6. definirt) der Kegelschnitte aus bekannten Anzahlen der beiden *Kegelschnitt-Ausartungen*. Chasles selbst fügt bald ohne Beweis die Elementarzahlen des Kegelschnitts in beweglicher Ebene (C. R. 1867) und die der quadratischen Fläche hinzu, welche von Zeuthen (Nouv. Ann. (2), VII, p. 385) und dem Verfasser Borch. J. Bd. 71, p. 366 bewiesen werden. Dem Fortschritt zu

*) Ein Citat, welches nur *eine Paragraphennummer* enthält, bezieht sich immer auf die hier folgende Abhandlung.

den Elementarzahlen höherer ebener Curven treten nun die auf denselben befindlichen *singulären* Punkte und Strahlen hindernd entgegen. Diese Schranken durchbrechen Maillard und Zeuthen, Maillard in seiner Doctor-Dissertation „Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre“ (thèse publiée en décembre 1871), Zeuthen in seinen drei Noten „Déterminations des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques“ (Comtes rendus, Bd. 74, p. 521—524, 604—607, 726—730). Zeuthen giebt dann in seiner umfassenden Abhandlung „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver“ (Kjóbenhavn. Vidensk. Selsk. (5) IV, p. 287—393, dazu gehörig ein französisches Résumé) die numerische Bestimmung der Elementarzahlen auch aller Plancurven *vierter* Ordnung, zeigt die Wege, wie man zu den Elementarzahlen der Plancurven *noch höherer* Ordnung gelangen kann, und legt den Charakter vieler Ausartungen klar (Clebsch-Lindemann, p. 407 bis 419).

Ein anderer Fortschritt in dieser dritten Untersuchungsrichtung knüpft sich an die von der kgl. Dänischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1873 durch Zeuthen gestellte *Preisfrage*, und ist in den nachfolgenden drei Abhandlungen des Verfassers und deren Vorläufern enthalten. Die Zeuthen'sche Preisfrage lautet in deutscher Uebertragung:

„Ausdehnung der Charakteristikentheorie auf die Systeme desjenigen geometrischen Gebildes, welches aus den Punkten und den Osculationsebenen einer cubischen Raumcurve besteht, und Bestimmung der Charakteristiken der als elementar zu betrachtenden Systeme.“

Zunächst bestimmt Sturm *einige* Anzahlen der cubischen Raumcurve (Borch. J. Bd. 79 und Bd. 80), nachdem schon Cremona (Borch. J. Bd. 60) die Construction der cubischen Raumcurve aus gegebenen Bestimmungsstücken in einzelnen Fällen gezeigt hatte. Sturm's auf *directer* Abzählung beruhende Methode zur Gewinnung von Anzahlen benutzt jedoch die von Chasles und Zeuthen ausgebildete *Abzählungstheorie* nicht, und verschafft ihm daher nur einen verhältnissmässig kleinen Theil der Elementarzahlen des aus den Punkten, Tangenten und Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve bestehenden Gebildes, welches wir kurz *„cubische Raumcurve“* nennen wollen.

Der Verfasser strebt im Anfang des Jahres 1874 nach der Beantwortung der Preisfrage in möglichster Allgemeinheit und geht von dem damaligen Standpunkte der Abzählungsmethodik aus. Dabei erkennt er, dass zur Erreichung dieses Zieles zunächst namentlich folgende *Vorarbeiten* zu erledigen sind:

1) *Ausbildung einer für die Abzählungsfragen zweckmässigen einheitlichen Terminologie und Symbolik,*

2) *Ausdehnung der Anzahl-Bestimmungen von Plancurven in fester Ebene resp. Kegel mit festem Scheitel auf Plancurven mit beweglicher Ebene resp. Kegel mit beweglichem Scheitel,*

3) *Mit-Berücksichtigung der Bedingungen, welche sich aus den auf die Singularitäten der cubischen Plancurven nullten Geschlechtes bezüglichen Bedingungen zusammensetzen, und welche in den Arbeiten von Maillard und Zeuthen* (siehe die obigen Citate) *noch nicht berücksichtigt waren.*

Nach Bewältigung dieser Vorarbeiten, deren Resultate zum Theil in einer vorläufigen Note „die Charakteristiken der ebenen Curven dritter Ordnung im Raume" (Gött. Nachr. Mai 1874) publicirt sind, gelingt es dem Verfasser bald, von den 5374 *Elementarzahlen der cubischen Raumcurve* 5335 *sachlich zu bestimmen.* Seine Preisschrift wird am 29. Januar 1875 gekrönt, und der von Zeuthen verfasste *Bericht* über dieselbe wird in den Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger (1875 Heft 1.) veröffentlicht. Der Verfasser vervollständigt dann die Resultate seiner Preisschrift im Laufe des Jahres 1875, indem er namentlich noch genauer studirt:

1) die allgemeinen Formeln, welche für Abzählungen überhaupt wichtig sind, also auch die in der Salmon-Zeuthen'schen Erweiterung (siehe oben) liegenden *Correspondenzformeln,*

2) *die Plancurve dritter Ordnung mit Spitze* hinsichtlich aller Bedingungen, welche sich aus den Bedingungen zusammensetzen, die sich auf ihre Spitze, ihre Wendetangente, ihre Rückkehrtangente, ihren Wendepunkt, ihren Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt, ihren Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente beziehen, und dadurch auch hinsichtlich ihrer 13 Ausartungen.

Die wichtigsten Resultate der letztgenannten Untersuchung sind schon in einer vorläufigen Note „Die dreizehn Ausartungen und die Fundamentalzahlen der ebenen Curven dritter Ordnung mit Spitze" (Gött. Nachr. Mai 1875) behandelt.

Durch die eben angegebenen und einige andere Ergänzungen sind schliesslich aus der Preisschrift die drei Abhandlungen hervorgegangen, welche unter dem obigen Titel *„Beiträge zur abzählenden Geometrie"* zusammengefasst sind. Die erste, hier vorliegende, Abhandlung ist betitelt:

„Allgemeingültige Formeln und Vorstellungen der abzählenden Geometrie."

Die zweite Abhandlung wird ungefähr folgenden Titel führen:

„Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechtes."

Die dritte Abhandlung soll heissen:

„Die 11 Ausartungen und die Elementarzahlen der cubischen Raumcurve“.

Als *Vorläufer der zweiten Abhandlung* kann die Note in den Gött. Nachr. Mai 1875, als *Vorläufer der dritten Abhandlung* Zeuthen's Bericht über meine Preisschrift in den Oversigt v. Kopenh. 1875, Heft 1, betrachtet werden. Die systematische Form meiner Darstellung macht vielleicht die Lectüre der anfänglichen Partieen mühsam. Für die gehabte Mühe werden jedoch die folgenden Partieen entschädigen.

Allgemeingültige Formeln und Vorstellungen der abzählenden Geometrie.

(Erste Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie“.)

(Vergleiche die allgemeine Einleitung.)

Der erste Abschnitt dieser Abhandlung bespricht zunächst den Zusammenhang der 4 wichtigsten *Objecte* der abzählenden Geometrie. Diese sind die Gebilde mit ihren Constantenzahlen, die von ihnen erfüllten Bedingungen mit ihren Dimensionen, die durch die Bedingungen definirten Systeme mit ihren Stufen, und endlich die Anzahlen, welche den Bedingungen hinsichtlich eines Systems dadurch zugehören, dass sie zählen, wie oft ein Gebilde des Systems eine vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Der *Zusammenhang*, welcher so zwischen einer Bedingung und der ihr zugehörigen Anzahl hinsichtlich eines Systems besteht, führt auf die Bedingungssymbolik und das Rechnen mit den Bedingungssymbolen (§ 2. und § 3.), wobei der Begriff eines *Moduls einer Bedingung* und einer *Charakteristikengruppe eines Gebildes* eingeführt wird. Bei dem Uebergang auf die specielleren, *„Oerter“* genannten Systeme von Hauptelementen, d. h. von Punkten, Ebenen oder Strahlen, (z. B. Flächen, Torsen, Complexe) wird aus der Definition der 14 *Grundgebilde* (§ 4.) die Definition der 14 *Grundbedingungen* für die drei Hauptelemente, und aus dieser die Definition der 38 Grundbedingungen nullter und höherer Dimension für die 14 Arten von Oertern abgeleitet. (§ 5.) Die den nullfachen Bedingungen der Oerter angehörigen Anzahlen sind deren *Gradzahlen* (Ordnung, Classe, Rang). Die Gebilde werden endlich als die *Träger* der durch sie bestimmten Oerter (Plücker'sche Oerter) aufgefasst und eine einem *Gebilde* zugehörige Grundbe-

dingung wird als eine Bedingung definirt, welche für einen der dem Gebilde anhaftenden Oerter Grundbedingung ist (§ 6.).

Der zweite Abschnitt entwickelt die allgemeinen Beziehungen zwischen den Grundbedingungen, ohne die Ausartungsanzahlen einzuführen, und ohne ein anderes Princip, als das *der speciellen Lage* (§ 7.) zu benutzen. Die einfachsten dieser Beziehungen sind diejenigen, welche zwischen den Grundbedingungen eines einzigen Hauptelementes bestehen (§ 8.). Dann folgen in § 9. die Beziehungen, welche zwischen den Grundbedingungen zweier in einander liegender Hauptelemente bestehen, und in § 10. die Beziehungen, welche zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelementes und denen eines in demselben liegenden Ortes bestehen. Die entwickelten allgemeinen Schemata und Formeln werden in § 11., § 12. und § 13. für die Ableitung speciellerer Formeln benutzt, welche grösstentheils in der zweiten Abhandlung unmittelbare Anwendung finden werden, z. B. für die drei Wendetangenten der cubischen Plancurve mit Doppelpunkt.

Der dritte Abschnitt behandelt die durch *zwei* Hauptelemente erzeugten, *„Paare“* genannten Gebilde (§ 14.), und leitet durch nur je einmalige Anwendung des gewöhnlichen Correspondenzprincips und Benutzung der allgemeinen Schemata des § 9. von § 16. bis § 23. viele Formeln zwischen den Grundbedingungen jedes der 6 Paare und denen seiner *Coincidenz* ab. Damit werden zugleich auch alle aus der Salmon-Zeuthen'schen Erweiterung (vergl. oben) des Correspondenzprincips hervorgehenden Fragen vollständig beantwortet. Es liegt in dem Charakter dieser Erweiterung, dass dieselbe die Bestimmung der *Multiplicitäten* den einzelnen Fällen der Anwendungen überlässt. In den §§ 24. bis 30. werden die entwickelten Formeln für die Ableitung *theils bekannter theils bisher unbekannter Abzählungsresultate* angewendet, unter denen vielleicht interessiren werden:

1) *die fundamentalen Anzahlen der linearen Congruenz* (§ 24.);
2) *die Bestätigung der von Sturm bei der Behandlung des Problems der räumlichen Projectivität gefundenen Anzahlen* (§ 25.);
3) *die Lösung aller Zahlen-Probleme, welche sich auf die Tangenten beziehen, die eine allgemeine Fläche an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berühren**) (§ 27.);
4) *die Lösung des Zahlen-Problems der Berührung zweier einstufiger von Plancurven, Flächen oder Raumcurven erzeugter Systeme* (§ 28.);

---

*) Die Lösung dieser Probleme vermittelst des gewöhnlichen Correspondenzprincips wird der Verfasser auch durch die Göttinger Nachr. (Februar 1876) veröffentlichen.

5) *die Ablesung der Productensätze aus gewissen Correspondenzformeln, und damit auch ein einfacher Beweis der von Halphen bestimmten Zahl der gemeinsamen Strahlen zweier Strahlenörter zweiter Stufe* (§ 26.).

I. Abschnitt.

Terminologie und Symbolik.

§ 1.

Systeme und Bedingungen.

Ist ein algebraisches Gebilde derartig definirt, dass der gewöhnliche Raum ∞^c Individuen besitzt, welche diese Definition erfüllen, d. h. dass seine algebraische Darstellung von c wesentlichen Constanten abhängen würde, so heisst c die *Constantenzahl* des so definirten Gebildes.

Beispiele von Constantenzahlen.

Die Constantenzahl

1) des Gebildes, welches aus einem Strahle, einem auf ihm liegenden Punkte und einer durch ihn gehenden Ebene besteht, ist gleich $4 + 1 + 1$;
2) des räumlichen n-Ecks ist gleich $3n$, des — in beweglicher Ebene liegenden — ebenen n-Ecks ist gleich $2n + 3$;
3) der Plancurve n^{ter} Ordnung mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen ist gleich
$$\tfrac{1}{2}n(n+3) - \delta - 2\varkappa + 3.$$

In die Definition eines Gebildes nehmen wir immer alle möglichen invarianten Festsetzungen auf, welche die freie Lage im Raume nicht beschränken können, z. B. bei einer Plancurve alle Plücker'schen Zahlen. Diejenigen Festsetzungen jedoch, welche über die räumliche Lage eines definirten Gebildes etwas aussagen, bezeichnen wir als *ihm auferlegte Bedingungen*, z. B. bei einer Plancurve, dass ihre Ebene Schmiegungsebene einer gegebenen Raumcurve sein soll, oder dass zwei ihrer Doppelpunkte eine gegebene Strecke harmonisch theilen sollen.

Eine Bedingung ist *zusammengesetzt*, wenn sie nichts anderes aussagt, als dass mehrere von einander unabhängige Bedingungen zugleich erfüllt werden sollen, sie ist *einzeln*, wenn sie sich nicht so in andere zerlegen lässt. Die Gesammtheit mehrerer untrennbarer Bedingungen bildet also eine Einzelbedingung.

Ist eine einem Gebilde mit der Constantenzahl c auferlegte einzelne oder zusammengesetzte Bedingung so beschaffen, dass sie von $\infty^{c-\delta}$ (∞^0 = endliche Zahl) Individuen erfüllt werden kann, d. h. dass sie

b von einander unabhängige Bedingungsgleichungen unter den c Constanten verursachen würde, so bezeichnen wir:

1) diese Bedingung als *b-fach* oder *von der b^{ten} Dimension*,

2) die *durch sie definirte Gesammtheit* von ∞^{c-b} *Elementen* als ein *System $(c-b)^{ter}$ Stufe*.

Ist also die Stufe eines Systems, dessen Element die Constantenzahl c hat, gleich a, die Dimension der das System definirenden Bedingung gleich b, so ist immer, unsern Definitionen gemäss,

$$a + b = c,$$

wo a und b Null oder ganze positive Zahlen sein dürfen.

Diese Definitionen geben einer fundamentalen Wahrheit der Algebra folgende Form:

Die Dimension einer zusammengesetzten Bedingung ist gleich der Summe der Dimensionen der einzelnen Bedingungen, aus denen sie sich zusammensetzt.

Daraus folgt:

Alle Gebilde eines Systems a^{ter} Stufe, welche eine neu hinzutretende b-fache Bedingung erfüllen, bilden ein System $(a-b)^{ter}$ Stufe.

Für $a = b$ ergiebt sich der Zusatz:

Es giebt eine, nicht nothwendig von Null verschiedene „endliche Anzahl" von Gebilden, welche, einem Systeme a^{ter} Stufe angehörig, eine hinzutretende a-fache Bedingung erfüllen.

Wir entlehnen der Algebra die Bemerkung:

Diese Anzahl bleibt, wenn sie nicht unendlich gross wird, immer dieselbe, gleichviel welche räumliche oder gegenseitige Lage die diese a-fache Bedingung verursachenden Gebilde einnehmen mögen.

Das aus dieser Bemerkung folgende Princip bezeichnen wir als das *Princip der gleichgültigen oder der speciellen Lage*, oder als das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* unter Hinweis auf § 7.

Die so hinsichtlich eines Systems a^{ter} Stufe den a-fachen Bedingungen zugehörigen endlichen Zahlen *charakterisiren* das System für die Fragen der abzählenden Geometrie ebenso gut, wie die dem Systeme selbst innewohnenden Eigenschaften, z. B. seine Singularitäten. (*Charakteristikentheorie* im eigentlichen Sinne des Wortes.)

§ 2.

Die Bedingungssymbolik.

Die obigen Bemerkungen legen eine für die Untersuchungen des Verfassers äusserst wichtige *symbolische Kurzschrift* nahe, welche auf folgenden Festsetzungen beruht:

1) Hinsichtlich eines definirten Gebildes erhält jede definirte Bedingung ein *Symbol*; das Symbol einer einzelnen Bedingung ist

ein *einziger Buchstabe*; das Symbol einer zusammengesetzten ist *das Product der Symbole, welche den zusammensetzenden Bedingungen zukommen*; diese heissen demgemäss auch *Factoren der zusammengesetzten Bedingung.*

2) *Für das symbolische Product von n identischen Bedingungen wird ihre n^{te} Potenz gesetzt.*

3) Das Symbol einer a-fachen Bedingung bedeutet nicht bloss:

a) *diese Bedingung selbst,*

sondern auch hinsichtlich eines jedesmal aus dem Zusammenhang ersichtlichen Systems a^{ter} Stufe,

b) *die endliche Anzahl der diesem System angehörigen und zugleich die a-fache Bedingung erfüllenden Gebilde.*

Diese Zweideutigkeit der Bedingungssymbole, welche zu Missverständnissen keinen Anlass geben wird, rechtfertigt eine kurze Ausdrucksweise, bei welcher immer die Bedingung selbst anstatt der Anzahl der Individuen gesetzt wird, welche sie und zugleich die das System definirende Bedingung erfüllen.

„*Ganze lineare Function* a-facher einzelner oder zusammengesetzter Bedingungen“ ist also ein kurzer Ausdruck für die Zahlenfunction, welche entsteht, wenn man für jede a-fache Bedingung die ihr rücksichtlich des gemeinten Systems a^{ter} Stufe zugehörige Anzahl einsetzt.

Andere als ganze lineare Functionen von a-fachen Bedingungssymbolen können in unserm *Bedingungscalcül* nicht auftreten. Die Gleichsetzung von zwei solchen Functionen ergiebt eine *Formel a^{ter} Dimension.* Jedes Glied einer solchen Formel ist im Allgemeinen ein *Product* von Bedingungen mit der Dimensionssumme a, und dieses bedeutet, den obigen Definitionen gemäss, nicht etwa ein numerisches Product von Anzahlen, sondern die Anzahl, welche der aus den Factoren dieses Productes zusammengesetzten a-fachen Bedingung angehört. Eine ganze lineare Function von a-fachen Bedingungen betrachten wir zugleich auch *als ganze und im Allgemeinen nicht mehr lineare Function jedes in den a-fachen Bedingungen enthaltenen symbolischen Factors.*

Modul einer Bedingung in einem Systeme heisse jede Function, welche sie *nur* von andern Bedingungen — nicht aber auch von Anzahlen sogenannter ausgearteter Gebilde — abhängig darstellt. Bedingungen, durch welche allein jede Bedingung beliebiger Dimension in jedem von einem Gebilde erzeugten Systeme dargestellt werden kann, bilden eine *Gruppe von eigentlichen Charakteristiken* dieses Gebildes.

An diese durch unsere Terminologie erleichterte Definition der Charakteristiken eines Gebildes schliessen wir die Bemerkung, dass das Problem der Aufsuchung von Charakteristikengruppen und die Fragen

nach der Minimalzahl der eine solche Gruppe bildenden Bedingungen nur für folgende Gebilde als erledigt zu betrachten ist:

1) *Punkt*,
2) *Ebene*,
3) *Strahl*,
4) *Kegelschnitt*,
5) *quadratische Fläche.*

Die Bemerkung, dass der Punkt und die Ebene je eine Charakteristik, der Strahl Gruppen von je zwei Charakteristiken besitzt, ist in ihrer Form vielleicht neu, in ihrem Inhalt jedoch bekannt (§ 30. im III. Abschnitt).

Dass sowohl der Kegelschnitt wie die quadratische Fläche drei einfache Bedingungen besitzt, durch deren Producte allein jede andere Bedingung ausgedrückt werden kann, ist von Chasles vermuthet und von Clebsch (Math. Annalen Bd. VI, p. 1) und Halphen bewiesen; von letzterem in einer Abhandlung (Bull. de la Soc. math. Bd. I, Heft 5), welche den Verfasser zu einer consequenten Durchführung seiner Bedingungssymbolik ermuthigte (vergl. auch Clebsch-Lindemann, p. 398 bis 406).

§ 3.

Das symbolische Rechnen.

Aus unserer Bedingungssymbolik fliessen folgende Regeln für das Rechnen mit den Symbolen.

I. Wenn Formeln zwischen Bedingungssymbolen für ein gewisses System zugleich gelten, so ist für dieses System auch jede Formel gültig, deren rechte resp. linke Seite sich aus den rechten resp. linken Seiten jener Formeln durch dieselbe *ganze lineare Function* ergiebt.

II. Wenn eine Formel a^{ter} Dimension für ein gewisses System a^{ter} Stufe Σ_a gilt, welches die p-fache Bedingung Z_p enthält, so gilt die Formel $(a+p)^{\text{ter}}$ Dimension, welche aus der ursprünglichen dadurch entsteht, dass jedem ihrer a-fachen Symbole Z_p *als symbolischer Factor zugesetzt* wird, für dasjenige System $(a+p)^{\text{ter}}$ Stufe Σ_{a+p}, welches durch dieselben Factoren, wie Σ_a, doch mit Weglassung von Z_p, definirt wird. Ist ferner $Y_a \cdot Z_p$ eins der so entstandenen symbolischen Producte und gilt ein gewisser Modul von Z_p für ein System p^{ter} Stufe, das die a-fache Bedingung Y_a mitenthält, so darf nun auch wieder statt $Y_a \cdot Z_p$ der durch symbolische Multiplication dieses gewissen Moduls mit Y_a entstehende Modul eingesetzt werden, wenn er dadurch für dasselbe System Gültigkeit erlangt, das eben mit Σ_{a+p} bezeichnet ist.

Hierin ist enthalten die Regel:

III. *Der Modul des Productes zweier Bedingungen* mit der Dimensionssumme a *ist gleich* der aus *dem Producte ihrer Moduln durch*

Ausführung der angezeigten Multiplication entstehenden ganzen Function a-facher Bedingungen. Der so entstehende Modul ist *allgemeingültig*, d. h. gilt für jedes System a^{ter} Stufe, sobald die ursprünglichen Moduln allgemein galten. Wenn aber der Modul nur der einen Bedingung Z allgemein gilt, so erhält man ein System, für das der resultirende Modul gilt, nur aus denjenigen unter den den Modul der andern Bedingung Y beherrschenden Systemen, welche Z mitenthalten, und zwar dadurch, dass man Z aus der ein solches System definirenden zusammengesetzten Bedingung fortlässt und die übrigbleibende Bedingung als definirende des gesuchten Systems nimmt.

Die durch II. und III. gestattete Veränderung einer Formel oder eines Moduls heisse *„symbolische Multiplication"*, abgekürzt „sbl. Mult." (Gött. Nachr. Mai 1874, p. 276, und Mai 1875, p. 368). Die symbolische Multiplication ist also ein *ganz selbstverständliches Verfahren*, das äusserlich in einem *Ueberschreiben* einer Bedingung aus einem Systeme in eine Formel besteht.

Zur Klarlegung mögen folgende 5 Beispiele dienen:

1) Bezeichnen für eine Plancurve:

a die Ordnungszahl,

P die Bedingung, durch einen Punkt zu gehen,

ν die Bedingung, einen Strahl zu schneiden,

μ^n die Bedingung, die Ebene durch n beliebige Punkte zu schicken,

so hat P den allgemeingültigen Modul:

$$P = \mu\nu - a \cdot \mu^2 \quad (\S\ 10.).$$

Durch sbl. Mult. dieses Moduls mit sich selbst folgt also der allgemeingültige Modul:

$$P^2 = \mu^2\nu^2 - 2a \cdot \mu^3\nu,$$

da μ^4 gleich Null zu setzen ist, weil durch vier beliebige Punkte keine Ebene gelegt werden kann.

2) Bezeichnen für *eine Plancurve dritter Ordnung mit Spitze* P, μ, ν dieselben Bedingungen wie in 1), und ausserdem:

ϱ die Bedingung, eine Ebene zu berühren,

c die Bedingung, die Spitze auf einer Ebene zu besitzen,

so hat P den allgemeingültigen Modul:

$$P = \mu\nu - 3\mu^2 \quad \text{(Beispiel 1))}$$

und für jedes System zweiter Stufe, dessen definirende Bedingung keine andern Factoren als P, μ, ν, ϱ und die Bedingung F, eine Fläche zu berühren, besitzt, gilt für c folgender Modul:

$$c = \tfrac{1}{3}\nu - \tfrac{1}{3}\varrho - 2\mu \quad \text{(vgl. Zeuthen, C. R. Bd. 74, p. 521).}$$

Durch sbl. Mult. dieser beiden Moduln ergiebt sich nach Regel III. ein Modul für die zusammengesetzte Bedingung Pc, nämlich:

$$Pc = (\mu\nu - 3\mu^2)\,(\tfrac{4}{3}\nu - \tfrac{1}{3}\varrho - 2\mu)$$
$$= \tfrac{4}{3}\mu\nu^2 - \tfrac{1}{3}\mu\nu\varrho - 6\mu^2\nu + \mu^2\varrho + 6\mu^3,$$

welcher nun für diejenigen Systeme gilt, welche aus den Systemen, für die der Modul von c galt, dadurch hervorgehen, dass man P aus den definirenden Bedingungen fortlässt, d. h. wieder für jedes System dritter Stufe, dessen definirende Bedingung keine andern Factoren als P, μ, ν, ϱ, F enthält.

3) Bezeichnen für eine *Raumcurve mit der Constantenzahl c:*

ν die Bedingung, einen Strahl zu schneiden,

ϱ die Bedingung, eine Ebene zu berühren,

Z_a die Bedingung, eine Fläche F_a von der Ordnung n_a und dem Range r_a zu berühren,

so hat bekanntlich (Brill, Math. Annalen Bd. VIII, p. 534) Z_a den allgemeingültigen Modul:

$$Z_a = r_a \cdot \nu + n_a \cdot \varrho.$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der Raumcurven, welche c Flächen $F_1, F_2, \cdots F_c$ mit den Ordnungszahlen $n_1, n_2, \cdots n_c$ und den Rangzahlen $r_1, r_2, \cdots r_c$ berühren, sich aus dem Producte:

$$(r_1 \cdot \nu + n_1 \cdot \varrho) \cdot (r_2 \cdot \nu + n_2 \cdot \varrho) \cdot \cdots \cdot (r_c \cdot \nu + n_c \cdot \varrho)$$

ergiebt, wenn man die Klammern löst und für die c-fachen Bedingungen ν^c, $\nu^{c-1}\varrho$, $\nu^{c-2}\varrho^2$, $\cdots$ ϱ^c die zugehörigen als berechnet vorausgesetzten Anzahlen einsetzt. Diese Zahlen haben z. B. für die cubische Raumcurve, deren Constantenzahl 12 ist, folgende vom Verfasser in seiner Preisschrift abgeleitete Werthe:

$\nu^{12} = 80160$	$\nu^8\varrho^4 = 375296$	$\nu^4\varrho^8 = 264320$
$\nu^{11}\varrho = 134400$	$\nu^7\varrho^5 = 415360$	$\nu^3\varrho^9 = 188256$
$\nu^{10}\varrho^2 = 209760$	$\nu^6\varrho^6 = 401920$	$\nu^2\varrho^{10} = 128160$
$\nu^9\varrho^3 = 297280$	$\nu^5\varrho^7 = 343360$	$\nu^1\varrho^{11} = 85440$

$$\varrho^{12} = 56960.$$

4) Bezeichnen für eine cubische *Plancurve mit Doppelpunkt*

μ, ν dieselben Bedingungen wie in 1),

f die Bedingung, eine der drei Wendetangenten einen Strahl schneiden zu lassen,

f_e die Bedingung, eine solche in einer Ebene zu besitzen, m. a. W., eine Ebene zu osculiren,

so hat f^7 den algemeingültigen Modul (§ 11.):

$$f^7 = 70\,(3\mu f_e^3 + 13\mu^2 f f_e^2 + 3\mu^3 f^2 f_e - 45\mu^3 f_e^2).$$

Da nun z. B. in dem System siebenter Stufe, welches durch die Bedingung ν^4 definirt wird, nach des Verfassers Tabellen

$$\mu f_c^3 = 486; \quad \mu^2 f f_c^2 = 324; \quad \mu^3 f^2 f_c = 81; \quad \mu^3 f_c^2 = 27$$

ist, so ergiebt sich:

„*Die Zahl der cubischen Plancurven mit Doppelpunkt, welche* 4 *gegebene Strahlen schneiden und durch* 7 *gegebene Strahlen ihre Wendetangenten schicken, beträgt:* 328860.“

5) Bezeichnen für eine *lineare Congruenz*, d. h. eine solche, welche sowohl in jedem Strahlenbündel, wie in jedem Strahlenfelde (Ebene) nur 1 Strahl besitzt:

B die Bedingung, einen Strahl zu enthalten,

β die Bedingung, einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels zu enthalten,

g die Bedingung, die eine der beiden Leitaxen durch einen Strahl zu schicken,

h die entsprechende Bedingung für die andere Leitaxe,

so ist immer:

$$B = \beta g - g^2,$$

also

$$B^2 = \beta^2 g^2 - 2\beta g^3 + g^4.$$

Da nun in dem Systeme vierter Stufe, welches durch die Bedingung $\beta^2 g h$ definirt wird, nach § 24.:

$$\beta^2 g^2 = 14, \quad \beta g^3 = 4,$$

g^4 natürlich gleich Null ist, so ergiebt sich für die lineare Congruenz:

$$B^2 \beta^2 g h = 14 - 2 \cdot 4 + 0 = 6.$$

Die Moduln, welche in der *vorliegenden* Abhandlung auftreten, sind *alle allgemeingültig.*

Unter den Moduln sind durch die Leichtigkeit ihrer Herstellung diejenigen ausgezeichnet, welche durch *Spaltung von Bedingungen* entstehen. Wird nämlich eine einem Gebilde auferlegte Bedingung Z sowohl (und zwar a-mal) dadurch erfüllt, dass es die Bedingung z_a befriedigt, wie auch (etwa b-mal) dadurch, dass es die Bedingung z_b befriedigt etc., so ist die Bedingung Z in die Bedingung z_a, z_b, z_c, $\cdots$ *gespalten*, und es ergiebt sich dann für Z der allgemeingültige Modul:

$$Z = a \cdot z_a + b \cdot z_b + c \cdot z_c + \cdots.$$

Beispiele von Spaltungen:

1) Bedeuten für ein Dreieck mit den Seiten α, β, γ:

f die Bedingung, dass eine beliebige Seite desselben einen Strahl schneide,

a, b, c die Bedingungen, dass bezüglich die Seiten α, β, γ einen Strahl schneiden,

so spaltet sich f in a, b und c, so dass immer

$$f = a + b + c$$

gesetzt werden kann. Daher z. B.

$$f^7 = (a+b+c)^7.$$

Daraus ergiebt sich, da a^n, b^n, c^n Null ist, sobald n grösser als vier ist:

$$\begin{aligned} f^7 = {} & 35\,(a^4b^3+a^4c^3+b^4a^3+b^4c^3+c^4a^3+c^4b^3) \\ & + 105\,(a^4b^2c+a^4bc^2+b^4a^2c+b^4ac^2+c^4a^2b+c^4ab^2) \\ & + 140\,(a^3b^3c+a^3c^3b+b^3c^3a) \\ & + 210\,(a^3b^2c^2+b^3a^2c^2+c^3a^2b^2) \\ = {} & 35z^{4,3,0} + 105z^{4,2,1} + 70z^{3,3,1} + 105z^{3,2,2}, \end{aligned}$$

wo $z^{u,v,w}$ die Bedingung bezeichnet, dass von den drei Seiten des Dreiecks eine beliebige u gegebene Strahlen, eine zweite v gegebene Strahlen, und die dritte w gegebene Strahlen schneidet.

2) Bezeichnen für eine Raumcurve

ν und ϱ wieder die Bedingungen, einen Strahl zu schneiden resp. eine Ebene zu berühren,

f die Bedingung, eine *solche* Fläche n^{ter} Ordnung und r^{ten} Ranges zu berühren, deren Punkte die n-fach zu rechnenden Punkte einer Ebene und deren Tangenten die r-fach zu rechnenden Strahlen sind, welche eine in dieser Ebene liegende Axe schneiden,

so wird f n-mal durch jede Raumcurve erfüllt, welche die Ebene der Fläche berührt, und auch r-mal durch jede Raumcurve, welche die Axe der Fläche schneidet. Daher ergiebt sich:

$$f = r \cdot \nu + n \cdot \varrho$$

(specieller Fall der Brill'schen Formel in Beispiel 3) oben).

§ 4.

Die Grundgebilde.

Jede Definition eines Gebildes fasst dasselbe im Allgemeinen auf als eine in gewisser Weise *verkettete Gruppe von Systemen anderer Gebilde*, welche wieder als aus Systemen noch anderer Gebilde bestehend gedacht werden, und so fort; und zwar wird dieser Process der Zerlegung, nach der modernen Anschauungsweise der projectivischen Geometrie, immer derartig angestellt, dass man schliesslich *auf drei Gebilde* stösst, welche als nicht weiter zerlegbar betrachtet werden und dadurch *völlig gleichen Anspruch auf Ursprünglichkeit* erhalten. Desshalb hat die abzählende Geometrie diese drei *Hauptelemente* des Raums, *Punkt*, *Ebene* und *Strahl*, und die von ihnen erzeugten Systeme, welche *Oerter* heissen sollen, *vor* allen übrigen Gebilden zu behandeln. Dazu zwingt auch der Umstand, dass diejenigen einem Gebilde auferlegten Bedingungen, welche nichts weiter enthalten als eine Bedingung für einen der *dem Gebilde*

angehörigen Oerter, unter allen dem Gebilde auferlegbaren Bedingungen eine fundamentale Rolle spielen.

Da die Constantenzahl des Punktes und der Ebene gleich drei, die des Strahls aber gleich vier ist, so giebt es:

1) *Punktörter nullter bis dritter Stufe*,
2) *Ebenenörter nullter bis dritter Stufe*,
3) *Strahlenörter nullter bis vierter Stufe.*

Die Oerter werden durch die endliche Anzahl ihrer gemeinsamen Elemente mit gewissen ausgezeichneten Oertern, den sogenannten *Grundgebilden*, genau in derselben Weise *charakterisirt*, wie nach Chasles, Cremona, Clebsch und Halphen die Systeme von Kegelschnitten durch die Zahl ihrer gemeinsamen Elemente mit gewissen ausgezeichneten Kegelschnittsystemen, welche von Chasles den Namen *„elementare“* erhalten haben. Demgemäss könnten die Grundgebilde auch *„elementare Oerter“* genannt werden. Der Mangel einer für unsere Zwecke brauchbaren Terminologie der $4 + 4 + 6$ Grundgebilde und der von ihnen verursachten Bedingungen zwingt uns, die von uns gewählten Namen für dieselben hier tabellarisch folgen zu lassen, und zwar geordnet nach den Stufen und nach den Hauptelementen.

Grundgebilde

	des Punktes	der Ebene	des Strahls
0ter *Stufe:*	Punkt	Ebene	Strahl
1ter *Stufe:*	Punktaxe	Ebenenaxe	Strahlbüschel
2ter *Stufe:*	Punktfeld	Ebenenbündel	Strahlenfeld Strahlenbündel
3ter *Stufe:*	Punktraum	Ebenenraum	Strahlenaxe
4ter *Stufe:*			Strahlenraum.

Die Grundgebilde nullter Stufe sind die Hauptelemente selbst; jedes Grundgebilde von höherer als der nullten Stufe giebt im ersten Theile seines Namens sein *Element*, im zweiten Theile seinen *Träger* an, und zwar letzteren mit dem Worte:

Bündel, wenn der Träger ein *Punkt* ist,
Feld, wenn der Träger eine *Ebene* ist,
Axe, wenn der Träger ein *Strahl* ist,

ferner mit dem Worte:

Raum, wenn *nichts anderes* als der Raum Träger ist,
Büschel, wenn der Träger aus zwei Hauptelementen, nämlich einer Ebene und einem Punkte besteht, von denen das eine Träger des andern ist. Büschel bezeichnet also Bündel und Feld zugleich.

Daher können, wenn keine Unterscheidung nöthig ist, die Grund-

gebilde auch nur nach ihrem Träger genannt werden, und zwar würden unter

Bündel	2 Grundgebilde,	*Büschel*	1 Grundgebilde,
Feld	2 Grundgebilde,	*Punkt*	3 Grundgebilde,
Axe	3 Grundgebilde,	*Ebene*	3 Grundgebilde,
Raum	3 Grundgebilde,	*Strahl*	4 Grundgebilde

verstanden werden können.

Zu bemerken ist noch, dass *der Strahl zwei Grundgebilde zweiter Stufe* besitzt, *sonst aber jedes Hauptelement in jeder Stufe immer nur ein Grundgebilde* besitzt.

§ 5.

Die Grundbedingungen.

Jedem der $4 + 4 + 6$ Grundgebilde gehört eine *Grundbedingung* oder *fundamentale Bedingung* zu, nämlich diejenige, welche aussagt, dass ein Punkt oder eine Ebene oder ein Strahl dem Grundgebilde als Element angehören soll. Für die Namen der so entstehenden Grundbedingungen setzen wir fest, dass dieselben in ihrem ersten Theile den Namen des Trägers des zugehörigen Grundgebildes angeben sollen. Erfüllt eins der ∞^a Elemente eines Ortes a^{ter} Stufe eine *Grundbedingung*, so schreiben wir dieselbe *dem Orte selbst* zu. Für die Dimensionen der den Oertern zugeschriebenen Grundbedingungen ergiebt sich aus den Sätzen des § 2. Folgendes:

1) Die Dimension d einer einem Orte *nullter* Stufe auferlegten Grundbedingung ist

$$d = c - b,$$

wenn b die Stufe des zugehörigen Grundgebildes und c die Constantenzahl des Elementes ist, welches Ort und Grundgebilde erzeugt;

ferner:

2) Eine Grundbedingung ist für einen Ort a^{ter} Stufe $(d-a)$-fach, wenn sie für einen Ort nullter Stufe d-fach ist;

also:

3) Verursacht ein Grundgebilde b^{ter} Stufe einem Orte a^{ter} Stufe, dessen Element die Constantenzahl c hat, eine d-fache Bedingung, so muss sein:

$$a + b + d = c.$$

Was eben für Oerter, d. h. für Systeme von Hauptelementen, gesagt ist, lässt sich natürlich auf Systeme von Gebilden beliebiger Definition übertragen.

Ist in 3) $a + b$ gleich oder grösser als c, so hat nach § 2. der Ort und das Grundgebilde ein System $(a+b-c)^{\text{ter}}$ Stufe von Haupt-

elementen gemein. Wenn also ein Ort und ein Grundgebilde einen Ort e^{ter} Stufe gemein haben, so wäre die Dimension d der zugehörigen Grundbedingung für diesen Ort als negativ, nämlich als gleich $-e$ zu bezeichnen. Ist im speciellen Falle $a + b = c$, so ist die Grundbedingung nullfach, und der Ort hat mit dem Grundgebilde einen Ort nullter Stufe, d. h. eine von der Lage des Grundgebildes unabhängige (Princip der gleichgültigen Lage § 1.), *endliche Anzahl* von Hauptelementen gemein. Diese einen Ort charakterisirende Anzahl heisst sein *Grad*. Der Grad eines Orts a^{ter} Stufe, dessen Element die Constantenzahl c hat, giebt also an, wieviel Elemente der Ort mit jedem von demselben Element erzeugten Grundgebilde $(c-a)^{ter}$ Stufe gemein hat. Aus der letzten Bemerkung des § 4. folgt:

Jeder Ort jeder Stufe hat nur eine einzige Gradzahl, ausgenommen der Strahlenort zweiter Stufe (die Congruenz), *welche zwei Gradzahlen hat, von denen die eine, der Bündelgrad, angiebt, wieviel Elemente der Ort mit jedem Strahlenbündel gemein hat, und die andere, der Feldgrad, angiebt, wieviel Elemente er mit jedem Strahlenfelde gemein hat.*

Die folgende Tabelle enthält die Namen und Symbole der 14 Grundbedingungen. Der Index i des jeder Grundbedingung vorgesetzten Symbols giebt an, dass ihre Dimension für einen Ort a^{ter} Stufe $i-a$ ist. Die nachgesetzten 24 Symbole sind die in den folgenden Untersuchungen für die Grundbedingungen erster und höherer Dimension *vorzugsweise* gebrauchten, und zwar bezeichnet immer das n^{te} nachgesetzte Symbol die einem Orte $(n-1)^{ter}$ Stufe zugeschriebene Grundbedingung.

A. Für Punktörter:

p_0 Raumbed.
p_1 Feldbed. c,
p_2 Axenbed. c_g, ν,
p_3 Punktbed. C, P, Π.

B. Für Ebenenörter:

e_0 Raumbed.
e_1 Bündelbed. μ,
e_2 Axenbed. μ_g, ν',
e_3 Ebenenbed. M, P', Π'.

C. Für Strahlenörter.

s_0 Raumbed.
s_1 Axenbed. g,
$\left\{\begin{matrix} s_2 \text{ Feldbed.} & g_e, & \varrho \\ s_{II} \text{ Bündelbed.} & g_p, & \varrho' \end{matrix}\right\}$,
s_3 Büschelbed. g_s, t, β,
s_4 Strahlbed. G, T, B, S.

Bezeichnen wir im Folgenden ein Hauptelement mit einem *Buchstaben*, so soll damit zugleich ausgesprochen sein, dass die diesem Hauptelement zukommende einfache Grundbedingung mit demselben Buchstaben, und die Grundbedingungen höherer Dimensionen mit denjenigen Symbolen bezeichnet werden sollen, welche aus diesem Buchstaben ebenso hervorgehen, wie die in obiger Tabelle nachgesetzten ersten Symbole aus c, μ und g hervorgehen. Z. B. die Büschelbedingung des Strahls h heisst h_1, die Strahlbedingung H.

§ 6.

Die Gebilde als Träger von Oertern.

Ein geometrisches *Gebilde* repräsentirt im Allgemeinen eine Gesammtheit mehrerer in gewisser Weise verketteter Punktörter, Ebenenörter, Strahlenörter verschiedener Stufen, von denen einige das ganze Gebilde zu erzeugen im Stande sind. In jedem einzelnen Falle folgt aus der genauen Definition eines Gebildes die Definition jedes dieser Oerter und die Art und Weise ihrer Verkettung. Gewisse dieser Oerter bezeichnen wir als die *Plücker'schen Oerter* des Gebildes und überlassen es jeder einzelnen Definition eines Gebildes, festzustellen, welche der ihm anhaftenden Oerter als seine *Plücker'schen* betrachtet werden sollen. Den Namen „Plücker'sche" haben wir desshalb gewählt, weil die Gradzahlen vieler dieser Oerter durch Relationen verbunden sind, welche für eine Plancurve von Plücker zuerst abgeleitet sind. Wir bemerken ausdrücklich, dass die Definition der Plücker'schen Oerter eines Gebildes zunächst nur mehr oder weniger conventionell ist. Diese Definition geben wir hier für die von uns vorzugsweise behandelten Gebilde.

1) Eine *Plancurve* habe folgende Plücker'sche Oerter:

a) den Ebenenort nullter Stufe ersten Grades ihrer Ebene,
b) den Punktort erster Stufe ihrer Punkte,
c) den Strahlenort erster Stufe ihrer Tangenten,
d) die Punktörter nullter Stufe, gebildet von ihren Doppelpunkten, Spitzen, Doppeltangentenberührungspunkten, Wendepunkten und den etwaigen analogen Punkten höherer Singularität, wie mehrfachen Punkten, Undulationspunkten, etc.
e) die Strahlenörter nullter Stufe der Verbindungsstrahlen je zweier solcher Punkte,
f) und g) die den unter d) und e) genannten Oertern in der Ebene dualistisch entsprechenden Oerter.

2) Die *cubische Raumcurve* habe folgende Plücker'sche Oerter:

a) den Punktort erster Stufe ihrer Punkte,
b) den Strahlenort erster Stufe ihrer Tangenten,

c) den Ebenenort erster Stufe ihrer Schmiegungsebenen,
d) den Strahlenort zweiter Stufe, gebildet von den Zweipunktaxen,
e) den Strahlenort zweiter Stufe, gebildet von den Zweiebenenaxen.

3) Das *Punktepaar*, d. h. das aus zwei Punkten bestehende Gebilde habe zu Plücker'schen Oertern:
a) den Punktort nullter Stufe zweiten Grades, gebildet von diesen beiden Punkten,
b) den Strahlenort nullter Stufe ersten Grades, gebildet von dem Verbindungsstrahle der Punkte.

4) Das *Strahlenpaar oder*, was dasselbe ist, die *lineare Congruenz* habe zu Plücker'schen Oertern:
a) den durch die beiden Strahlen erzeugten Strahlenort nullter Stufe zweiten Grades,
b) den Strahlenort zweiter Stufe mit dem Bündelgrad 1 und dem Feldgrad 1, gebildet von allen Strahlen, die die beiden Strahlen schneiden.

Die in 1) gegebene Festsetzung ergiebt nach dem Princip der Dualität eine Festsetzung für einen Kegel, ebenso die in 3) gegebene eine Festsetzung für das Ebenenpaar.

Wir folgen einem Sprachgebrauche, welcher sich in den bisherigen Arbeiten über Charakteristikentheorie herausgebildet hat, wenn wir für eine Plancurve die Oerter, welche bei 1) unter a), b), c) genannt sind, und für eine allgemeine Raumcurve den Ort ihrer Punkte, den Ort ihrer Tangenten und den Ort ihrer Schmiegungsebenen *elementare Oerter* nennen im Gegensatz zu den übrigen, den *singulären Oertern*. Wir fügen jedoch ausdrücklich hinzu, dass der Begriff der elementaren Oerter jetzt nur als *conventioneller* gelten kann, nachdem nachgewiesen ist, dass Chasles irrte, als er, verführt durch seine Resultate bei Kegelschnitten, vermuthete, bei *jeder* Plancurve seien die ihren *elementaren* Oertern zugeschriebenen *Grundbedingungen allein* schon im Stande, alle übrigen der Plancurve auferlegten Bedingungen auszudrücken.

Für ein Gebilde heisse jede Bedingung fundamental resp. elementar resp. singulär, deren symbolische Factoren sämmtlich nichts anderes, als Grundbedingungen für Plücker'sche Oerter resp. elementare Oerter resp. singuläre Oerter aussprechen, und jedes System und jede Anzahl heisse fundamental resp. elementar, wenn dies die das System oder die Anzahl definirende Bedingung ist.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann der Verfasser jetzt die wichtigsten numerischen Resultate der zweiten und dritten Abhandlung seiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" kurz so aussprechen:

1) *Bestimmung aller fundamentalen Anzahlen der cubischen mit Spitze behafteten Plancurve,*

2) *Bestimmung aller derjenigen fundamentalen Anzahlen der cubischen mit Doppelpunkt behafteten Plancurve, welche als symbolische Factoren keine andern Bedingungen enthalten, als elementare und solche singuläre, die von dem Ort nullter Stufe dritten Grades der Wendetangenten herrühren,*

3) *Bestimmung der elementaren Anzahlen der cubischen Raumcurve.*

Die gegenwärtige Abhandlung enthält von diesen Resultaten noch nichts.

Die Ausdrücke *Ordnung, Classe, Rang*, bei deren bisherigem Gebrauch der Verfasser weder Uebereinstimmung noch ein greifbares Princip zu entdecken vermocht hat, könnten durch die Angabe der Gradzahlen gewisser Plücker'scher Oerter immer vermieden werden. Indem wir sie dennoch der Kürze wegen in unsere Terminologie aufnehmen, schlagen wir zugleich für ihren Gebrauch folgende *Uebereinkunft* vor:

Ordnung eines Gebildes sei immer die Gradzahl des resp. eines bestimmten ihm angehörigen *elementaren Punktorts* von höherer als der nullten Stufe,

Classe die Gradzahl eines ebensolchen *Ebenenorts*,

Rang die Gradzahl eines ebensolchen *Strahlenorts*.

Bei dem Gebilde, welches durch einen allgemeinen Strahlenort zweiter Stufe vollständig erzeugt werden kann (Congruenz), und welches diesen Strahlenort als elementaren enthält, würde man *Bündelrang* und *Feldrang* unterscheiden müssen.

Nach dieser Uebereinkunft und den früheren Definitionen elementarer Oerter ist genau bestimmt, was bei den Plancurven Ordnung und Rang, bei den Kegeln Classe und Rang, bei den Raumcurven Ordnung, Classe und Rang bedeutet; ebenso auch, was bei den Flächen Ordnung, Classe und Rang bedeutet, wenn wir noch festsetzen, dass für eine Fläche nur drei Oerter, nämlich der Ort zweiter Stufe ihrer Punkte, der Ort zweiter Stufe ihrer Tangentialebenen, und der Ort dritter Stufe ihrer Tangenten als *elementar* gelten sollen.

Bei Gebilden anderer Definition würde erst die vorläufig willkürliche Festsetzung, welche der anhaftenden Oerter Plücker'sche resp. elementare heissen sollen, darüber entscheiden können, welche Ort-Gradzahlen Ordnung, Classe und Rang, und auch, welche Bedingungen, Systeme und Anzahlen fundamental resp. elementar heissen müssten.

Die elementare Bedingung, welche eine Plancurve, ein Kegel, eine Raumcurve, eine Fläche dadurch erfüllt, dass ein elementarer Punktort, Ebenenort oder Strahlenort a^{ter} Stufe des Gebildes die Grundbedingung Z befriedigt, erhält im Folgenden meist dasselbe Symbol, welches oben in der Tabelle der Grundbedingungen bei Z für einen Punktort, Ebenenort oder Strahlenort a^{ter} Stufe angegeben ist.

Für das Erfüllen einiger der fundamentalen Bedingungen durch gewisse Gebilde haben sich besondere Ausdrücke *eingebürgert*. Namentlich sind folgende Ausdrücke üblich, die wir neben unsrer rationellen Terminologie gebrauchen wollen, wo keine Verwechselung möglich ist:

1) „*eine Gerade schneiden*“ bei Raum- und Plancurven für „ν erfüllen“,
2) „*durch einen Punkt gehen*“ bei Raum- und Plancurven für „P erfüllen“, bei Flächen für „Π erfüllen“,
3) „*eine Ebene berühren*“ bei Raum- und Plancurven für „ϱ erfüllen“, bei Flächen für „Π' erfüllen“,
4) „*eine Gerade berühren*“ bei Raum- und Plancurven für „T erfüllen“, bei Flächen für „S erfüllen“,
5) „*eine Ebene osculiren*“ bei Raumcurven für „P' erfüllen“.

Beispielsweise zählen wir hier die in der zweiten Abhandlung eingehend behandelten *sämmtlichen fundamentalen Einzelbedingungen der Plancurve C_3^3 und der cubischen Raumcurve C_3 auf:*

1) die C_3^3, deren Spitze c, deren Rückkehrtangente q, deren Wendetangente w, deren Wendepunkt v, deren Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente y, deren Verbindungsstrahl von Wendepunkt und Spitze z heisst, hat folgende fundamentale Einzelbedingungen:

$$\mu,\ \mu_\varrho,\ \mathsf{M};\quad \nu,\ P;\quad \varrho,\ \varrho',\ t,\ T;$$
$$c,\ c_\varrho,\ C;\quad q,\ q_\varrho,\ q_p,\ q_s,\ Q;$$
$$w,\ w_\varrho,\ w_p,\ w_s,\ W;\quad v,\ v_\varrho,\ V;$$
$$y,\ y_\varrho,\ Y;\quad z,\ z_\varrho,\ z_p,\ z_s,\ Z.$$

2) Eine cubische Raumcurve hat folgende fundamentale Einzelbedingungen:

$$\nu,\ P;\quad \nu',\ P';\quad \varrho,\ \varrho',\ t,\ T;$$
$$\beta,\ B;\quad \beta',\ B';$$

wo β und B auf den Ort der Zweipunktaxen, β' und B' auf den Ort der Zweiebenenaxen zu beziehen sind.

Die in diesem § niedergelegte Auffassung eines Gebildes als eines *Trägers der ihm anhaftenden Oerter*, wonach also z. B. bei einer Raumcurve weder der Ort der Punkte, noch der Ort der Tangenten, noch der Ort der Schmiegungsebenen *ursprünglicher* als die andern Oerter oder vor ihnen *bevorzugt* erscheinen soll, ist einerseits eine Consequenz der modernen geometrischen Betrachtungsweise, in welcher Punkt, Ebene und Strahl als völlig gleichwerthige Hauptelemente des Raums auftreten (Voss, Math. Ann. Bd. VIII, p. 54), andererseits aber auch vom Verfasser als die Quelle der handlichsten Terminologie für das von ihm betretene Gebiet der Geometrie erkannt.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich daher nur mit Punkt, Ebene, Strahl und den von ihnen erzeugten Systemen und Grundbedingungen, um allgemeine Relationen zwischen den letzteren zu entwickeln, welche im Folgenden eine fundamentale Rolle spielen werden.

II. Abschnitt.

Allgemeine Formeln zwischen den Grundbedingungen.

§ 7.

Das Princip der speciellen Lage.

Die algebraische Quelle der allgemeinen Formeln, welche in diesem Abschnitt entwickelt werden, ist einzig und allein das schon früher (§ 1.) erwähnte *Princip der gleichgültigen* oder der *speciellen Lage*, welches auch das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* genannt werden könnte. Dasselbe kann für die Zwecke der Anzahlen bestimmenden Geometrie etwa so gefasst werden:

„Die räumliche Lage der Gebilde, welche gewisse einem Gebilde A auferlegte Bedingungen verursachen, ist für die Anzahl der Gebilde A, welche diese Bedingungen erfüllen, gleichgültig, sobald diese Anzahl überhaupt endlich bleibt.“

Anwendung fand dieses Princip bisher namentlich bei der Bestimmung von Gradzahlen, indem für die Abzählung der Hauptelemente, welche ein Ort des vorliegenden Gebildes mit einem Grundgebilde gemeinsam hat, der Träger des letztern so gewählt wurde, dass er eine durch die Definition des Gebildes *bevorzugte*, und desshalb das *Abzählen erleichternde Lage* einnahm. Viele dieser Abzählungsarten lassen sich nun ganz *allgemeinen* Formeln unterordnen, die hier entwickelt werden sollen.

Dem oben *allgemein* ausgesprochenen Principe ertheilen wir folgende *besondere* Form, welche die Art und Weise seiner Benutzung für die Gewinnung von Formeln zwischen Bedingungssymbolen verrathen, und den Namen „Princip der *speciellen* Lage“, abgekürzt: „Pr. d. sp. L.“ (Gött. Nachr. Mai 1874, p. 274 und Mai 1875, p. 365) rechtfertigen wird:

„Kann den beiden Gebilden, welche eine aus zwei Factoren X und Y zusammengesetzte Bedingung XY veranlassen, eine derartige *specielle* Lage zu einander ertheilt werden, dass XY sich in die Bedingungen $z_1, z_2, z_3, \cdots$ *spalten* muss (§ 3. am Schluss), so ist:

$$XY = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots .“$$

Eine nach dem Pr. d. sp. L. abgeleitete Formel a^{ter} Dimension hat also links vom Gleichheitszeichen ein *Product* zweier Symbole mit

der Dimensionssumme a, rechts eine *Summe* a-facher einzelner oder zusammengesetzter Symbole.

Beispiel für die Anwendung des Pr. d. sp. L.

Ertheilt man den beiden Punktaxen, welche die beiden einer C_3^3 auferlegten Bedingungen ν und ν (die Symbole der Grundbedingungen der C_3^3 sind in § 6. erklärt) verursachen, die specielle Lage, dass sie sich schneiden, und im Strahle g unendlich nahe sind, so kann jetzt, bei Voraussetzung eines elementaren Systems, die Bedingung ν^2 nur in folgenden Fällen erfüllt werden:

a) einmal, wenn eine Curve des Systems durch den Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Strahlen geht,

b) einmal, wenn eine Curve die Ebene der beiden Strahlen so berührt, dass der Berührungspunkt in dem Strahle g liegt,

c) dreimal, wenn eine Curve ihre Spitze im Strahle g besitzt,

d) sechsmal, wenn eine Curve ihre Ebene durch g schickt.

Daraus folgt, wenn die in a) erfüllte Bedingung P, die in b) erfüllte x, die in c) erfüllte c_g, die in d) erfüllte μ_g heisst (ν, P, c_g, μ_g sind schon in § 6. aufgeführte Grundbedingungen, x aber ist die Bedingung, eine gegebene Ebene so zu berühren, dass der Berührungspunkt auf einem in der Ebene gegebenen Strahle liegt):

$$\nu^2 = P + x + 3c_g + 6\mu_g,$$

eine Formel, welche für alle Elementarsysteme zweiter Stufe gültig ist.

Die in diesem Abschnitt durch das Pr. d. sp. L. abgeleiteten Formeln sind *allgemeingültig*, erzeugen also nicht bloss durch Addition, Subtraction, Multiplication mit Zahlencoefficienten, sondern auch durch *sbl. Mult. mit Bedingungssymbolen* oder deren allgemeingültigen Moduln *wieder allgemeingültige Formeln*. Die in ihnen auftretenden Grundbedingungen sind nicht bloss den Hauptelementen und ihren Oertern, sondern auch jedem *Gebilde* zuzuschreiben, welches dieselben enthält.

Zu beachten ist namentlich, dass die hier entwickelten Resultate des Bedingungscalcüls kein anderes Princip voraussetzen, als das Pr. d. sp. L., namentlich also *nicht* erfordern:

1) das sonst für die Gewinnung von Anzahlen so fruchtbare Chasles'sche *Correspondenzprincip* in den Grundgebilden erster Stufe, welches erst vom III. Abschnitt an Anwendung findet,

2) die Sätze über die Gradzahlen des Orts der zweien Oertern gemeinsamen Elemente, welche erst im III. Abschnitt § 26. als specielle Fälle allgemeinerer Sätze sich ergeben,

3) die Beachtung der in den Systemen von höherer als der nullten Stufe vorkommenden *ausgearteten* Gebilde (courbes singulières), welche erst in der zweiten und dritten Abhandlung in den Vordergrund treten werden.

Nur wenige Anzahlen werden im Folgenden als *Axiome* angesehen. Es sind dies die Anzahl der einer Punktaxe und einem Punktfelde gemeinsamen Punkte, die Anzahl der zwei Strahlbündeln gemeinsamen Strahlen und einige ähnliche Anzahlen. Diese axiomatischen Anzahlen sind sämmtlich gleich 1.

§ 8.

Relationen zwischen den Einem einzigen Hauptelemente angehörigen Grundbedingungen.

Die Grundbedingungen, welche ein Gebilde dadurch erfüllt, dass ein ihm angehöriger Punkt p resp. Ebene e resp. Strahl g sie erfüllt, bezeichnen wir, gemäss der Tabelle in § 5. mit:

$$p,\ p_g,\ P;\quad e,\ e_g,\ E;\quad g,\ g_e,\ g_p,\ g_s,\ G.$$

Dann ergiebt sich aus der Definition dieser Grundbedingungen, da zwei Punktfelder eine Punktaxe gemeinsam haben etc.:

$$p^2 = p_g;\quad pp_g = P;\quad e^2 = e_g;\quad ee_g = E.$$

Durch sbl. Mult. der ersten dieser Gleichungen mit p und Benutzung der zweiten kommt:

$$p^3 = P;\quad \text{analog: } e^3 = E.$$

Für den Strahl g erhält man, wenn man den beiden Axen der beiden Axenbedingungen g und g die specielle Lage zweier sich schneidender Strahlen ertheilt, durch das Pr. d. sp. L.:

$$g^2 = g_p + g_e.$$

Ferner ist, da eine Strahlenaxe mit einem Strahlenbündel einen Strahlbüschel gemein hat etc:

$$gg_p = g_s;\quad gg_e = g_s;\quad gg_s = G;\quad g_p g_e = 0.$$

Aus diesen fünf Gleichungen erhält man durch sbl. Mult. und geeignete Elimination noch folgende andere:

$$g^3 = 2g_s;\quad g_e^2 = g_p^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \tfrac{1}{2} g^4 = G.$$

Beispiele.

1) Bezeichnet für eine Plancurve μ_g die Axenbedingung ihrer Ebene, M die Ebenenbedingung derselben, so darf statt μ_g immer die zweite und statt M die dritte Potenz der Bündelbedingung ihrer Ebene gesetzt werden.
2) Bezeichnen für eine *Regelfläche* mit einer Doppelaxe g, g_p, g_e, g_s, G die Grundbedingungen ihrer Doppelaxe, so darf:

$$g_p + g_e = g^2,$$
$$g_s = \tfrac{1}{2} g^3,$$
$$G = \tfrac{1}{2} g^4$$

gesetzt werden.

Wenn aber die erwähnten $3+3+5$ Grundbedingungen *nicht von Einem einzigen* Hauptelemente, sondern von einem Orte herrühren, welcher mehr als 1 Hauptelement enthält, so gelten die obigen Beziehungen nicht mehr (vergl. § 11.).

Beispiel hierfür:

Hat eine Plancurve drei Spitzen c_1, c_2, c_3, und gehören dem von ihnen gebildeten Punktorte nullter Stufe dritten Grades die Grundbedingungen c, c_g, C zu, so ist

$$c^2 \text{ nicht gleich } c_g,$$

sondern es ist, da sich c in c_1 und c_2 und c_3 *spaltet*,

$$\begin{aligned} c^2 &= (c_1 + c_2 + c_3)^2 \\ &= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2\,(c_2 c_3 + c_1 c_3 + c_1 c_2) \\ &= c_g + c^{1,1,0}, \end{aligned}$$

wo $c^{1,1,0}$ die Bedingung bedeutet, dass von den drei Spitzen *irgend* zwei auf zwei gegebenen Punktfeldern so liegen, dass jedes Punktfeld immer nur 1 Spitze enthält.

§ 9.

Relationen zwischen den Grundbedingungen zweier Hauptelemente, von denen das eine Träger des andern ist.

Der Punkt kann zum Träger haben: den Punkt, den Strahl als Axe und die Ebene als Feld;
die Ebene: die Ebene, den Strahl als Axe, den Punkt als Bündel;
der Strahl: den Strahl, die Ebene als Feld, den Punkt als Bündel, Punkt und Ebene zugleich im Falle des Strahlbüschels, und endlich den Strahl als Axe.

Schliessen wir daher die drei Fälle aus, wo ein Hauptelement sein eigener Träger ist, und wo also die Grundbedingungen des Hauptelementes und des Trägers natürlich identisch sind, so bleiben nur folgende vier Fälle übrig, in denen ein Hauptelement Träger eines andern ist:

I) *Punkt und Strahl:* der Punkt ist dem Strahle ein Bündel, der Strahl dem Punkte eine Axe.
II) *Ebene und Strahl:* die Ebene ist dem Strahle ein Feld, der Strahl der Ebene eine Axe.
III) *Punkt und Ebene:* der Punkt ist der Ebene ein Bündel, die Ebene dem Punkte ein Feld.
IV) *Strahl und Strahl:* jeder der beiden Strahlen ist dem andern eine Axe.

Im ersten Falle erhält man die Formel geringster Dimension, welche zwischen den Grundbedingungen des Punktes p und des Strahles g besteht, dadurch, dass man dem Strahle der Axenbedingung von g die specielle Lage ertheilt, in der Ebene der Feldbedingung von p zu liegen, und nun das Pr. d. sp. L. anwendet. Da sich nun die zusammengesetzte Bedingung pg spaltet, und zwar in die Bedingung, dass der Strahl in dem Felde von p liegt, und in die Bedingung, dass der Punkt in der Axe von g liegt, so erhält man allgemeingültig:

(I) $$pg = p_g + g_p.$$

Dem entspricht dualistisch die Hauptformel des zweiten Falls, wo der Strahl wieder g, und die Ebene e heissen soll:

(II) $$eg = e_g + g_e.$$

Aus diesen beiden Hauptformeln folgen durch sbl. Mult. mit p, e, g, g_p, g_e, durch Benutzung der Formeln des § 8. und durch geeignete Eliminationen eine Reihe von Formeln, unter denen wir hervorheben:

$$\begin{aligned} pg_p &= g_s + P, \\ eg_e &= g_s + E, \\ pg_s &= p_g g_p = G + Pg, \\ eg_s &= e_g g_e = G + Eg, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} g_s &= pg_p - p^3, \\ g_s &= eg_e - e^3, \\ G &= p^2 g_p - p^3 g, \\ G &= e^2 g_e - e^3 g. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

1) *Geht ein Strahl durch einen Punkt, so lässt sich seine Feldbedingung, seine Büschelbedingung und seine Strahlbedingung durch seine Axenbedingung und die Grundbedingungen jenes Punktes ausdrücken.*

2) *Liegt ein Punkt in einem Strahle, so lässt sich seine Axenbedingung und seine Punktbedingung durch seine Feldbedingung und die Grundbedingungen jenes Strahles ausdrücken*

3) *und* 4) *das bezüglich* 1) *und* 2) *dualistisch entsprechende Resultat für einen in einer Ebene liegenden Strahl resp. für eine durch einen Strahl gehende Ebene.*

Die Formeln für den dritten Fall erhalten wir auf rein arithmetischem Wege dadurch, dass wir die zu I. und II. gehörigen Formeln auf ein und denselben Strahl g anwenden, und dessen Grundbedingungen eliminiren. Die dadurch entstehenden Relationen verbinden die Grundbedingungen einer Ebene mit denen eines auf ihr liegenden Punktes, weil, wenn ein Strahl zugleich durch einen Punkt geht und in einer

Ebene liegt, der Punkt Träger der Ebene oder, was dasselbe ist, die Ebene Träger des Punktes sein muss.

Eliminirt man pg_p aus der mit p multiplicirten Gleichung (II) und der oben erwähnten:

$$pg_p = g_s + P$$

durch Addition, so kommt:

$$peg = pe_g + g_s + P$$

und, dualistisch entsprechend:

$$peg = ep_g + g_s + E.$$

Durch Elimination der auf g bezüglichen Grundbedingungen aus diesen beiden Formeln ergiebt sich die gesuchte Formel:

(III) $$pe_g + P = ep_g + E^*),$$

oder:

$$p^3 - p^2e + pe^2 - e^3 = 0.$$

Aus dieser Hauptformel ergeben sich durch sbl. Mult. mit p oder e die Formeln höherer Dimension:

$$p^3e - p^2e^2 + pe^3 = 0$$

und

$$p^3e^2 - p^2e^3 = 0,$$

von denen die letzere sich auch unmittelbar durch die geometrische Anschauung ergiebt.

Die Formel niedrigster Dimension, welche zwischen den $6 + 6$ Grundbedingungen zweier sich schneidender Strahlen g und h besteht, kann man wieder durch blosse Rechnung erhalten, wenn man aus den Formeln, welche nach Fall (I) erstens zwischen g und dem Schnittpunkt p und zweitens zwischen h und p bestehen, die auf p bezüglichen Grundbedingungen eliminirt.

Multiplicirt man nämlich von den aus I. resultirenden 6 Formeln:

$$\begin{aligned} G &= p^2g_p - p^3g, \\ g_s &= pg_p - p^3, \\ g_e &= pg - p^2, \\ h_e &= ph - p^2, \\ h_s &= ph_p - p^3, \\ H &= p^2h_p - p^3h \end{aligned}$$

die erste mit 1, die zweite mit $-h$, die dritte mit h_p, die vierte mit g_p, die fünfte mit $-g$, die sechste mit 1, und addirt die erhaltenen 6 Gleichungen vierter Dimension, so erhält man die gesuchte Formel:

(IV) $$G - g_sh + g_eh_p + g_ph_e - gh_s + H = 0.$$

*) Beispiele zu dieser und mehreren anderen Formeln folgen am Schlusse von § 9. und § 10.

Dafür kann man auch schreiben, da nach § 8.

$$g^2h^2 = (g_e + g_p)(h_e + h_p)$$

ist,

$$g^4 - g^3h + g^2h^2 - gh^3 + h^4 = (g_e - g_p)(h_e - h_p).$$

Durch sbl. Mult. mit den Potenzen von g oder h erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} g^4h - g^3h^2 + g^2h^3 - gh^4 &= 0, \\ g^4h^2 - g^3h^3 + g^2h^4 &= 0, \\ g^4h^3 - g^3h^4 &= 0. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (IV) durch sbl. Mult. mit den Grundbedingungen von g oder h:

$$\begin{aligned} Gh - g_s(h_p + h_s) + (g_p + g_s)h_s - gH &= 0, \\ Gh_p - g_sh_s + g_eH &= 0, \\ Gh_e - g_sh_s + g_pH &= 0, \\ Gh_s - g_sH &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Formel folgt auch daraus, dass ein Paar sich schneidender Strahlen eindeutig bestimmt ist, gleichviel ob der erste Strahl und ein Strahlbüschel für den zweiten, oder ob der zweite Strahl und ein Strahlbüschel für den ersten gegeben ist. Aus den Formeln (III) und (IV) ist Folgendes ersichtlich:

Wenn ein Punkt einem Felde oder eine Ebene einem Bündel, oder ein Strahl einer Axe angehört, so lässt sich die dem Punkte resp. der Ebene resp. dem Strahle auferlegte Grundbedingung höchster Dimension durch die übrigen Grundbedingungen und die Grundbedingungen des Trägers ausdrücken.

Als Beispiele zu den 4 mit römischen Nummern bezeichneten Hauptformeln wählen wir einige der Beziehungen, welche zwischen den in § 6. mit ihren Symbolen aufgezählten Grundbedingungen der Plancurve dritter Ordnung dritten Ranges bestehen:

zu (I):
$$\begin{aligned} c^2 &= cq - q_e, \\ c^3 &= cq_p - q_s; \end{aligned}$$

zu (II):
$$\begin{aligned} q_p &= \mu q - \mu^2, \\ q_s &= \mu q_e - \mu^3, \\ Q &= \mu^2 q_e - \mu^3 q; \end{aligned}$$

zu (III):
$$\begin{aligned} c^3 &= \mu c^2 - \mu^2 c + \mu^3, \\ \mu c^3 &= \mu^2 c^2 - \mu^3 c; \end{aligned}$$

zu (IV):
$$W = w_s q - w_e q_p - w_p q_e + w q_s - Q.$$

Zahlenbeispiel zu (III):

In dem Systeme dritter Stufe, welches durch die siebenfache Bedingung $w\varrho^6$ definirt wird, ist nach den vom Verfasser berechneten Tabellen:

$$\mu c^2 = 528; \quad \mu^2 c = 364; \quad \mu^3 = 12;$$

daher nach (III):

$$c^3 = 528 - 364 + 12 = 176,$$

d. h.

$$c^3 w\varrho^6 = 176.$$

Dieses Zahlenresultat würde in die gewöhnliche Terminologie auf 4 verschiedene Arten übersetzt werden können, nämlich:

1) „Es giebt 176 Curven C_3^3, welche ···."
2) „Die Spitzen der Curven C_3^3, welche ···, füllen den Raum 176mal aus."
3) „Die von den Wendetangenten aller C_3^3, welche · ·, gebildete Regelfläche ist vom 176ten Grade."
4) „Die Tangenten aller C_3^3, welche ···, bilden eine Congruenz, deren Classe (Feldrang) 176 ist."

§ 10.

Relationen zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelementes und den Grundbedingungen eines in demselben liegenden Ortes.

Die Formeln des § 9. lassen sich auf die Fälle übertragen, wo ein Hauptelement nicht bloss ein anderes Hauptelement, sondern die sämmtlichen Elemente eines Ortes trägt. Wir sagen in diesem Falle, dass der Ort selbst in dem Träger *liege*. Im Allgemeinen kann jeder Ort als Träger von Oertern gleicher oder niedriger Stufe auftreten, z. B. ein Punktort zweiter Stufe zweiten Grades ist Träger von ∞^3 Punktörtern erster Stufe zweiten Grades. Doch kann jeder beliebige Ort a^{ten} Grades nur dann einen andern Ort b^{ten} Grades zum Träger haben, wenn a eine gewisse Grösse nicht überschreitet. Z. B. ein Punktort nullter resp. erster Stufe besitzt nur dann immer ein Punktfeld als Träger, wenn sein Grad nicht grösser als drei resp. zwei ist. Der Raum ist natürlich als Träger aller Oerter zu betrachten.

Indem wir im Folgenden nur die *Hauptelemente* als Träger dienen lassen, erhalten wir zugleich alle zu berücksichtigenden Fälle, welche die *Grundgebilde* Träger sein lassen. Denn von den 14 Grundgebilden haben nur folgende *nicht* ein Hauptelement als Träger: *die drei mit Raum bezeichneten, und der Strahlbüschel.* Die ersteren brauchen nicht berücksichtigt zu werden, weil sie keinen Grundbedingungen unterworfen werden können; und der Strahlbüschel kann auch übergangen werden, weil für einen in ihm liegenden Ort die Formeln, welche sich

auf die Lage des Ortes in dem Felde des Büschels, und die, welche sich auf seine Lage in dem Bündel des Büschels beziehen, *zugleich gelten* müssen. Endlich können auch alle Fälle übergangen werden, welche einen Ort a^{ten} Grades in einem Grundgebilde liegen lassen, das *dieselbe Stufe* hat, wie er. Denn dann ist natürlich jede dem Orte, d. h. hier einem a-fachen Grundgebilde, auferlegte Grundbedingung gleich dem a-fachen der gleichnamigen dem Träger zugeschriebenen Grundbedingung. Daher treten für uns die Grundgebilde nullter Stufe überhaupt nicht als Träger auf. Also haben wir bei der Aufstellung der Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Grundgebildes und den Grundbedingungen eines in demselben liegenden Ortes nur folgende 13 Fälle zu berücksichtigen:

A) *Der Punkt als Träger* eines:
1) Strahlenorts nullter Stufe I.,
2) Strahlenorts erster Stufe I.,
3) Ebenenorts nullter Stufe III.,
4) Ebenenorts erster Stufe III.

B) *Die Ebene als Träger* eines:
5) Strahlenorts nullter Stufe II.,
6) Strahlenorts erster Stufe II.,
7) Punktorts nullter Stufe III.,
8) Punktorts erster Stufe III.

C) *Der Strahl als Träger* eines:
9) Punktorts nullter Stufe I.,
10) Ebenenorts nullter Stufe II.,
11) Strahlenorts nullter Stufe IV.,
12) Strahlenorts erster Stufe IV.,
13) Strahlenorts zweiter Stufe IV.

Jede einem Falle nachgesetzte römische Nummer deutet an, dass ihm der in § 9. mit derselben Nummer bezeichnete Fall als specieller Fall untergeordnet ist. Für Oerter nullter Stufe a^{ten} Grades kann die Uebertragung der Formeln des § 9. in folgender Weise bewerkstelligt werden. Jede dem Orte auferlegte Grundbedingung Z verlangt nichts weiter, als dass eins seiner Elemente die gleichnamige Grundbedingung erfüllt. Daher ist durch Spaltung

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_a,$$

wo die $z_1, z_2, \cdots z_a$ die Bedingungen bedeuten, welche dem Orte dadurch erwachsen, dass sein erstes, zweites, $\cdots$, a^{tes} Element die mit Z *gleichnamige* Grundbedingung erfüllt. *Jedes* dieser Elemente liegt aber in dem Hauptelemente, welches den Ort tragen soll; für jedes gilt also auch die nämliche Formel des § 9. Addirt man daher die a Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man jene Formel auf jedes der

a Elemente des Ortes anwendet, so erhält man zwischen den Grundbedingungen des *Ortes* und seines Trägers eine Beziehung, welche mit jener Formel genau übereinstimmt bis auf das gar keine Grundbedingung des Ortes enthaltende Glied, das jetzt mit a multiplicirt erscheint (vergl. die folgenden Formel-Tabellen).

Wollte man nun dieses Verfahren auch zur Ableitung der auf Oerter von *höherer* als der nullten Stufe bezüglichen Formeln anwenden, so würde man ∞^b Gleichungen zu addiren haben, wenn b die Stufe des Ortes ist. Dabei würde nach einer Bemerkung in § 5. die Dimension der Formel um b erniedrigt werden, also würden auch alle Glieder verschwinden müssen, welche in der ursprünglichen Formel auf den Ort bezügliche Factoren von niederer als der b^{ten} Dimension enthielten. Wir bemerken, dass diese Schlussweise auf *dieselben* Formeln, welche wir später *streng beweisen* wollen, führen würde, können sie jedoch ohne Weiteres nicht als richtig anerkennen, weil sie die Addition von *unendlich vielen* Gleichungen voraussetzt.

Zunächst benutzen wir die Conformität der den obigen 13 Fällen zugehörigen Formeln mit den Formeln des § 9. zu der folgenden umfassenden, übersichtlichen Darstellung aller dieser Formeln.

„Man bezeichne die 14 Grundbedingungen mit den ihnen in § 5. gegebenen Symbolen:

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3;\quad e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3;\quad g_0,\ g_1,\ g_2,\ g_{II},\ g_3,\ g_4,$$

füge zu den folgenden 4 Hauptformeln:

$$\text{(I)}\quad p_0g_2 - p_1g_1 + p_2g_0 = 0,$$

$$\text{(II)}\quad e_0g_{II} - e_1g_1 + e_2g_0 = 0,$$

$$\text{(III)}\quad p_0e_3 - p_1e_2 + p_2e_1 - p_3e_0 = 0,$$

$$\text{(IV)}\quad g_0h_4 - g_1h_3 + (g_2h_{II} + g_{II}h_2) - g_3h_1 + g_4h_0 = 0$$

noch alle diejenigen hinzu, welche sich aus jeder dieser Formeln durch sbl. Mult. mit jedem Symbole ergeben, dessen Buchstabe schon in der Formel enthalten ist, und berücksichtige bei dieser sbl. Mult. folgende aus § 8. sich ergebende Regeln:

$$g_1 \cdot g_1 = g_2 + g_{II};\quad g_2g_{II} = 0,$$

sonst aber immer

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = \sigma_{x+y},$$

wenn σ eins der Symbole p, e, g bedeutet, und endlich:

$p_x=0$ und $e_x=0$, wenn $x>3$ ist, $g_x=0$, wenn $x>4$ ist“.

Dann erhält man alle auf die oben aufgezählten 13 Fälle bezüglichen Formeln, wenn man erstens von den beiden in jeder Formel vorkommenden Buchstaben sowohl den ersten auf das Hauptelement und den zweiten auf den in ihm liegenden Ort, wie auch umgekehrt be-

zieht, wenn man zweitens jedes Glied gleich Null setzt, dessen dem Ort b^{ter} Stufe angehöriger Factor einen Index hat, der kleiner ist als b, wenn man drittens jedes dem Orte angehörige mit dem Index b behaftete, also für ihn nullfache Symbol gleich der Gradzahl des Ortes setzt, wenn man viertens jedes dem Träger angehörige, mit dem Index Null behaftete, Symbol gleich dessen Gradzahl, d. h. gleich 1 setzt, und wenn man endlich bei dem Strahlenort zweiter Stufe g_{II} gleich dem Bündelgrad, g_2 gleich dem Feldgrad setzt."

Hieraus ergeben sich, bei Benutzung der in der Tabelle des § 5. den Grundbedingungen *nachgesetzten*, nach der *Stufenzahl der Oerter* unterschiedenen Symbole, eine Reihe von Formeln, denen wir hier die für die Anwendungen brauchbarste Gestalt geben. Jede Formel erhält diejenige arabische Nummer, welche der von ihr behandelte Fall in der Tabelle der 13 Fälle erhalten hat. a bezeichnet immer den Grad des Ortes, beim Strahlenort bezeichnet b den Feldgrad, b' den Bündelgrad.

Aus (I) *folgt:*

zu 1):
a) $g_e = cg - a \cdot c^2$,
b) $g_s = cg_p - a \cdot c^3$,
c) $G = c^2 g_p - c^3 g$;

zu 2):
a) $\varrho = a \cdot c$,
b) $t = c\varrho'$,
c) $T = c^2\varrho' - a \cdot c^3$;

zu 9):
a) $c_g = cg - a \cdot g_e$,
b) $C = cg_p - a \cdot g_s$.

Aus (II) *folgt:*

zu 5):
a) $g_p = \mu g - a \cdot \mu^2$,
b) $g_s = \mu g_e - a \cdot \mu^3$,
c) $G = \mu^2 g_e - \mu^3 g$;

zu 6):
a) $\varrho' = a \cdot \mu$,
b) $t = \mu\varrho$,
c) $T = \mu^2\varrho - a \cdot \mu^3$;

zu 10):
a) $\mu_g = \mu g - a \cdot g_p$,
b) $\mathsf{M} = \mu g_e - a \cdot g_s$.

Aus (III) *folgt:*

zu 3): $\mathsf{M} = c\mu_g - c^2\mu + a \cdot c^3$;
zu 4): $P' = c\nu' - a \cdot c^2$;
zu 7): $C = \mu c_g - \mu^2 c + a \cdot \mu^3$;
zu 8): $P = \mu\nu - a \cdot \mu^2$.

Aus (IV) *folgt* (die Axe heisse g, der in ihr liegende Strahlenort nullter Stufe habe zu Grundbedingungen: h, h_p, h_e, h_s, H):

zu 11): $H = gh_s - g_p h_e - g_e h_p + g_s h - a \cdot G$,

zu 12): $T = gt - g_p \varrho - g_e \varrho' + a \cdot g_s$,

zu 13): $B = g\beta - b \cdot g_p - b' \cdot g_e$.

Die *geometrischen* Beweise dieser Formeln beruhen sämmtlich nur auf Anwendungen des Pr. d. sp. Lage, und sind so beschaffen, dass aus dem Beweise einer Formel für einen in einem Träger liegenden Ort *nullter* Stufe der Beweis der entsprechenden Formel für einen in demselben Träger liegenden Ort *höherer* Stufe unmittelbar abgelesen werden kann.

I. *Beweis der aus* (*I*) *folgenden Formeln.*

Man lege die *Axe* der Grundbedingung g in das *Feld* der Grundbedingung c. Dann wird die zusammengesetzte Bedingung cg erstens für einen in dem Bündel p liegenden Strahlenort nullter Stufe a^{ten} Grades sowohl dadurch erfüllt, dass dieser die Feldbedingung erfüllt, als auch a mal dadurch, dass der Träger p die Axenbedingung erfüllt, und zweitens für einen in dem Strahle g liegenden Punktort nullter Stufe a^{ten} Grades sowohl dadurch, dass dieser die Axenbedingung erfüllt, wie auch a mal dadurch, dass der Träger g die Feldbedingung erfüllt. Daraus ergiebt sich nach dem Gesetz der Spaltung Formel 1a) und 9a). Formel 1b) und 9b) ergiebt sich in ähnlicher Weise, wenn man den *Punkt* der Bündelbedingung g_p in die *Ebene* der Feldbedingung c legt. Legt man endlich den *Scheitel* des Büschels von g_s in die *Ebene* von c, so ergiebt sich:

$$cg_s = G + c^3 \bar{g};$$

und aus dieser Formel und der mit c symbolisch multiplicirten Formel 1b) folgt durch Elimination von cg_s die Formel 1c). Hat man in dem Bündel p statt des Strahlenorts nullter Stufe einen Strahlenort erster Stufe a^{ten} Grades, so ergeben die ebenso specialisirten Lagen die Formeln 2*a*), 2*b*) und 2*c*). Für 2*c*) ergiebt sich zunächst wieder:

$$ct = T + a \cdot c^3,$$

und daraus erst durch Benutzung der mit c symbolisch multiplicirten Formel 2b) die gesuchte Formel:

$$c^2 \varrho' = T + a \cdot c^3.$$

II. *Beweis der aus* (*II*) *folgenden Formeln:*
durch dualistische Uebertragung der Betrachtungen von I.

III. *Beweis der aus* (*III*) *folgenden Formeln.*

Für die Ableitung von 7) lege man erstens die *Axe* von c_g durch den *Bündel* von μ, zweitens die *Axe* von μ^2 in das *Feld* von c. Dadurch ergeben sich nach dem Pr. d. sp. L. und durch Spaltung, wenn

man unter x die Bedingung versteht, dass die Ebene des Punktorts a^{ten} Grades durch eine Axe geht, welche zugleich einen seiner Punkte enthält, zwei Formeln, nämlich

$$\mu c_g = x + C$$

und

$$\mu^2 c = x + a \cdot \mu^3,$$

also durch Elimination von x die gesuchte Formel 7). Die Ableitung von 8) für einen Punktort erster Stufe ist genau dieselbe, wenn man statt c_g ν setzt, und statt des Feldes von c eine beliebige Ebene nimmt. Die den obigen beiden Formeln entsprechenden Formeln sind dann:

$$\mu \nu = x + P$$

und

$$a \cdot \mu^2 = x,$$

woraus durch Elimination von x Formel 8) folgt. Formel 3) resp. 4) folgen durch dualistische Uebertragung aus Formel 7) resp. 8).

IV. *Beweis der aus IV folgenden Formeln.*

Man verstehe unter x die Bedingung, dass der in der Axe g liegende Strahlenort einen seiner Strahlen einem Strahlbüschel zuschickt, während die Axe in der Ebene dieses Strahlbüschels liegt, unter y die Bedingung, dass die Axe einem Strahlbüschel angehört, während der Ort einen seiner Strahlen durch den Scheitel dieses Strahlbüschels schickt, und unter x' und y' die durch dualistische Uebertragung aus x resp. y resultirenden Bedingungen. Legt man dann erstens die *Axe* der Axenbedingung g in den *Strahlbüschel* von h_s, so ergiebt sich durch das Pr. d. sp. L.

$$h_s g = H + x + x';$$

legt man zweitens den *Bündel* von h_p in das *Feld* von g_e, so folgt:

$$h_p g_e = x + y;$$

legt man drittens das *Feld* von h_e durch den *Bündel* von g_p, so folgt:

$$h_e g_p = x' + y';$$

legt man endlich viertens die *Axe* der Axenbedingung h in den *Strahlbüschel* von g_s, so kommt:

$$h g_s = y + y' + a \cdot G$$

Die Elimination von x, x', y, y' aus diesen 4 Gleichungen ergiebt die Formel 11).

Für die Formel 12), d. h. einen Strahlenort erster Stufe ergiebt das analoge Verfahren folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} t g &= T + x + x', \\ \varrho' g_e &= x + y, \\ \varrho g_p &= x' + y', \\ a \cdot g_s &= y + y'. \end{aligned}$$

Für die letzte Formel sei noch bemerkt, dass $y = \alpha \cdot g_e$ und $y' = \alpha' \cdot g_s$, wenn man unter α die Zahl derjenigen Strahlen des Strahlenorts erster Stufe versteht, welche durch einen auf der Axe gelegenen Punkt gehen, und unter α' die Zahl derjenigen Strahlen versteht, welche in einer durch die Axe gehenden Ebene liegen, so dass, da a die Zahl der die Axe und noch einen zweiten Strahl schneidenden Strahlen ist, nach dem Pr. d. sp. L. $\alpha + \alpha' = a$ ist. Für die Formel 13), d. h. einen Strahlenort zweiter Stufe fällt die letzte jener 4 Gleichungen ganz fort, da jetzt die Axe eine dreifache Grundbedingung nicht mehr erfüllen kann. Also:

$$\begin{aligned} \beta g &= B + x + x' . \\ b' g_e &= x , \\ b g_p &= x' , \end{aligned}$$

wo, wie schon erwähnt, b den Feldgrad, b' den Bündelgrad des Strahlenorts bezeichnet.

Unter den vielen Anwendungen, welche die eben bewiesenen 13 Relationen zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelementes und eines von demselben getragenen Ortes gestatten, heben wir hier nur die für *Plancurven* wichtigste hervor.

Bezeichnen für eine beliebige Plancurve:

μ, μ^2, μ^3 die Grundbedingungen ihrer Ebene,

ν, P die Grundbedingungen ihres elementaren Punktorts, a dessen Grad, d. h. ihre Ordnung,

ϱ, ϱ', t, T die Grundbedingungen ihres elementaren Strahlenorts, b dessen Grad, d. h. ihren Rang,

c, c_g, C die Grundbedingungen eines beliebigen ihrer Plücker'schen Punktörter nullter Stufe, π dessen Grad, d. h. die Anzahl gewisser singulärer Punkte, z. B. der dreifachen Punkte,

g, g_e, g_p, g_s, G die Grundbedingungen eines beliebigen ihrer Plücker'schen Strahlenörter nullter Stufe, γ dessen Grad, d. h. die Anzahl gewisser singulärer Strahlen, z. B. der Verbindungsstrahlen je zweier Spitzen, so ist:

nach 8): $P = \mu\nu - a \cdot \mu^2$;

nach 6a): $\varrho' = b \cdot \mu$,

nach 6b): $t = \mu\varrho$,

nach 6c): $T = \mu^2\varrho - b \cdot \mu^3$;

nach 7): $C = \mu c_g - \mu^2 c + \pi \cdot \mu^3$;

nach 5a): $g_p = \mu g - \gamma \cdot \mu^2$,

nach 5b): $g_s = \mu g_e - \gamma \cdot \mu^3$,

nach 5c): $G = \mu^2 g_e - \mu^3 g$.

Diese 8 Resultate lassen sich zu folgendem Satze vereinigen:

„Bei einer Plancurve können immer alle diejenigen auf einen ihrer Plücker'schen Oerter bezüglichen Grundbedingungen, welche bei fester Ebene der Plancurve nicht befriedigt werden können, d. h., welche mit μ^3 symbolisch multiplicirt, ihrer Natur nach, jedem Systeme die Anzahl Null verschaffen, durch die übrigen auf denselben Plücker'schen Ort bezüglichen Grundbedingungen und durch die Grundbedingungen der Ebene ausgedrückt werden.“

Analoge Sätze gelten für alle Gebilde, welche in Trägern liegende Oerter besitzen.

Jede in einer der obigen Formeln links vom Gleichheitszeichen stehende Grundbedingung bezeichnen wir daher als *unwesentliche*, jede rechts stehende als *wesentliche*, wenn der zugehörige Ort die specielle Lage hat, bei der diese Formel gilt.

§ 11.

Beziehungen zwischen den zusammengesetzten Grundbedingungen eines in einem Träger liegenden Ortes nullter Stufe a^{ten} Grades und den Grundbedingungen seines Trägers.

Wir haben eben in § 10. gesehen, dass bei einem von einem Hauptelemente getragenen Orte nullter Stufe die unwesentlichen Grundbedingungen sich durch die wesentlichen und die Grundbedingungen des Trägers ausdrücken lassen. Aber auch diese *wesentlichen* Grundbedingungen sind bei Zulassung zusammengesetzter Grundbedingungen *nicht von einander unabhängig*. Es lassen sich nämlich bei einem Orte nullter Stufe a^{ten} Grades diejenigen zusammengesetzten Grundbedingungen, welche *mehr* als a symbolische Einzel-Factoren enthalten, durch diejenigen, welche a oder *weniger* als a Einzel-Factoren enthalten, und durch die Grundbedingungen des Trägers ausdrücken. Dies soll an einem Beispiele erläutert werden, welches so gewählt ist, dass die dabei entwickelten Resultate später, nämlich für die drei Wendetangenten der Plancurve dritter Ordnung vierten Ranges, unmittelbare Anwendung finden können. Dieses Beispiel ist der Strahlenort nullter Stufe dritten Grades, welcher eine Ebene mit den Grundbedingungen μ, μ^2, μ^3 zum Träger hat, d. h. also ein ebenes Dreiseit. Die Grundbedingungen des Ortes seien f, f_p, f_e, f_s, F.

Dann ist nach den Formeln des § 10.:

$$f_p = \mu f - 3\mu^2; \quad f_s = \mu f_e - 3\mu^3; \quad F = \mu^2 f_e - \mu^3 f;$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, Formeln zu entwickeln, welche die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n > 3$ ist, durch die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n \leqq 3$ ist, und durch die Potenzen von μ ausdrücken. Zunächst führen wir Symbole $f^{a,b,c}$ ein. Jedes $f^{a,b,c}$ bedeute die Bedingung, dass ein beliebiges der drei Elemente des Ortes die Axenbedingung

a mal, ein zweites dieselbe b mal, das dritte dieselbe c mal erfülle. Dann ist natürlich jedes $f^{a,b,c}$ gleich Null zu setzen, in welchem eine der Zahlen a, b, c grösser als 4 ist, oder in welchem die Summe zweier grösser als 7 ist, oder in welchem die Summe aller drei grösser als 9 ist. Es giebt demnach für unsern Ort 28 Bedingungen von der Form $f^{a,b,c}$. Aus dieser Bezeichnungsweise fliessen folgende Regeln für die sbl. Mult. zweier Symbole $f^{a,b,c}$:

1) Wenn sowohl $a > 0$ ist, als auch $d > 0$ ist, so ist:

$$f^{a,0,0}\, f^{d,0,0} = f^{a+d,0,0} + f^{a,d,0}.$$

2) Wenn mehr als eine der Zahlen a, b, c grösser als Null ist, und zugleich $d > 0$ ist, so ist:

$$f^{a,b,c}\, f^{d,0,0} = f^{a+d,b,c} + f^{a,b+d,c} + f^{a,b,c+d}.$$

3) Wenn sowohl mehr als eine der Zahlen a, b, c grösser als Null ist, wie auch mehr als eine der Zahlen d, e, f grösser als Null ist, so ist:

$$\begin{aligned} f^{a,b,c}\, f^{d,e,f} = {} & f^{a+d,\,b+e,\,c+f} + f^{a+d,\,b+f,\,c+e} \\ & + f^{a+e,\,b+d,\,c+f} + f^{a+e,\,b+f,\,c+d} \\ & + f^{a+f,\,b+d,\,c+e} + f^{a+f,\,b+e,\,c+d}. \end{aligned}$$

Z. B.

$$\begin{aligned} 1)\ & f^{2,0,0}\, f^{1,0,0} = f^{3,0,0} + f^{2,1,0}, \\ 2)\ & f^{2,0,0}\, f^{1,1,0} = 2f^{3,1,0} + f^{2,1,1}, \\ 3)\ & f^{2,1,1}\, f^{1,1,0} = 4f^{3,2,1} + 2f^{2,2,2}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun noch, dass nach dem Früheren

$$\begin{aligned} f^{2,0,0} &= f_e + f_p = f_e + \mu f - 3\mu^2, \\ f^{3,0,0} &= 2f_s = 2\mu f_e - 6\mu^3, \\ f^{4,0,0} &= 2F = 2\mu^2 f_e - 2\mu^3 f \end{aligned}$$

ist, so ergeben die eben aufgestellten Regeln für die 28 von Null verschiedenen Bedingungen $f^{a,b,c}$ folgende Moduln, welche nur von den Potenzen von μ und denjenigen $f^m f_e^n$, wo $m + n \leq 3$ ist, abhängen:

Erster Dimension:

1) $f^{1,0,0} = f$.

Zweiter Dimension:

2) $f^{2,0,0} = f_e + \mu f - 3\mu^2$,

3) $\begin{aligned} f^{1,1,0} &= f^{1,0,0}\, f^{1,0,0} - f^{2,0,0} \\ &= ff - f_e - \mu f + 3\mu^2. \end{aligned}$

Dritter Dimension:

4) $f^{3,0,0} = 2\mu f_e - 6\mu^3$,

5) $\begin{aligned} f^{2,1,0} &= f^{1,0,0}\, f^{2,0,0} - f^{3,0,0} \\ &= ff_e + \mu ff - 2\mu f_e - 3\mu^2 f + 6\mu^3, \end{aligned}$

6) $f^{1,1,1} = f^{1,0,0} f^{1,1,0} - 2 f^{2,1,0}$
$= fff - 3 ff_e - 3 \mu ff + 4 \mu f_e + 9 \mu^2 f - 12 \mu^3.$

Vierter Dimension:

7) $f^{4,0,0} = 2 \mu^2 f_e - 2 \mu^3 f,$

8) $f^{3,1,0} = f^{1,0,0} f^{3,0,0} - f^{4,0,0}$
$= 2 \mu f f_e - 2 \mu^2 f_e - 4 \mu^3 f,$

9) $f^{2,2,0} = f^{2,0,0} f^{2,0,0} - f^{4,0,0}$
$= f_e f_e + 2 \mu f f_e + \mu^2 ff - 8 \mu^2 f_e - 4 \mu^3 f,$

10) $f^{2,1,1} = f^{1,0,0} f^{2,1,0} - f^{3,1,0} - f^{2,2,0}$
$= f^{2,0,0} f^{1,1,0} - 2 f^{3,1,0}$
$= fff_e - f_e f_e + \mu fff - 6 \mu f f_e - 4 \mu^2 ff + 10 \mu^2 f_e + 14 \mu^3 f.$

Fünfter Dimension:

11) $f^{4,1,0} = f^{4,0,0} f^{1,0,0}$
$= 2 \mu^2 f f_e - 2 \mu^3 ff,$

12) $f^{3,2,0} = f^{3,0,0} f^{2,0,0}$
$= 2 \mu f_e f_e + 2 \mu^2 f f_e - 12 \mu^3 f_e,$

13) $f^{3,1,1} = f^{3,1,0} f^{1,0,0} - f^{4,1,0} - f^{3,2,0}$
$= f^{3,0,0} f^{1,1,0} - 2 f^{4,1,0}$
$= 2 \mu fff_e - 2 \mu f_e f_e - 6 \mu^2 f f_e - 2 \mu^3 ff + 12 \mu^3 f_e,$

14) $f^{2,2,1} = f^{2,2,0} f^{1,0,0} - 2 f^{3,2,0}$
$= f^{2,1,0} f^{2,0,0} - f^{4,1,0} - f^{3,2,0}$
$= f f_e f_e + 2 \mu fff_e - 4 \mu f_e f_e + \mu^2 fff - 12 \mu^2 f f_e$
$- 4 \mu^3 ff + 24 \mu^3 f_e.$

Sechster Dimension:

15) $f^{4,2,0} = f^{4,0,0} f^{2,0,0}$
$= 2 \mu^2 f_e f_e,$

16) $f^{4,1,1} = f^{4,1,0} f^{1,0,0} - f^{4,2,0}$
$= f^{4,0,0} f^{1,1,0}$
$= 2 \mu^2 fff_e - 2 \mu^2 f_e f_e - 2 \mu^3 fff,$

17) $f^{3,3,0} = f^{3,0,0} f^{3,0,0}$
$= 4 \mu^2 f_e f_e,$

18) $f^{3,2,1} = f^{3,2,0} f^{1,0,0} = f^{3,1,0} f^{2,0,0} - f^{3,3,0}$
$= f^{2,1,0} f^{3,0,0} - f^{4,2,0}$
$= 2 \mu f f_e f_e + 2 \mu^2 fff_e - 6 \mu^2 f_e f_e - 12 \mu^3 f f_e,$

19) $f^{2,2,2} = f^{2,2,1} f^{1,0,0} - 2 f^{3,2,1}$
$= f^{2,2,0} f^{2,0,0} - 2 f^{4,2,0}$
$= f_e f_e f_e + 3 \mu f f_e f_e + 3 \mu^2 fff_e - 15 \mu^2 f_e f_e + \mu^3 fff - 18 \mu^3 f f_e.$

Siebenter Dimension:

20) $f^{1,3,0} = f^{4,0,0} f^{3,0,0}$
$= 4\mu^3 f_e f_e$,

21) $f^{4,2,1} = f^{4,2,0} f^{1,0,0} - f^{4,3,0}$
$= f^{4,1,0} f^{2,0,0} - f^{4,3,0} = f^{4,0,0} f^{2,1,0}$
$= 2\mu^2 f f_e f_e - 4\mu^3 f_e f_e$,

22) $f^{3,3,1} = f^{3,3,0} f^{1,0,0} - 2 f^{4,3,0}$
$= f^{3,1,0} f^{3,0,0} - f^{4,3,0}$
$= 4\mu^2 f f_e f_e - 8\mu^3 f_e f_e$,

23) $f^{3,2,2} = f^{3,2,0} f^{2,0,0} - f^{4,3,0} = f^{3,0,0} f^{2,2,0}$
$= 2\mu f_e f_e f_e + 4\mu^2 f f_e f_e + 2\mu^3 f f f_e - 22\mu^3 f_e f_e$,

Achter Dimension:

24) $f^{4,3,1} = f^{4,0,0} f^{3,1,0} = f^{3,0,0} f^{4,1,0}$
$= f^{4,3,0} f^{1,0,0}$
$= 4\mu^3 f f_e f_e$,

25) $f^{4,2,2} = f^{4,0,0} f^{2,2,0} = f^{4,2,0} f^{2,0,0}$
$= 2\mu^2 f_e f_e f_e + 2\mu^3 f f_e f_e$,

26) $f^{3,3,2} = f^{3,3,0} f^{2,0,0} = f^{3,2,0} f^{3,0,0}$
$= 4\mu^2 f_e f_e f_e + 4\mu^3 f f_e f_e$.

Neunter Dimension:

27) $f^{4,3,2} = f^{4,0,0} f^{3,2,0} = f^{4,2,0} f^{3,0,0} = f^{2,0,0} f^{4,3,0}$
$= 4\mu^3 f_e f_e f_e$,

28) $f^{3,3,3} = f^{3,0,0} f^{3,0,0} f^{3,0,0} = f^{3,3,0} f^{3,0,0}$
$= 8\mu^3 f_e f_e f_e$.

Stellt man nun durch Spaltung die Potenzen von f als Summen von Summanden her, welche die Form $f^{a,b,c}$ haben, und setzt für diese die eben berechneten Moduln ein, so erhält man die Potenzen von f als Functionen von

$$\mu,\ \mu^2,\ \mu^3$$

und

$$f,\ f_e,$$
$$ff,\ ff_e,\ f_e f_e,$$
$$fff,\ fff_e,\ ff_e f_e,\ f_e f_e f_e.$$

Z. B.

$$f^7 = 35 f^{4,3,0} + 105 f^{4,2,1} + 70 f^{3,3,1} + 105 f^{3,2,2}.$$

Dies giebt nach Substitution der Moduln:

$$f^7 = 210\mu f_e^3 + 910\mu^2 f f_e^2 + 210\mu^3 f^2 f_e - 3150\mu^3 f_e^2.$$

Dieser Modul für f^7 ist schon in § 4. als Beispiel erwähnt.

In analoger Weise könnte man nun auch Moduln für die Symbole entwickeln, welche nicht f allein, sondern f und f_e als Einzelfactoren enthalten und so zu Moduln für diejenigen 20 Bedingungen $f^m f_e^n$ gelangen, in welchen $m+n>3$ ist.

Wir wollen jedoch dieses Verfahren durch ein bequemeres ersetzen. Multiplicirt man nämlich jene 28 Symbole $f^{a,b,c}$ auf alle mögliche Weise mit einander, so erhält man theils freilich Identitäten, theils aber auch Gleichungen, welche nur ein einziges Symbol $f^m f_e^n$, wo $m+n$ grösser als 3 ist, enthalten, und welche also zur Ableitung der gesuchten Moduln und zur Erlangung von Bestätigungen geeignet sind. Am schnellsten gelangt man zu den 20 gesuchten Formeln, wenn man nach dem eben angegebenen Verfahren nur die Moduln der 5 Symbole f^4, $f^3 f_e$, $f^2 f_e^2$, $f f_e^3$, f_e^4 berechnet und hieraus die Moduln der 15 übrigen Symbole dadurch ableitet, dass man fortwährend mit f und f_e sbl. multiplicirt und unmittelbar darauf für rechts etwa auftretende Symbole $f^m f_e^n$, wo $m+n>3$ ist, die nun schon berechneten Moduln einsetzt. Die meisten dieser 15 Moduln erhält man dann auf zweierlei Weise, nämlich durch sbl. Mult. mit f sowohl wie mit f_e.

1) f^4 wird abgeleitet entweder aus:

$$f^{1,0,0} f^{1,1,1} = 3 f^{2,1,1},$$

oder aus:

$$f^{1,1,0} f^{1,1,0} = 2 f^{2,2,0} + 4 f^{2,1,1}.$$

Man erhält übereinstimmend nach Substitution der oben berechneten Moduln:

$$f^4 = 6 f^2 f_e - 3 f_e^2 - 22 \mu f f_e + 6 \mu f^3 + 30 \mu^2 f_e - 21 \mu^2 f^2 + 54 \mu^3 f.$$

2) $f^3 f_e$ ergiebt sich entweder aus:

$$f^{1,0,0} f^{2,1,1} = f^{3,1,1} + 2 f^{2,2,1},$$

oder aus:

$$f^{2,0,0} f^{1,1,1} = 3 f^{3,1,1},$$

nachdem für das dabei auftretende f^4 der eben berechnete Modul eingesetzt ist.

3) $f^2 f_e^2$ ergiebt sich entweder aus:

$$f^{1,0,0} f^{2,2,1} = f^{2,2,2} + 2 f^{3,2,1},$$

oder aus:

$$f^{2,0,0} f^{2,1,1} = f^{4,1,1} + 2 f^{2,2,1},$$

nachdem für f^4 und $f^3 f_e$ die Moduln eingesetzt sind.

4) $f f_e^3$ ergiebt sich entweder aus:

$$f^{1,0,0} f^{2,2,2} = 3 f^{3,2,2},$$

oder aus:

$$f^{2,0,0} f^{2,2,1} = f^{3,2,2} + 2 f^{4,2,1},$$

nachdem für f^4, $f^3 f_e$, $f^2 f_e^2$ die Moduln eingesetzt sind.

5) f_e^4 erhält man entweder aus:

$$f^{2,0,0} f^{2,2,2} = 3 f^{4,2,2},$$

nachdem für f^4, $f^3 f_e$, $f^2 f_e^2$, $f f_e^3$ die Moduln eingesetzt sind, oder noch kürzer direct geometrisch.

Als Beispiel für die Ableitung der Moduln derjenigen $f^m f_e^n$, bei denen $m+n>4$ ist, aus den Moduln derjenigen, bei denen $m+n=4$ ist, diene die Ableitung von $f^4 f_e$ (vergl. die unten folgende Tabelle).

Der mit f sbl. multiplicirte Modul von $f^3 f_e$ ist:

$$f^4 f_e = 3 f^2 f_e^2 + 6\mu f^3 f_e - 7\mu f f_e^2 - 18\mu^2 f^2 f_e - 3\mu^3 f^3 + 30\mu^3 f f_e,$$

die Substitution der dann als berechnet vorauszusetzenden Moduln für $f^2 f_e^2$ und $f^3 f_e$ ergiebt:

$$f^4 f_e = 3 f^3 + 26\mu f f_e^2 + 21\mu^2 f^2 f_e - 72\mu^2 f_e^2 - 6\mu^3 f^3 - 102\mu^3 f f_e.$$

Dieselbe Form d erhält man auch dadurch, dass man den Modul von f^4 mit f_e sbl. multiplicirt und für die dadurch rechts auftretenden $f^2 f_e^2$ und $f^3 f_e$ wieder die als berechnet vorausgesetzten Moduln einsetzt.

Wir stellen jetzt die so vom Verfasser auf verschiedenen Wegen gewonnenen und verificirten Moduln aller 30 von Null verschiedenen Bedingungen $f^m f_e^n$ zusammen und nehmen also der Vollständigkeit wegen auch die Bedingungen $f^p f_e^q$, wo $p+q \leqq 3$ ist, mit in die Tabelle auf. Rechts vom Gleichheitszeichen stehen also nur Bedingungen von der Form $\mu^m f^p f_e^q$, wo $p+q \leqq 3$ ist, und zwar geordnet nach steigenden Potenzen von μ. Die Formeln selbst sind wieder nach ihren Dimensionen geordnet.

Nullter Dimension:

1) $f^0 f_e^0 = 1$.

Erster Dimension:

2) $f^1 f_e^0 = f$.

Zweiter Dimension:

3) $f^0 f_e^1 = f_e$,

4) $f^2 f_e^0 = f^2$.

Dritter Dimension:

5) $f^1 f_e^1 = f f_e$,

6) $f^3 f_e^0 = f^3$.

Vierter Dimension:

7) $f^0 f_e^2 = f_e^2$,

8) $f^2 f_e^1 = f^2 f_e$,

9) $f^4 f_e^0 = 6 f^2 f_e - 3 f_e^2 - 22\mu f f_e + 6\mu f^3 + 30\mu^2 f_e - 21\mu^2 f^2 + 54\mu^3 f$.

Fünfter Dimension:

10) $f^1f_e^2 = ff_e^2$,

11) $f^3f_e^1 = 3ff_e^2 + 6\mu f^2f_e - 7\mu f_e^2 - 18\mu^2ff_e - 3\mu^3f^2 + 30\mu^3f_e$,

12) $f^5f_e^0 = 15ff_e^2 + 50\mu f^2f_e - 60\mu f_e^2 + 15\mu^2f^3 - 210\mu^2ff_e - 90\mu^3f^2 + 360\mu^3f_e$.

Sechster Dimension:

13) $f^0f_e^3 = f_e^3$,

14) $f^2f_e^2 = f_e^3 + 5\mu ff_e^2 - 10\mu^2f_e^2 + \mu^2f^2f_e - \mu^3f^3 - 8\mu^3ff_e$,

15) $f^4f_e^1 = 3f_e^3 + 26\mu ff_e^2 + 21\mu^2f^2f_e - 72\mu^2f_e^2 - 6\mu^3f^3 - 102\mu^3ff_e$,

16) $f^6f_e^0 = 15f_e^3 + 165\mu ff_e^2 + 195\mu^2f^2f_e - 545\mu^2f_e^2 - 15\mu^3f^3 - 990\mu^3ff_e$.

Siebenter Dimension:

17) $f^1f_e^3 = 3\mu f_e^3 + 3\mu^2ff_e^2 - 3\mu^3f^2f_e - 12\mu^3f_e^2$,

18) $f^3f_e^2 = 8\mu f_e^3 + 21\mu^2ff_e^2 - 6\mu^3f^2f_e - 66\mu^3f_e^2$,

19) $f^5f_e^1 = 35\mu f_e^3 + 130\mu^2ff_e^2 + 5\mu^3f^2f_e - 425\mu^3f_e^2$,

20) $f^7f_e^0 = 210\mu f_e^3 + 910\mu^2ff_e^2 + 210\mu^3f^2f_e - 3150\mu^3f_e^2$.

Achter Dimension:

21) $f^0f_e^4 = 6\mu^2f_e^3 - 6\mu^3ff_e^2$,

22) $f^2f_e^3 = 12\mu^2f_e^3 + 3\mu^3ff_e^2$,

23) $f^4f_e^2 = 45\mu^2f_e^3 + 45\mu^3ff_e^2$,

24) $f^6f_e^1 = 235\mu^2f_e^3 + 345\mu^3ff_e^2$,

25) $f^8f_e^0 = 1540\mu^2f_e^3 + 2660\mu^3ff_e^2$.

Neunter Dimension:

26) $f^1f_e^4 = 12\mu^3f_e^3$,

27) $f^3f_e^3 = 39\mu^3f_e^3$,

28) $f^5f_e^2 = 180\mu^3f_e^3$,

29) $f^7f_e^1 = 1050\mu^3f_e^3$,

30) $f^9f_e^0 = 7280\mu^3f_e^3$.

Alle diese Formeln sind durch die wichtige Anwendung, welche sie später finden werden, mehrfach auch *numerisch verificirt.*

Ueber diese Anwendung sei hier vorläufig Folgendes mitgetheilt. Wie schon in § 6. erwähnt ist, war eins der äussern Ziele bei des Verfassers Untersuchungen die in dem Preisthema der kgl. dänischen Akademie verlangte *Bestimmung aller elementaren Anzahlen der cubischen Raumcurve.* Diese Anzahlen hängen aber, wie in der dritten Abhandlung gezeigt werden wird, namentlich von gewissen bisher noch nicht bestimmten Anzahlen gewisser Plancurven und gewisser diesen dualistisch entsprechender Kegel ab. Unter den letzteren An-

zahlen befinden sich aber auch alle diejenigen auf eine Plancurve dritter Ordnung vierten Ranges bezüglichen Anzahlen, welche als symbolische Einzelfactoren ausser den elementaren Bedingungen der C_3^4 auch noch die Grundbedingungen f, f_p, f_e, f_s, F des Orts ihrer 3 Wendetangenten enthalten. Von diesen Anzahlen lässt sich nun vermittelst der Formeln des vorigen § und der eben mitgetheilten Formeln *der grössere Theil durch den kleineren Theil ausdrücken*, so dass eine directe Berechnung nur noch weniger Anzahlen übrig lässt, nämlich nur aller derjenigen, welche in folgender Form enthalten sind:

$$\mu^m \nu^n \varrho^r f^p f_e^q,$$

wo $p + q \leqq 3$ ist, natürlich $m \leqq 3$ und

$$m + n + r + p + 2q$$

gleich der Constantenzahl 11 der C_3^4 ist.

§ 12.

Moduln für die Potenzen der Axenbedingung des in einem Strahlbüschel liegenden Strahlenorts nullter Stufe dritten Grades.

Bei dem Fall eines in einem *Strahlbüschel* liegenden Ortes war in § 10. nur erwähnt, dass dann die Formeln für die Lage des Ortes in dem Felde μ und die Formeln für seine Lage in dem Bündel c des Strahlbüschels gleichzeitig gelten müssen. Wir benutzen diesen Umstand für die Lösung des folgenden Problems: *„Herstellung von Moduln, durch welche alle zusammengesetzten Grundbedingungen des in einem Strahlbüschel liegenden Strahlenorts nullter Stufe dritten Grades nur von folgenden Bedingungen abhängen:*

1) *den Producten der Grundbedingungen μ, μ^2, μ^3 der Ebene des Strahlbüschels mit den Grundbedingungen c, c^2, c^3 des Scheitels des Strahlbüschels,*
2) *der Bedingung ν_0, welche aussagt, dass keiner der drei Strahlen des Orts die Axenbedingung ν erfüllt,*
3) *der Bedingung ν_1, welche aussagt, dass einer der drei Strahlen ν erfüllt,*
4) *der Bedingung ν_2, welche aussagt, dass jeder von zweien der drei Strahlen ν erfüllt,*
5) *der Bedingung ν_3, welche aussagt, dass jeder der drei Strahlen ν erfüllt.*

Nach § 10. ist, wenn a Strahlen g durch einen Punkt c gehen und zugleich in einer Ebene μ liegen:

$$g_e = cg - a \cdot c^2,$$
$$g_p = \mu g - a \cdot \mu^2,$$

also durch Addition:

$$g^2 = g(\mu+c) - a\cdot(\mu^2+c^2).$$

Daher ist:

erstens die Bedingung, dass *einer der drei Strahlen* die Axenbedingung *zweimal* erfüllen soll, gleich

$$\nu_1(\mu+c) - 3\cdot\nu_0(\mu^2+c^2);$$

zweitens die Bedingung, dass *einer* die Axenbedingung *einmal*, *einer der beiden andern* dieselbe *zweimal* erfüllen soll, gleich

$$\nu_2(\mu+c) - 2\cdot\nu_1(\mu^2+c^2);$$

drittens die Bedingung, dass *jeder von zwei Strahlen* die Axenbedigung *einmal*, *der dritte* sie aber *zweimal* erfüllen soll, gleich

$$\nu_3(\mu+c) - 1\cdot\nu_2(\mu^2+c^2).$$

Wir erhalten daher durch sbl. Mult. von ν_0, ν_1, ν_2, ν_3 mit ν folgende Regeln. Es ist immer:

$$\begin{aligned}
\nu\nu_0 &= \nu_1\,,\\
\nu\nu_1 &= \nu_2 + 1\cdot[\nu_1(\mu+c) - 3\,\nu_0(\mu^2+c^2)]\,,\\
\nu\nu_2 &= \nu_3 + 2\cdot[\nu_2(\mu+c) - 2\,\nu_1(\mu^2+c^2)]\,,\\
\nu\nu_3 &= \qquad 3\cdot[\nu_3(\mu+c) - 3\,\nu_2(\mu^2+c^2)]\,.
\end{aligned}$$

Bei fortwährender sbl. Mult. mit ν und gleich darauf folgender Benutzung dieser Regeln ergiebt sich nach einander:

1) $\nu^0 = \nu_0\,,$
2) $\nu^1 = \nu_1\,,$
3) $\nu^2 = \nu_2 + \nu_1(\mu+c) - 3\,\nu_0(\mu^2+c^2)\,,$
4) $\nu^3 = \nu_3 + 3\,\nu_2(\mu+c) - 6\,\nu_1(\mu^2+c^2) + 2\,\nu_1(\mu c) - 3\,\nu_0(\mu^3+c^3) - 3\,\nu_0(\mu^2 c+\mu c^2)\,,$
5) $\nu^4 = 6\,\nu_3(\mu+c) - 3\,\nu_2(\mu^2+c^2) + 14\,\nu_2(\mu c) - 21\,\nu_1(\mu^3+c^3) - 19\,\nu_1(\mu^2 c+\mu c^2) + 30\,\nu_0(\mu^2 c^2)\,,$
6) $\nu^5 = 15\,\nu_3(\mu^2+c^2) + 50\,\nu_3(\mu c) - 45\,\nu_2(\mu^3+c^3) - 15\,\nu_2(\mu^2 c+\mu c^2) - 80\,\nu_1(\mu^2 c^2) + 240\,\nu_0(\mu^3 c^2)\,,$
7) $\nu^6 = 180\,\nu_3(\mu^2 c+\mu c^2) - 500\,\nu_2(\mu^2 c^2) + 560\,\nu_1(\mu^3 c^2)\,,$
8) $\nu^7 = 1120\,\nu_3(\mu^2 c^2) - 2520\,\nu_2(\mu^3 c^2)\,,$
9) $\nu^8 = 4200\,\nu_3(\mu^3 c^2)\,.$

Die sehr leichte direct geometrische Herleitung der letzten dieser 9 Formeln liefert eine Bestätigung, denn

$$8_4\cdot(8-4)_3\cdot 2\cdot 2 + 8_4\cdot(8-4)_2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+1) + 8_3\cdot(8-3)_3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot(1+1) = 4200.$$

wo a_b die Zahl bedeutet, welche angiebt, auf wieviel Arten aus a Elementen je b zusammengefasst werden können. Alle übrigen zusam-

mengesetzten Grundbedingungen des Orts lassen sich durch die angegebenen ausdrücken, sobald man hinreichend benutzt die schon erwähnten Formeln aus § 10.:

$$g_p = \mu g - 3\mu^2,$$
$$g_e = cg - 3c^2,$$

und die aus ihnen folgenden:

$$g_s = \mu cg - 3(\mu^2 c + c^3) = \mu cg - 3(\mu c^2 + \mu^3),$$
$$G = (\mu c^2 - c^3)g - 3\mu^2 c^2 = (\mu^2 c - \mu^3)g - 3\mu^2 c^2.$$

Auch die in diesem § entwickelten Formeln haben durch ihre Anwendungen bei den Ausartungen der cubischen Plancurven viele numerische Bestätigungen erfahren.

§ 13.

Die Producte aller Potenzen der Axenbedingungen zweier in einem Strahlbüschel liegenden Strahlen, ausgedrückt durch die nullten und ersten Potenzen ihrer Axenbedingungen und durch die Grundbedingungen des Scheitels und der Ebene des Strahlbüschels.

Die Ebene des Strahlbüschels habe wieder die Grundbedingungen μ, μ^2, μ^3, sein Scheitel c, c^2, c^3. Die beiden in ihm liegenden Strahlen a und b mit den Axenbedingungen a und b seien so beschaffen, dass ihre Gesammtheit *nicht als ein einziger Strahlenort zweiten Grades* aufgefasst werden darf. Dann ist jedes Symbol $a^n b^m$ eine Function von a, b, $a \cdot b$ und den Producten der Potenzen von μ und c. Aus Formel (I) und (II) in § 9. und der Formel $g^2 = g_p + g_e$ in § 9. ergiebt sich nämlich zunächst:

1) $a^2 = a(\mu + c) - (\mu^2 + c^2)$,
2) $b^2 = b(\mu + c) - (\mu^2 + c^2)$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgen durch sbl. Mult. mit a und b, und jedesmalige Ersetzung der dabei rechts erscheinenden Symbole a^2 und b^2 durch die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen, nach und nach die Formeln:

3) $a^3 = 2a(\mu c) - (\mu^3 + c^3) - (\mu^2 c + \mu c^2)$,
4) $a^2 b = ab(\mu c) - b(\mu^2 + c^2)$,
5) $a^4 = -a(\mu^3 + c^3) + a(\mu^2 c + \mu c^2) - 2(\mu^2 c^2)$,
6) $a^3 b = 2ab(\mu c) - b(\mu^3 + c^3) - b(\mu^2 c + \mu c^2)$,
7) $a^2 b^2 = ab(\mu^2 + c^2) + 2ab(\mu c) - (a+b)(\mu^3 + c^3) - (a+b)(\mu^2 c + \mu c^2) + 2(\mu^2 c^2)$,
8) $a^4 b = -ab(\mu^3 + c^3) + ab(\mu^2 c + \mu c^2) - 2b(\mu^2 c^2)$,

9) $a^3b^2 = 2ab(\mu^2c+\mu c^2) - 2a(\mu^2c^2) - 4b(\mu^2c^2) + 4(\mu^3c^2)$,
10) $a^4b^2 = 2ab(\mu^2c^2) - 4b(\mu^3c^2)$,
11) $a^3b^3 = 4ab(\mu^2c^2) - 4(a+b)(\mu^3c^2)$,
12) $a^4b^3 = 4ab(\mu^3c^2)$,

und ausserdem die durch Vertauschung von a und b aus diesen hervorgehenden neuen Formeln.

Wir machen von diesen Formeln sogleich eine Anwendung, welche uns später für die Berechnung der Anzahlen gewisser ausgearteter cubischer Plancurven (z. B. der in den Gött. Nachr. Mai 1875 mit δ_1 bezeichneten Ausartung der C_3^3) von Nutzen sein wird. Sind nämlich die beiden Strahlen a und b aus einem in dem Büschel (μ, c) gelegenen Strahlenorte nullter Stufe *dritten* Grades dadurch hervorgegangen, dass zwei seiner drei Strahlen in den Strahl a, der dritte in den Strahl b gefallen ist, so lassen sich jetzt die Potenzen der Axenbedingung ν dieses Strahlenorts durch die Producte der Potenzen von μ und c, durch die Axenbedingung a des Strahls a, durch die Axenbedingung b des Strahls b, und durch das Product beider $a \cdot b$ ausdrücken. Denn es ist nach dem Gesetze der Spaltung:

$$\nu^n = (2a+b)^n.$$

Daraus folgt durch Ausführung der angedeuteten Potenzirung und hinreichende Benutzung der eben gefundenen 12 Formeln:

1) $\nu^1 = 2a + b$,
2) $\nu^2 = 4ab + 4a(\mu+c) + b(\mu+c) - 5(\mu^2+c^2)$,
3) $\nu^3 = 18ab(\mu+c) - 6a(\mu^2+c^2) + 16a(\mu c) - 12b(\mu^2+c^2) + 2b(\mu c) - 9(\mu^3+c^3) - 9(\mu^2c+\mu c^2)$,
4) $\nu^4 = 24ab(\mu^2+c^2) + 128ab(\mu c) - 48a(\mu^3+c^3) - 16a(\mu^2c+\mu c^2) - 57b(\mu^3+c^3) - 55b(\mu^2c+\mu c^2) + 14(\mu^2c^2)$,
5) $\nu^5 = -90ab(\mu^3+c^3) + 330ab(\mu^2c+\mu c^2) - 340a(\mu^2c^2) - 560b(\mu^2c^2) + 480(\mu^3c^2)$,
6) $\nu^6 = 1240ab(\mu^2c^2) - 880a(\mu^3c^2) - 1600b(\mu^3c^2)$,
7) $\nu^7 = 3360ab(\mu^3c^2)$.

Die letzte Formel ist sehr leicht geometrisch zu verificiren, da das aus a und b bestehende Strahlenpaar durch 7 Strahlen, die es schneiden soll, endlichdeutig bestimmt ist. Werden 4 der 7 gegebenen Strahlen zur Bestimmung des *Doppelstrahls* verwendet, so ergiebt sich:

$$7_4 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot 2;$$

und werden 4 Strahlen zur Bestimmung des *einfachen*, also 3 zur Bestimmung des doppelten Strahls verwendet, so ergiebt sich:

$$7_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Die Summe beider Zahlen ist aber 3360, d. i. der Coefficient von $a \cdot b(\mu^3 c^2)$ in der letzten der 7 Formeln.

Alle übrigen Producte von Grundbedingungen des behandelten Gebildes hängen durch die Formeln der früheren §§ nur von den Potenzen von ν, μ, c ab, lassen sich also dann vermittelst der obigen Formeln leicht durch:

$$a,\ b,\ a \cdot b,\ (\mu + c),\ (\mu^2 + c^2),\ (\mu c),\ (\mu^3 + c^3),\ (\mu^2 c + \mu c^2)$$

ausdrücken.

Am Schlusse dieses Abschnitts sei noch besonders hervorgehoben, dass es in dem *fundamentalen* Charakter der in ihm entwickelten Resultate begründet liegt, warum die Ableitung derselben von *algebraischen Principien nur das Princip der speciellen Lage* vorauszusetzen braucht, namentlich also frei bleiben konnte von dem gewöhnlichen Correspondenzprincip und den Productensätzen, das ist den Sätzen, welche den Grad des Orts der zweien Oertern gemeinsamen Elemente als Function der Gradzahlen dieser Oerter angeben. Jedoch wird schon der nächste Abschnitt dadurch, dass er nicht bloss Oerter, d. h. Systeme von Hauptelementen, sondern aus Oertern bestehende Gebilde, nämlich das *Punktepaar*, das *Ebenenpaar* und das *Strahlenpaar*, behandelt, das Correspondenzprincip voraussetzen und dabei auch den Begriff eines *ausgearteten* Gebildes einführen müssen. Die Untersuchung dieser nächst den Hauptelementen einfachsten Gebilde ergeben dann alle möglichen im Sinne von Zeuthen (C. R. Juni 1874) *erweiterten Correspondenzsätze*, bei deren Auffindung auch die Resultate unsres § 10. zur Anwendung kommen. In diesen Correspondenzsätzen stecken die eben erwähnten Productensätze als einfachste specielle Fälle.

III. Abschnitt.

Die Paare von Hauptelementen und ihre Coincidenzen.

§ 14.

Definition der Paare und ihrer Coincidenzen.

Nachdem wir uns im vorigen Abschnitt nur mit Punkt, Ebene, Strahl und den von ihnen erzeugten Systemen beschäftigt haben, gehen wir in diesem Abschnitt zu einer Untersuchung der nächst einfachen Gebilde über, nämlich zu denjenigen 6 Gebilden, welche von je *zwei* Hauptelementen erzeugt werden, also von

1) *Punkt* und *Punkt*,
2) *Ebene* und *Ebene*,

3) *Strahl* und *Strahl*,
4) *Punkt* und *Ebene*,
5) *Punkt* und *Strahl*,
6) *Ebene* und *Strahl*.

Namentlich werden uns die drei ersten dieser 6 Gebilde beschäftigen, das *Punktepaar*, das *Ebenenpaar* und das *Strahlenpaar*. Da das Punktepaar und das Ebenenpaar sich dualistisch entsprechen, so brauchen wir von diesen beiden Paaren nur das eine zu berücksichtigen. Wir wählen das Punktepaar. Unter den Paaren sind besonders ausgezeichnet die *Coincidenzen*, das sind solche Paare, wo die beiden erzeugenden Elemente unendlich nahe sind, und dadurch die Constantenzahl des allgemeinen Paares um 1 erniedrigen. Jede Coincidenz heisse ε.

In den folgenden Abhandlungen werden wir immer unter einer *Ausartung* eines Gebildes A ein solches Gebilde verstehen, welches der Definition von A vollkommen genügt, aber eine um 1 kleinere Constantenzahl als A dadurch gewinnt, dass die auf ihm liegenden Plücker'schen Oerter (§ 6.) eine specielle Lage einnehmen. Demgemäss dürfen wir die *Coincidenzen als ausgeartete Paare* ansehen.

Wir lassen jetzt die Beschreibung der Paare und ihrer Ausartungen mit Angabe der Symbole folgen, welche im Folgenden für die Grundbedingungen ihrer Plücker'schen Oerter gebraucht sind.

1) Das *Punktepaar*. Seine Constantenzahl ist 6. Seine Plücker'schen Oerter sind nicht bloss seine beiden Punkte c und d, sondern auch deren Verbindungsstrahl g. Die beiden Punkte seiner Coincidenz ε liegen wie zwei consecutive Punkte einer Curve, der Verbindungsstrahl wie die zugehörige Tangente. Da eine c angehörige Grundbedingung für ε identisch ist mit der gleichnamigen d angehörigen Grundbedingung, so soll, damit keiner der Buchstaben c und d bevorzugt erscheine, der Coincidenzpunkt von ε b heissen.

2) Das *Ebenenpaar* entspricht dem Punktepaar dualistisch.

3) Das *Strahlenpaar*. Seine Constantenzahl ist 8. Seine Plücker'schen Oerter sind nicht bloss seine beiden Strahlen g und h, sondern auch der Strahlenort zweiter Stufe (Congruenz), welcher von allen, g und h zugleich schneidenden Strahlen gebildet wird. Feldgrad und Bündelgrad dieses Ortes sind beide gleich 1. Die Büschelbedingung heisse β, die Strahlbedingung B (Bezeichnung von § 5.). Die beiden Strahlen der Coincidenz ε liegen wie zwei consecutive Strahlen einer Regelfläche. Der Coincidenzstrahl von ε heisse k. Das Strahlenpaar hat ausser der Coincidenz noch eine zweite Ausartung, nämlich das *Schneidepaar* σ. Bei ihm *schneiden sich* die Strahlen g und h, *ohne unendlich nahe zu sein*, wodurch die Constantenzahl 8 des nicht-ausgearteten Paares ebenfalls um 1 erniedrigt wird. Bei σ zerfällt der Strahlenort zweiter Stufe in das Strahlenfeld der den beiden Strahlen

g und h gemeinsamen Ebene μ, und den Strahlenbündel des ihnen gemeinsamen Punktes c.

4) *Das aus Punkt und Ebene bestehende Paar.* Seine Constantenzahl ist 6. Seine Plücker'schen Oerter sind nur sein Punkt c und seine Ebene μ.

5) *Das aus Punkt und Strahl bestehende Paar.* Seine Constantenzahl ist 7. Seine Plücker'schen Oerter sind nicht bloss sein Punkt c und sein Strahl g, sondern auch die beide enthaltende Ebene μ.

6) *Das aus Ebene und Strahl bestehende Paar* entspricht dem eben genannten Paare dualistisch.

Bei jeder Coincidenz fallen zwar, der Definition gemäss, die beiden das Paar erzeugenden Hauptelemente zusammen. Trotzdem aber ist der etwa ausserdem hinzukommende Plücker'sche Ort vollkommen bestimmt. Da jede Ausartung eines Gebildes eine um 1 kleinere Constantenzahl hat, als das Gebilde selbst, so enthält ein System a^{ter} Stufe von Paaren ein System $(a-1)^{\text{ter}}$ Stufe von Ausartungen. In eine für ein System a^{ter} Stufe aufgestellte Formel zwischen a-fachen Bedingungssymbolen können daher auch $(a-1)$-fache einer *Ausartung* angehörige Bedingungssymbole eintreten, da ja ein ausgeartetes Gebilde der Definition des Gebildes vollkommen genügt. Wir bezeichnen nun die Zahl der *Ausartungen* τ von bekannter Definition, welche die definirende Bedingung eines zu Grunde gelegten Systems a^{ter} Stufe und ausserdem eine $(a-1)$-fache Bedingung erfüllen, wie das *Product*, dessen einer Factor das Symbol dieser $(a-1)$-fachen Bedingung, und dessen anderer Factor das Symbol τ der Ausartung ist. Die Operation, welche in § 3. unter dem Namen der *symbolischen Multiplication* erläutert und im zweiten Abschnitt vielfach angewendet ist, lässt sich natürlich auch auf Formeln anwenden, welche Ausartungssymbole enthalten, d. h. es kann auch bei solchen Formeln jede Bedingung dem hinzuzudenkenden Systeme genommen und den a-fachen Symbolen resp. den $(a-1)$-fachen Ausartungssymbolen der Formel zugeschrieben werden. Namentlich kann also jede *allgemeingültige* Formel mit jedem *allgemeingültigen* Modul symbolisch multiplicirt werden, ohne dass die Allgemeingültigkeit der resultirenden Formel beeinträchtigt wird.

§ 15.

Die Correspondenzprincipien.

Das von Chasles 1864 aufgestellte *Correspondenzprincip* (Comptes rendus, Februar) hat seitdem nicht bloss viele Anwendungen, sondern auch *Erweiterungen* erfahren, und zwar in *zwei* Richtungen:

in der ersten Richtung durch Cayley und Brill (Cayley in den C. R. Bd. 62, p. 586 und in den Philos. trans. vol. 158, 1868)

(Brill in den Math. Ann. Bd. VI, p. 33, 1873 und Bd. VII, p. 607, 1874),

in der zweiten Richtung durch Salmon und Zeuthen (Salmon in d. Geom. of 3 dim. 1865, p. 511, und in der zweiten Auflage der Fiedler'schen Bearbeitung dieses Werkes, 2ter Theil, p. 556) (Zeuthen in den Comptes rendus, Juni 1874).

Ausserdem vergleiche man Lindemann's Vorlesungen von Clebsch, p. 210 und 388.

Im Folgenden sind nun die sämmtlichen *Correspondenzprobleme*, welche in der von *Salmon-Zeuthen* eingeschlagenen *Richtung* der Erweiterung des ursprünglichen Correspondenzprincips liegen, durch eine Untersuchung der Systeme *gelöst*, welche von jedem der 6 in § 14. beschriebenen Paare von Hauptelementen erzeugt werden. Dabei wird die Richtigkeit des der Algebra zu entlehnenden ursprünglichen Chasles'schen Correspondenzprincips vorausgesetzt, und vermittelst desselben für ein ganz beliebiges System erster Stufe von Paaren eine oder zwei Formeln erster Dimension aufgestellt, welche die Grundbedingungen des Paares mit der Anzahl der im Systeme vorhandenen Ausartungen verbindet. Geeignete symbolische Multiplicationen dieser Formel mit Grundbedingungen ergeben dann bei ausreichender Benutzung der grundlegenden Formeln des § 9. die sämmtlichen Correspondenzsätze der Salmon-Zeuthen'schen Erweiterung.

Wenn also zwischen zwei Hauptelementen eine gewisse *Correspondenz* stattfindet, so heisst dies *in unserer Betrachtungsweise* nichts anderes, als dass durch eine gewisse Bedingung, die *Correspondenzbedingung*, ein System a^{ter} Stufe definirt wird, dessen Element das von diesen beiden Hauptelementen erzeugte Paar ist. Die Correspondenzformeln sind nun Formeln, welche, für ein solches durch eine Correspondenzbedingung definirt gedachtes System a^{ter} Stufe aufgestellt, nichts anderes enthalten, als a-fache dem nicht-ausgearteten Paare angehörige Grundbedingungen, und $(a-1)$-fache den Ausartungen des Paares angehörige Grundbedingungen. Kann die einer Formel a^{ter} Dimension zu Grunde gelegte Correspondenzbedingung in zwei Bedingungen zerlegt werden, und zwar in die Bedingung, dass die beiden Hauptelemente *auf ein und demselben Grundgebilde* liegen sollen, und in eine andere Bedingung, die restirende Correspondenzbedingung, so heisst dieses Grundgebilde der *Träger* des von den beiden Hauptelementen gebildeten Paares, und die darauf bezügliche Bedingung die *Trägerbedingung*.

Das Punktepaar kann zum Träger haben:

1) die *Punktaxe*,
2) das *Punktfeld*,
3) den *Punktraum*.

Im ersten Falle ist die Träger-Bedingung gleichbedeutend damit, dass der Verbindungsstrahl g (§ 14.) die Strahlenbedingung G erfüllt, also vierfach.

Im zweiten Falle ist sie gleichbedeutend damit, dass der Verbindungsstrahl g die Feldbedingung g_* erfüllt, also zweifach.

Im dritten Falle ist sie selbstverständlich, d. h. nullfach.

Das Strahlenpaar kann zum Träger haben:

1) den *Strahlbüschel*,

2a) das *Strahlenfeld*, 2b) den *Strahlenbündel*,

3) die *Strahlenaxe*,

4) den *Strahlenraum*.

Im ersten Falle bedeutet die Trägerbedingung, dass das Strahlenpaar in ein Schneidepaar σ ausgeartet ist, und dass von diesem der Schnittpunkt c und die Schnittebene μ gegeben ist, d. h. dass es die sechsfache Bedingung $\mu^3 c^2 \sigma$ erfüllt.

Im zweiten Falle bedeutet die Trägerbedingung, dass das Strahlenpaar in ein Schneidepaar ausgeartet ist, welches die Bedingung μ^3 resp. c^3 erfüllt, ist also vierfach.

Im dritten Falle bedeutet die Trägerbedingung, dass der dem Strahlenpaare angehörige Strahlenort zweiter Stufe einen gegebenen Strahl besitzt, d. h. die Bedingung B erfüllt, ist also zweifach.

Im vierten Falle ist die Trägerbedingung selbstverständlich, d. h. nullfach.

Im Allgemeinen werden wir bei den Formeln dieses Abschnitts die Trägerbedingung aus dem Systeme in die Formel überschreiben, so dass als definirende Bedingung des Systems nur eine reine, keine Trägerbedingung mehr enthaltende Correspondenzbedingung übrig bleibt.

Demgemäss ist der *Inhalt des Chasles'schen Correspondenzprincips* (C. R. 1864) für ein auf einer Punktaxe liegendes Punktepaar durch folgende Formel dargestellt (vergl. die in § 14. erklärte Bezeichnung):

$$cG + dG = \varepsilon G.$$

Ein in einem Strahlenbüschel liegendes Strahlenpaar ist immer ein Schneidepaar σ. Dass dessen Schnittpunkt und Schnittebene festliegt, wird durch unser Symbol $\mu^3 c^2$ ausgedrückt. Daher ist das Chasles'sche Correspondenzprincip für ein in einem Strahlbüschel liegendes Strahlenpaar in folgender Formel enthalten:

$$g\mu^3 c^2 \sigma + h\mu^3 c^2 \sigma = \varepsilon \mu^3 c^2 \sigma.$$

Der Fall, dass der Träger des Punktepaares, Ebenenpaares, Strahlenpaares ein *Grundgebilde von höherer als der ersten Stufe ist*, d. h. dass die Trägerbedingung von kleinerer als der 4^{ten} resp. 6^{ten} Dimension ist, ergiebt die *Salmon-Zeuthen'sche Erweiterung des Correspondenzprincips*.

Herr Salmon hat den Fall, dass der Träger des Punktepaares ein *Punktfeld* ist, unter der Beschränkung, dass die Punkte des Punktepaars sich durch vollständige Schnitte bestimmen, *zum Theil erledigt* (vergl. die oben citirten Abh.). Herr Zeuthen hat

1) den Fall, dass der Träger des Punktepaars ein *Punktfeld* ist, und damit nach dem im Felde, im Raume und im Bündel geltenden Dualitätsprincip auch die Fälle, dass der Träger des Strahlenpaars ein *Strahlenfeld* ist, dass der Träger des Ebenenpaars ein *Ebenenbündel* ist, und dass der Träger des Strahlenpaars ein *Strahlenbündel* ist,

vollständig erledigt,

2) den Fall, dass das Punktepaar keinen Träger niederer Stufe als den Raum hat, und damit nach dem Dualitätsprincip auch den Fall, dass das Ebenenpaar nur den Raum zum Träger hat,

zum Theil erledigt.

In der folgenden Untersuchung würde also nicht bloss durch die Betrachtungsweise, sondern auch durch die Resultate neu sein:

1) die *vollständige* Erledigung der eben als *zum Theil* erledigt angegebenen Fälle,
2) die vollständige Erledigung der Fälle, wo der Träger eine *Strahlenaxe* ist, und wo der Träger der *Strahlenraum* ist.

Die Cayley-Brill'sche (vergl. die oben citirten Abh.) Erweiterung des Correspondenzprincips nimmt als Träger des Paares einen Ort, der im Allgemeinen *kein Grundgebilde* ist, und ist bis jetzt für den Fall des Punktorts erster Stufe behandelt. Für diese Erweiterung kann unsere Untersuchungsweise vor der Hand noch keine Resultate liefern.

Unter unsern Correspondenzformeln sind für Anwendungen besonders geeignet diejenigen, welche wir „*eigentliche*“ nennen wollen. So bezeichnen wir zunächst eine Correspondenzformel, wenn sie nur solche dem nicht-ausgearteten Paare angehörige Bedingungssymbole enthält, deren Factoren sich sämmtlich auf die beiden das Paar bildenden *Hauptelemente* beziehen, von deren Factoren also keiner eine Grundbedingung für den etwaigen *dritten* Plücker'schen Ort (§ 14.) ausspricht, und wenn die in der Formel enthaltenen Ausartungssymbole *nur Coincidenzsymbole* sind. „*Eigentlich*“ nennen wir dann auch solche Correspondenzformeln, welche aus einer Correspondenzformel von der eben angegebenen Beschaffenheit durch symbolische Multiplication mit einer auf jenen dritten Plücker'schen Ort bezüglichen Grundbedingung hervorgehen (vergl. die Formel in § 16. und 18.). Demnach sind die ursprünglichen Chasles'schen und die Salmon-Zeuthen'schen Correspondenzsätze als *eigentliche* zu bezeichnen.

Bei den Anwendungen des Chasles'schen Correspondenzprincips, abgekürzt „Corr.-Pr.“, wird es nur nöthig sein anzugeben:

1) das Grundgebilde, welches dem Paare als Träger dient;
2) die dem Punktepaar, Ebenenpaar oder Strahlenpaar auferlegte *Correspondenzbedingung*;
3) die *Correspondenzsumme*, das ist, die Summe der beiden von der Trägerbedingung freien Symbole, $c + d$ resp. $g + h$;
4) die *Coincidenzsumme*, das ist die Anzahl aller Coincidenzen.

§ 16.

Formeln für das Punktepaar.

Der erste Punkt des Paares sollte c, der zweite d, der Verbindungsstrahl g heissen. Demnach erhalten wir, nach den allgemeinen Regeln (§ 5.) für die Bezeichnung der Grundbedingungen der Hauptelemente, als *einzelne* Grundbedingungen des Paares nur folgende:

$$c,\ c^2,\ c^3;\quad d,\ d^2,\ d^3;$$

$$g,\ g_p,\ g_e,\ g_s,\ G;\quad g^2 = g_p + g_e;\quad g^3 = 2g_s;\quad g^4 = 2G\ (\S\ 8.);$$

ε bedeutet nicht bloss das *Gebilde*, welches aus zwei im Punkte b unendlich nahen Punkten c und d, und ihrem Verbindungsstrahle g besteht, sondern auch die *Anzahl* solcher Coincidenzen in einem Systeme erster Stufe; εz bedeutet, wenn z eine a-fache Bedingung ist, die *Anzahl* der Coincidenzen, welche diese erfüllen, und zugleich einem Systeme $(a+1)^{\text{ter}}$ Stufe von Punktepaaren angehören. Die ε angehörigen einzelnen Grundbedingungen sind also:

$$\varepsilon b,\ \varepsilon b^2,\ \varepsilon b^3;$$

$$\varepsilon g,\ \varepsilon g_p,\ \varepsilon g_e,\ \varepsilon g_s,\ \varepsilon G.$$

Wir setzen jetzt ein System *erster* Stufe voraus, welches durch eine ganz beliebige 5fache einzelne oder zusammengesetzte Bedingung definirt sei. Dann besteht zwischen den Zahlen c, d, g, ε immer eine Relation, welche wir durch Anwendung des *gewöhnlichen Corr.-Pr.* in folgender Weise erhalten:

Träger: Ebenenaxe.
Correspondenzbedingung: die eine Ebene soll den einen, die andere Ebene den andern Punkt eines der ∞^1 Punktepaare enthalten.
Correspondenzsumme: $c + d$,
Coincidenzsumme: $g + \varepsilon$.

Daher:

(1) $$c + d - g = \varepsilon\,. \qquad \text{(I)}$$

Durch sbl. Mult. mit der Trägerbedingung (§ 15.) G erhalten wir, da $gG = 0$ ist,

(2) $$G\,(c+d) = \varepsilon G, \qquad \text{(I)}$$

das ist das *Chasles'sche Princip für Punkte.*

Da die Formel (1) *allgemeingültig* ist, so liefert die symbolische Multiplication (§ 3., § 14.) derselben mit jeder Bedingung wieder eine allgemeingültige Formel. Um daher alle möglichen nur Grundbedingungen enthaltenden Formeln zweiter Dimension zu erhalten, müssen wir Formel (1) mit c, d, g multipliciren; um die 7 Formeln dritter Dimension zwischen Grundbedingungen zu erhalten, müssen wir mit c^2, cd, d^2, g_e, g_p, cg, dg sbl. multipliciren etc. Die Formeln gleicher Dimension dürfen dann noch mit Coefficienten multiplicirt und zu einander addirt werden (§ 3.). Von den so entstehenden Formeln heben wir nur diejenigen hervor, welche zur Ablesung von brauchbaren Correspondenzprincipien besonders geeignet sind. Wir benutzen bei ihrer Ableitung die in § 9. entwickelten Formeln, welche zwischen den Grundbedingungen eines Punktes c oder d und eines durch ihn gehenden Strahles g bestehen, also:

$$cg = g_e + c^2\,; \quad dg = g_e + d^2\,;$$

$$gg_p = gg_e = g_s = \tfrac{1}{2}\,g^3 = cg_p - c^3 = dg_p - d^3\,;$$

$$gg_s = g_pg_p = g_eg_e = g^2g_e = g^2g_p = G = \tfrac{1}{2}\,g^4 = c^2g_p - c^3g = d^2g_p - d^3g.$$

Durch sbl. Mult. von Formel (1) und Benutzung der eben erwähnten Formel: $cg = g_e + c^2 = g^2 - g_p + c^2$ erhält man:

$$c^2 + cd + d^2 - g_p = \varepsilon(g + b). \tag{3}$$ (II)

Diese Formel, mit der Trägerbedingung g_e (§ 15.) sbl. multiplicirt, ergiebt, da $g_eg_p = 0$ ist,

$$g_e(c^2 + cd + d^2) = \varepsilon g_e(g + b)\,, \tag{4}$$ (II)

das heisst, den Inhalt des Correspondenzprincips im *Punktfelde* (Zeuthen, C. R. Juni 1874).

Formel (1) ergiebt ferner durch sbl. Mult. mit c und Benutzung von $cg = g_e + c^2$:

$$cd - g_e = \varepsilon b, \tag{5}$$

eine Formel, welche auch durch das Pr. d. sp. Lage (§ 7.) zu erhalten ist, wenn man die Ebene von c mit der von d zusammenfallen lässt.

Von den Formeln dritter Dimension heben wir hier drei hervor.

Formel (3) giebt, mit c sbl. multiplicirt, und Benutzung von $cg_p = g_s + c^3$:

$$c^2d + cd^2 - g_s = \varepsilon b(g + b), \tag{6}$$

Formel (1) giebt, mit g_p sbl. multiplicirt, bei Benutzung von $cg_p = g_s + c^3$ und $dg_p = g_s + d^3$:

$$c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon g_p. \tag{7}$$

Die Addition von Formel (6) und (7) giebt:

$$c^3 + c^2d + cd^2 + d^3 = \varepsilon(g_p + bg + b^2)\,. \tag{8}$$ (III)

Diese Formel stellt den Inhalt des Correspondenzprincips im *Punktraume* dar.

Für ein System erster und zweiter Stufe kann es keine Formel geben, welche von Grundbedingungen, die sich auf den Verbindungsstrahl des nicht-ausgearteten Punktepaares beziehen, ganz frei wäre. Für ein System dritter Stufe giebt es eine solche Formel, nämlich Formel (8). Für Systeme höherer Stufe erhalten wir solche Formeln durch sbl. Mult. von Formel (8) mit c oder d, mit c^2, cd oder d^2, und endlich mit c^3, c^2d, cd^2 oder d^3. Der Versuch, derartige Formeln durch ein zweites Verfahren abzuleiten, nämlich durch aufeinanderfolgende Multiplicationen der linken Seite mit $c+d-\varepsilon$ und der rechten Seite mit dem nach Formel (1) dem $c+d-\varepsilon$ gleichen g, ergiebt links die nämlichen Resultate, als wenn wir bloss mit c, d etc. multiplicirten. Die rechten, die Ausartungssymbole enthaltenden Seiten der Formel werden bei dem zweiten Verfahren zwar anders, ergeben jedoch bei Ersetzung von g^2 durch g_p+g_e, von g_e durch $bg-b^2$, von g_s durch bg_p-b^3, von G durch $b^2g_p-b^3g$ dasselbe, wie bei Anwendung des ersten Verfahrens. Wir schreiben daher die Symbole der Coincidenz immer nur so, dass in ihnen von Grundbedingungen des Verbindungsstrahls nur die *wesentlichen* (§ 10. am Schluss) g und g_p vorkommen. Wir erhalten so nach einander:

$$c^3d+c^2d^2+cd^3=\varepsilon b\,(g_p+bg+b^2)\,; \tag{9}$$ (IV)

$$c^3d^2+c^2d^3=\varepsilon b^2(g_p+bg)\,; \tag{10}$$ (V)

$$c^3d^3=\varepsilon b^3g_p\,. \tag{11}$$ (VI)

Die eben angegebenen Formeln, oder auch schon die Formel (1) allein ergeben leicht die sämmtlichen Fundamentalzahlen (§ 6.) des Gebildes, welches wir Punktepaar genannt haben, wenn wir die Fundamentalzahlen der Coincidenz als bekannt voraussetzen. Letztere sind alle Null, mit Ausnahme von $\varepsilon b^3g_p=1$; $\varepsilon b^2g_s=1$; $\varepsilon bG=1$. Nun können aber auch die Fundamentalzahlen des nicht ausgearteten Punktepaars als bekannt angesehen werden, nämlich:

$$c^3d^3=1;\quad c^3d^2g=1;\quad c^2d^2g_p=1;\quad cd^2g_s=1;\quad cdG=1 \text{ etc.}$$

Daher können die obigen Formeln durch diese Zahlen *verificirt* werden, z. B.

Für das durch g_s definirte System ist:

$$c^3=0;\quad c^2d=1;\quad cd^2=1;\quad d^3=0;$$
$$\varepsilon g_p=0;\quad \varepsilon bg=1;\quad \varepsilon b^2=1.$$

Wir erwähnen dies hier namentlich desshalb, weil bei dem nicht-ausgearteten Strahlenpaare die analogen Formeln die *noch nicht bekannten Fundamentalzahlen der linearen Congruenz* ergeben werden, d. h. des

Gebildes, welches durch einen Strahlenort zweiter Stufe mit dem Bündelgrad 1 und dem Feldgrad 1 erzeugt wird.

§ 17.

Die Ablesung der in Worten ausgesprochenen Correspondenzsätze aus den eigentlichen Correspondenzformeln.

Die durch Chasles und Salmon-Zeuthen ausgesprochenen Correspondenzformeln sind sämmtlich solche, welche wir (§ 15.) *eigentliche* nennen wollten, d. h. ihre *Correspondenzsumme* enthält nur Grundbedingungen, welche sich auf die beiden durch die Correspondenz verbundenen *Hauptelemente* beziehen, nicht aber solche, welche sich auf den dritten Plücker'schen Ort — hier den Verbindungsstrahl der beiden Punkte — beziehen. Daher werden wir auch hier von den in § 16. abgeleiteten Correspondenzformeln besonders die eigentlichen, dort mit den römischen Nummern I bis VI bezeichneten hervorheben. Die *Uebersetzung der* auf den *linken* Seiten unserer Formeln stehenden *Symbole* in Worte ist ohne Weiteres klar, z. B. cd^2 kann auf dreierlei Weise übersetzt werden:

1) cd^2 ist die Anzahl der Paare sich entsprechender Punkte, von denen der erste in einer beliebigen Ebene, der zweite in einer beliebigen Geraden liegt;
2) cd^2 ist die Ordnung der Fläche aller derjenigen Punkte der zweiten Sorte, welche den sämmtlichen, als Punkte der ersten Sorte aufgefassten Punkten einer beliebigen Ebene entsprechen;
3) cd^2 ist die Ordnung der Curve aller derjenigen Punkte der ersten Sorte, welche den sämmtlichen, als Punkte der zweiten Sorte aufgefassten Punkten einer beliebigen Geraden entsprechen.

Wir gehen nun zur *Uebersetzung der Coincidenzsymbole* über. Diese waren, da von den Grundbedingungen des Strahls g alle übrigen durch g und g_p ersetzt werden konnten:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon, & \varepsilon b, & \varepsilon b^2, & \varepsilon b^3; \\ \varepsilon g, & \varepsilon bg, & \varepsilon b^2 g, & \varepsilon b^3 g; \\ \varepsilon g_p, & \varepsilon b g_p, & \varepsilon b^2 g_p, & \varepsilon b^3 g_p. \end{array}$$

Jedes dieser Symbole stellt natürlich eine nicht nothwendig von Null verschiedene endliche Anzahl dar, und zwar die Anzahl derjenigen Coincidenzgebilde, welche die beigesetzte a-fache Bedingung und die hinzuzudenkende $(5-a)$fache Correspondenzbedingung erfüllen. Ist nun eine Coincidenz im Punkte b so beschaffen, dass δ nicht nothwendig von einander verschiedene durch b gelegte Strahlen als Verbindungsstrahlen der beiden in b vereinigt gedachten Punkte aufgefasst werden müssen, so ist *eine solche Coincidenz δ-fach, und für die Be-*

stimmung von ε auch δ-fach zu zählen. Die Bestimmung dieser Vielfachheit einer Coincidenzstelle bleibt in jedem einzelnen Falle der Anwendungen einer besonders anzustellenden Untersuchung überlassen, deren Charakter dem Charakter der gegenwärtigen Untersuchung fremd ist.

Das Symbol εg würde erfüllt werden können:

erstens von allen denjenigen unter ∞^1 Coincidenzstellen, welche ihren Verbindungsstrahl durch die Axe der Axenbedingung g schicken, d. h. εg ist der Grad der Regelfläche, welche von den sämmtlichen ∞^1 den ∞^1 Coincidenzstellen angehörigen Verbindungsstrahlen erzeugt wird,

zweitens aber auch von jeder einzelnen Coincidenzstelle, bei welcher nicht endlich viele, sondern ∞^1 *Strahlen als Verbindungsstrahlen* aufgefasst werden müssen, und zwar von jeder solchen Coincidenzstelle δ mal, wenn von deren ∞^1 Verbindungsstrahlen δ eine beliebige Axe schneiden können, d. h. wenn die Verbindungsstrahlen *einen Kegel δ^{ten} Ranges bilden, der die Coincidenzstelle zum Scheitel hat.*

Analog kann *das Symbol εg_p von drei Arten von Coincidenzen* erfüllt werden.

Dies führt zu einer Eintheilung der Coincidenzen in *Gattungen*, gemäss der folgenden Definition:

„Fallen die beiden Punkte c und d eines Punktepaares mit dem Verbindungsstrahle g derartig in einen Punkt b, dass als Verbindungsstrahl der beiden in b fallenden Punkte c und d jeder Strahl eines im Bündel b liegenden Strahlenortes $(\alpha-1)^{ter}$ Stufe und δ^{ten} Grades aufgefasst werden kann, so soll die in b befindliche Coincidenz δ-fach und α^{ter} Gattung oder $(\alpha-1)$-stufig heissen.“

Mit andern Worten und *speciell:*

1) Eine δ-fache Coincidenz *erster Gattung* besitzt δ Verbindungsstrahlen, welche übrigens auch zusammenfallen können;
2) eine δ-fache Coincidenz *zweiter Gattung* ist im Stande, die Axenbedingung g des Verbindungsstrahls δ mal von selbst zu erfüllen;
3) eine δ-fache Coincidenz *dritter Gattung* ist im Stande, die Bedingung g_p δ mal von selbst zu erfüllen.

Daraus folgt, dass die Constantenzahl einer Coincidenz
erster Gattung gleich 5 ist,
zweiter Gattung gleich 4 ist,
dritter Gattung gleich 3 ist.

Eine Coincidenz von höherer als der dritten Gattung ist desshalb nicht möglich, weil der Punkt schon die Constantenzahl 3 hat.

Ueberhaupt ist, wenn wir diese Begriffe auf *Paare beliebiger Gebilde* von gleicher Definition übertragen, die Coincidenz eines Paares

höchstens sovielter Gattung, als die Constantenzahl jedes der beiden das Paar constituirenden Gebilde angiebt.

Da die Constantenzahl einer Coincidenz α^{ter} Gattung um α kleiner ist, als die des nicht-ausgearteten Paares, so bilden die Coincidenzen, welche in einem Systeme p^{ter} Stufe von Paaren enthalten sind, d. h. hier, welche einer $(6-p)$-fachen Correspondenzbedingung genügen, ein System $(p-\alpha)^{\text{ter}}$ Stufe.

Z. B. das durch eine Correspondenzbedingung dritter Stufe im Punktraume definirte System dritter Stufe von Punktepaaren enthält:

1) eine endliche Anzahl von Coincidenzen dritter Gattung (*points isolés* bei Zeuthen, C. R. Juni 1874),
2) ∞^1 Coincidenzen zweiter Gattung, deren Punkte also eine Curve bilden, und deren Verbindungsstrahlen eine Congruenz, oder genauer, die $\infty^1 \cdot \infty^1$ Erzeugenden eines Systems von Kegeln bilden,
3) ∞^2 Coincidenzen erster Gattung, deren Punkte also eine Fläche und deren Verbindungsstrahlen eine Congruenz bilden.

Im speciellen Falle kann der *Strahlenkegel* δ^{ten} Grades einer Coincidenz zweiter Gattung ein δ-facher *Strahlbüschel* sein.

Nach diesen Bemerkungen ist die Zerlegung der obigen 12 Coincidenzsymbole in Summanden, deren jeder sich auf eine Coincidenz erster, zweiter oder dritter Gattung bezieht, leicht zu bewerkstelligen.

Nämlich:

$$b^n \varepsilon = b^n \varepsilon_1, \tag{1}$$

wo das Symbol $b^n \varepsilon_1$ angiebt, wieviel Coincidenzen *erster* Gattung ihren Coincidenzpunkt zugleich auf n gegebenen Ebenen haben, jede Coincidenz so oft gerechnet, als ihre Vielfachheit anzeigt.

$$g b^n \varepsilon = b^n \varepsilon_2 + b^n u \varepsilon_1, \tag{2}$$

wo *erstens* das Symbol $b^n \varepsilon_2$ angiebt, wieviel Coincidenzen *zweiter* Gattung ihren Coincidenzpunkt zugleich auf n gegebenen Ebenen haben, jede so oft gerechnet, als ihre Vielfachheit anzeigt, d. h. hier, als der Grad ihres Verbindungsstrahlen-Kegels anzeigt,

und wo *zweitens* das Symbol $b^n u \varepsilon_1$ angiebt, von wieviel Coincidenzen *erster* Gattung jede ihren Coincidenzpunkt zugleich auf n gegebenen Ebenen besitzt, während einer ihrer Verbindungsstrahlen einen gegebenen Strahl schneidet.

$$g_p b^n \varepsilon = b^n \varepsilon_3 + b^n w \varepsilon_2 + b^n v \varepsilon_1, \tag{3}$$

wo *erstens* das Symbol $b^n \varepsilon_3$ die Zahl der Coincidenzen *dritter* Gattung ist, welche ihren Coincidenzpunkt auf n gegebenen Ebenen haben, jede so oft gerechnet, als ihre Vielfachheit anzeigt, d. h. hier, so oft als jeder beliebige Strahl durch den Coincidenzpunkt als Verbindungsstrahl aufgefasst werden muss,

wo *zweitens* das Symbol $b^n w \varepsilon_2$ angiebt, von wieviel Coincidenzen *zweiter* Gattung jede ihren Coincidenzpunkt zugleich auf n gegebenen Ebenen hat, während einer ihrer Verbindungsstrahlen durch einen gegebenen Punkt geht, d. h. hier während die Fläche des ihr zugehörigen Verbindungsstrahlen-Kegels durch einen gegebenen Punkt geht,

und wo *drittens* das Symbol $b^n v \varepsilon_1$ angiebt, von wieviel Coincidenzen *erster* Gattung jede ihren Coincidenzpunkt auf n gegebenen Ebenen hat, während zugleich einer ihrer Verbindungsstrahlen durch einen gegebenen Punkt geht.

Analog ist die Deutung der Symbole $g_e b^n \varepsilon$, $g_s b^n \varepsilon$, $G b \varepsilon$. Dieselben können wegen der Formeln, welche g_e, g_s, G durch g und g_p ausdrücken, immer auf die eben eingeführten Symbole zurückgeführt werden.

Z. B. $$g_e \varepsilon = (bu - b^2)\varepsilon_1 + b\varepsilon_2.$$

Wir führen jetzt die neu eingeführten, auf die Coincidenzen verschiedener Gattungen bezüglichen Symbole:

$$b^n \varepsilon_1, \quad b^n \varepsilon_2, \; b^n \varepsilon_3,$$
$$b^n u \varepsilon_1, \; b^n w \varepsilon_2,$$
$$b^n v \varepsilon_1,$$

in unsere Correspondenzformeln (I) bis (III) ein,

(I) $$c + d - g = \varepsilon_1;$$

(II) $$c^2 + cd + d^2 - g_p = \varepsilon_2 + u\varepsilon_1 + b\varepsilon_1;$$

(III) $$c^3 + c^2 d + cd^2 + d^3 = \varepsilon_3 + w\varepsilon_2 + b\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 + bu\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_1.$$

Wir fügen diesen Formeln noch diejenige hinzu, welche aus der eleganten Formel (7) in § 16. hervorgeht:

$$c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon_3 + w\varepsilon_2 + v\varepsilon_1.$$

Die mit G multiplicirte Formel (I) ist das Chasles'sche Correspondenzprincip. Die mit g_e multiplicirte Formel (II) ist zuerst mit Vernachlässigung des zweiten und dritten Gliedes der rechten Seite von Salmon, dann mit Berücksichtigung dieser Glieder von Zeuthen ausgesprochen. Die Formel (III) ist, jedoch mit Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der rechten Seite, von Zeuthen ausgesprochen (siehe die Citate in § 15.). Alles übrige, namentlich aber die Art der Entwickelung aller Resultate, ist *neu*. Diese Entwickelung zeigt deutlich, dass, bei Voraussetzung der fundamentalen Formeln des § 9., und unter Anwendung der symbolischen Multiplication, *alle* in der Richtung der Salmon-Zeuthen'schen Erweiterung liegenden *Correspondenzsätze nur Umformungen des ursprünglichen Correspondenzprincips Chasles'* sind; was vielleicht auch schon aus der Natur der Beweise Zeuthen's für seine Correspondenzsätze vermuthet werden konnte.

Es wäre sehr weitschweifig, wenn man bei dem Ausspruche unserer Correspondenzformeln in Worten immer die Eintheilung der Coincidenzen in Gattungen mit berücksichtigen wollte. Nach den vorangehenden Bemerkungen ist vielmehr hinreichend verdeutlicht, wie die Zahl aller Coincidenzen, welche eine Verbindungsgerade durch eine gegebene Axe schicken, sich im Allgemeinen aus *zwei* Summanden zusammensetzt, und wie die Zahl aller Coincidenzen, welche ihre Verbindungsgerade durch einen gegebenen Punkt schicken, sich im Allgemeinen aus *drei* Summanden zusammensetzt.

Wir können daher wohl das in Formel (III) des § 16. oder § 17. steckende Correspondenzprincip im Punktraume kurz in folgender Form aussprechen:

„*Wenn vermöge einer dreifachen Correspondenzbedingung*

einem Punkte C resp. D des Raums c^3 *Punkte D resp.* d^3 *Punkte C entsprechen,*

und den sämmtlichen Punkten C resp. D einer Geraden ∞^1 *Punkte D resp. C entsprechen, welche eine Curve von der Ordnung* c^2d *resp.* cd^2 *bilden,*

wenn ferner die Zahl

εg_p *angiebt, wieviel Punkte im Raume liegen, in denen zwei Punkte C und D derartig zusammenfallen können, dass ihre Verbindungsgerade durch einen gegebenen Punkt geht,*

εbg *angiebt, wieviel Punkte in einer Ebene liegen, in denen zwei Punkte C und D derartig zusammenfallen können, dass ihre Verbindungsgerade eine gegebene Gerade schneidet,*

εb^2 *angiebt, wieviel Punkte in einer Geraden liegen, in denen zwei Punkte C und D zusammenfallen, jeder der Coincidenzpunkte jedoch so oft gerechnet, als ihm Verbindungsgeraden der beiden zusammengefallenen Punkte angehören,*

so besteht zwischen diesen 7 Zahlen die Relation, dass die Summe der vier ersten gleich der Summe der drei letzten ist, also:

$$c^3 + c^2d + cd^2 + d^3 = \varepsilon g_p + \varepsilon bg + \varepsilon b^2.“$$

Wir fügen noch die Uebersetzung der, wenn auch nicht „eigentlichen,“ so doch durch ihre Einfachheit brauchbaren Formel (7) des § 16. hinzu:

„*Besteht zwischen den Punkten des Raums eine Correspondenz derartig, dass einem Punkte C* c^3 *Punkte D, und umgekehrt einem Punkte D* d^3 *Punkte C entsprechen, und ist* g_1 *der Grad des Complexes* (Strahlenorts dritter Stufe) *der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, so ist die Summe dieser drei Zahlen gleich der Anzahl derjenigen Punkte des Raums, in denen zwei Punkte C und D derartig zusammenfallen können, dass ihre Verbindungsgerade durch einen gegebenen Punkt geht.*“

Hinsichtlich der Uebersetzung unserer Formeln in Worte mag nur noch Folgendes bemerkt werden. Die Formel (1) in § 16. bezieht sich auf den Fall, wo nicht jeder Punkt des Raums, sondern nur jeder Punkt einer Curve von der Ordnung c einen entsprechenden Punkt besitzt; die Formel (3) bezieht sich auf den Fall, wo die Punkte, welche entsprechende besitzen, eine Fläche von der Ordnung c^2 bilden. Die Formel (III) bezieht sich auf den Fall, wo jedem Punkte des Raums eine endliche Anzahl c^3 von Punkten entspricht. Die Formel (IV) erledigt den Fall, wo jedem Punkte ∞^1 Punkte entsprechen, die eine Curve von der Ordnung $c^3 d$ bilden. Die Formel (V) erledigt den Fall, wo jedem Punkte ∞^2 Punkte entsprechen, die eine Fläche von der Ordnung $c^3 d^2$ bilden. Die Formel (VI) bezieht sich auf den Fall, wo jedem Punkte des Raums jeder Punkt des Raums entspricht, also auch in jedem eine Coincidenz stattfindet, giebt also nur *Selbstverständliches*. Die mit der Trägerbedingung g_e sbl. multiplicirte Formel (II) hängt mit der Formel (IV) dadurch zusammen, dass nach Formel (5) in § 16.:

$$g_e = cd - \varepsilon b$$

ist. Die Formel, welche entsteht, wenn man diese mit $cd = g_e + \varepsilon b$ sbl. multiplicirt und εg_e durch $\varepsilon b g - \varepsilon b^2$ ersetzt, d. h. die Formel

$$G = c^2 d^2 - \varepsilon b^3 g$$

vermittelt ebenso den Zusammenhang zwischen der mit G sbl. multiplicirten Formel (I) einerseits und der Formel (V) andererseits. (Man vergleiche Nr. 4 von Zeuthen's Abhandlung in den Comptes rendus, Juni 1874.)

Wir bemerken an dieser Stelle noch einmal, dass die vorliegende Untersuchung ihrer Natur nach der von Cayley und Brill (siehe die Citate in § 15.) gegebenen Ausdehnung des Corr.-Pr. auf *Plancurven* fern steht. Zwar können wir unsere Formel (I) auf das System erster Stufe der Punktepaare anwenden, welches durch eine auf einer Plancurve n^{ter} Ordnung gelegene Correspondenz (α, α') definirt wird. Wir haben dann $c = n \cdot \alpha$, $d = n \cdot \alpha'$ zu setzen. Wir können jedoch dadurch nichts anderes erhalten, als das auch unmittelbar ersichtliche Resultat, dass die Anzahl ε der Coincidenzen gleich

$$n(\alpha + \alpha') - g$$

ist, wo g angiebt, wieviel von den ∞^1 Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen Punkt der Ebene gehen.

Beispiele zu unsern Correspondenzformeln folgen erst in § 26., § 27. und § 28., nachdem wir auch die übrigen Paare von Hauptelementen, analog wie das Punktepaar, behandelt haben werden.

Die dualistische Uebertragung aller unserer Betrachtungen und Resultate ergiebt die analoge Behandlung des Ebenenpaars.

§ 18.

Formeln zwischen den Grundbedingungen des Strahlenpaares und denen seiner beiden Ausartungen*).

Das Strahlenpaar und seine beiden Ausartungen, die Coincidenz ε und das Schneidepaar σ sind schon in § 15., Nr. 3 definirt. Dort sind auch die Symbole für die Grundbedingungen angegeben. Wir erhalten demgemäss folgende einzelne Grundbedingungen:

1) beim allgemeinen Strahlenpaare:

$$g,\ g_p,\ g_e,\ g_s,\ G;\quad h,\ h_p,\ h_e,\ h_s,\ H;\quad \beta,\ B;$$

2) bei der Coincidenz ε:

$$k,\ k_p,\ k_e,\ k_s,\ K;\quad \beta,\ B;$$

3) bei dem Schneidepaar σ:

$$g,\ g_p,\ g_e,\ g_s,\ G;\quad h,\ h_p,\ h_e,\ h_s,\ H;\quad \beta,\ B;\quad \mu,\ \mu^2,\ \mu^3;\quad c,\ c^2,\ c^3.$$

Unter diesen bestehen nach den Grundformeln des § 9. und § 10. gewisse Relationen, welche wir hier folgen lassen.

Nach der allgemeinen Formel (IV) des § 10. lässt sich B, die Strahlbedingung des Strahlenorts zweiter Stufe, welcher von allen g und h schneidenden Strahlen erzeugt wird, und welcher, da er den Bündelgrad 1 und den Feldgrad 1 hat, *„lineare Congruenz"* heissen soll, durch β, die Büschelbedingung dieses Orts und die Grundbedingungen einer der beiden erzeugenden Axen ausdrücken, nämlich:

(1) $$B = \beta g - 1 \cdot g_p - 1 \cdot g_e = \beta g - g^2.$$ (Fall 13 in § 10.)

Ebenso:

(2) $$B = \beta h - h^2.$$

Diese Formeln gelten natürlich auch für jede der beiden Ausartungen, da die Definition dieser in der Definition des allgemeinen Strahlenpaares mit enthalten ist. Also:

(3) $$B\varepsilon = \beta k\varepsilon - k^2\varepsilon,$$

(4) $$B\sigma = \beta g\sigma - g^2\sigma,$$

(5) $$B\sigma = \beta h\sigma - h^2\sigma.$$

Da bei dem Schneidepaar g und h Strahlen eines Strahlbüschels sind, dessen Ebene μ und dessen Scheitel c ist, so lassen sich nach Formel (I) und (II) des § 9., bei dem Schneidepaar alle übrigen auf g und h bezüglichen Grundbedingungen durch die Axenbedingungen g und h und die Grundbedingungen von c und μ ausdrücken. Also:

---

*) Die hier gegebenen Bezeichnungen gelten auch in § 19., 20., 21. Ebenso gehen die Formelnummern in diesen §§ weiter.

(6) $g_p\sigma = \mu g\sigma - \mu^2\sigma$,

(7) $h_p\sigma = \mu h\sigma - \mu^2\sigma$,

(8) $g_c\sigma = cg\sigma - c^2\sigma$,

(9) $h_c\sigma = ch\sigma - c^2\sigma$,

(10) $g_\gamma\sigma = \mu cg\sigma - \mu^3\sigma - \mu c^2\sigma = \mu cg\sigma - c^3\sigma - \mu^2 c\sigma$,

(11) $h_\gamma\sigma = \mu ch\sigma - \mu^3\sigma - \mu c^2\sigma = \mu ch\sigma - c^3\sigma - \mu^2 c\sigma$,

(12) $G\sigma = (\mu^2 c - \mu^3)g\sigma - \mu^2 c^2\sigma = (\mu c^2 - c^3)g\sigma - \mu^2 c^2\sigma$,

(13) $H\sigma = (\mu^2 c - \mu^3)h\sigma - \mu^2 c^2\sigma = (\mu c^2 - c^3)h\sigma - \mu^2 c^2\sigma$.

Soll das Schneidepaar die Bedingung β erfüllen, so kann dies entweder dadurch geschehen, dass seine Ebene μ durch den Scheitel des Büschels von β geht, oder dass sein Punkt c in der Ebene des Büschels von β liegt, da ja die dem Schneidepaar angehörige lineare Congruenz von dem Strahlenfelde der Ebene μ und von dem Strahlenbündel des Punktes c gebildet wird. Also nach dem Gesetz der Spaltung:

(14) $$\beta\sigma = \mu\sigma + c\sigma .$$

Daraus folgt mit Benutzung von Formel (4) und (5) die auch direct geometrisch leicht abzuleitende Formel:

(15) $$B\sigma = \mu^2\sigma + c^2\sigma .$$

Die bisher mitgetheilten Formeln waren nur Anwendungen der allgemeinen Grundformeln, welche sich auf die Lage der Hauptelemente und Oerter in Grundgebilden beziehen. Die eigentliche Untersuchung des Strahlenpaars beginnt erst mit der Ableitung von Formeln für ein System erster Stufe vermittelst des Corr.-Pr.

Wir setzen zu diesem Zwecke ein durch eine *ganz beliebige* 7fache Bedingung definirtes System erster Stufe von Strahlenpaaren voraus, und wenden nun auf dasselbe das Chasles'sche Corr.-Pr. in folgender Weise an:

Träger: Strahlbüschel,

Correspondenzbedingung: der eine Strahl soll Axe für den einen, der andere Strahl soll Axe für den andern Strahl eines der ∞^1 Strahlenpaare sein,

Correspondenzsumme $g + h$,

Coincidenzsumme: $\beta + \varepsilon$.

Daher:

(16) $$g + h - \beta = \varepsilon .$$ (I)

Um auch die Zahl σ mit den einfachen Grundbedingungen g, h, β in Beziehung zu setzen, wenden wir am besten die, in § 17. auch in Worten ausgesprochene, Formel (7) des § 16. auf das System dritter Stufe derjenigen Punktepaare an, welche durch jeden Punkt eines Strahls g und jeden Punkt des zugehörigen Strahls h gebildet werden.

Für dieses ist das c^3 und das d^3 des § 16. gleich Null, das g_s gleich β, das εg_p gleich $\varepsilon + \sigma$, da durch einen gegebenen Punkt zu jeder Coincidenz ein Strahl möglich ist, der die beiden in ihr zusammenfallenden Strahlen schneidet, und auch zu jedem Schneidepaar ein Strahl möglich ist, der zwei zusammenfallende Punkte des Punktepaar-Systems enthält, nämlich der Strahl, welcher zu dem Schnittpunkt der beiden Strahlen des Schneidepaars geht. Also:

$$\beta = \sigma + \varepsilon. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt durch Elimination von β resp. ε:

$$g + h = \sigma + 2\varepsilon, \tag{18}$$

$$2\beta - (g+h) = \sigma. \tag{19}$$

Diese Formeln, welche ganz *allgemeingültig* sind, werden wir nun, ebenso wie die Formeln bei Punktepaaren, mit allen möglichen Grundbedingungen symbolisch multipliciren dürfen, ohne dass dadurch die Allgemeingültigkeit der resultirenden Formeln beeinträchtigt würde. Ehe wir dies jedoch behufs Auffindung von Formeln höherer Dimension thun, leiten wir noch durch das Pr. d. sp. Lage zwei wichtige Formeln zweiter Dimension ab. Lässt man nämlich die Ebene des Büschels einer Bedingung β mit der Ebene des Büschels einer anderen Bedingung β zusammenfallen, so erhält man sehr leicht durch das Pr. d. sp. L.:

$$\beta^2 = B + g_e + h_e + c\sigma, \tag{20}$$

und durch das dualistisch entsprechende Verfahren:

$$\beta^2 = B + g_p + h_p + \mu\sigma. \tag{21}$$

Durch Elimination von β^2 aus jeder dieser Formeln und der mit β sbl. multiplicirten Formel (17) erhält man, nachdem man $\beta\sigma$ nach Formel (14) durch $\mu\sigma + c\sigma$ ersetzt hat, und $c\sigma$ resp. $\mu\sigma$ gehoben hat:

$$\mu\sigma = B + g_e + h_e - \beta\varepsilon, \tag{22}$$

$$c\sigma = B + g_p + h_p - \beta\varepsilon. \tag{23}$$

Ferner folgt durch sbl. Mult. der Formel (16) mit g oder h, und Einführung des Symbols B durch Formel (1) oder (2):

$$B = gh - k\varepsilon, \tag{24}$$

eine Formel, welche auch durch das Pr. d. sp. Lage sich ergiebt, wenn man die Axe der Bedingung g mit der von h zusammenfallen lässt, und welche analog der Formel (5) in § 16. ist. Setzt man nun den Werth von B aus (24) in (22) und (23) ein, so kommt:

$$g_e + gh + h_e - \mu\sigma = k\varepsilon + \beta\varepsilon, \tag{25}$$ (II)

$$g_p + gh + h_p - c\sigma = k\varepsilon + \beta\varepsilon. \tag{26}$$ (II')

Aus diesen beiden Formeln werden sich die Correspondenzprincipien im *Strahlenfelde* und im *Strahlenbündel* ergeben. Um andere brauchbare Correspondenzformeln zu erhalten, streben wir nun darnach, bei weiteren symbolischen Multiplicationen die dem nicht-ausgearteten Paare angehörige Grundbedingung β immer aus den Formeln zu entfernen, und ebenso alle dem Schneidepaar angehörigen Symbole *möglichst* fern zu halten, jedenfalls aber von solchen Symbolen nur diejenigen zuzulassen, welche von der Form

$$\mu^m c^n \sigma$$

sind. Um diesen Zweck zu erreichen, leiten wir eine allgemeine Formel ab, welche nur die Producte der Potenzen von g und h, die Symbole $\mu^m c^n \sigma$ und die Symbole $\varepsilon k^a \beta^b$ enthält. Man multiplicire die Hauptformel (16) mit dem Resultate der Division von

$$(g+h)^n - \beta^n \text{ durch } (g+h) - \beta.$$

Dann erhält man:

$$(g+h)^n - \beta^n = \varepsilon\,[\beta^{n-1} + 2^1 k \beta^{n-2} + 2^2 k^2 \beta^{n-3} + \cdots 2^{n-1} k^{n-1}].$$

Dann addire man zu dieser Gleichung die mit β^{n-1} symbolisch multiplicirte Gleichung (17). Dann erhält man:

$$(g+h)^n = \beta^{n-1}\sigma + \beta^{n-1}\varepsilon + \varepsilon\,[\beta^{n-1} + 2^1 k \beta^{n-2} + \cdots 2^{n-1} k^{n-1}].$$

Da aber nach Formel (14):

$$\beta^{n-1}\sigma = (\mu + c)^{n-1}\sigma$$

ist, so erhält man durch Einführung von $(\mu + c)^{n-1}\sigma$ statt $\beta^{n-1}\sigma$ die gesuchte allgemeine Formel:

$$(27)\quad (g+h)^n - (\mu+c)^{n-1}\sigma = \varepsilon\,[2\beta^{n-1} + 2k\beta^{n-2} + 2^2 k^2 \beta^{n-3} + \cdots 2^{n-1} k^{n-1}].$$

Gelingt es nun, einige oder alle in dieser Formel enthaltenen Symbole von der Form $\mu^a c^b \sigma$ noch auf andere Weise durch die Producte der Potenzen von g und h und durch die ε zugehörigen Symbole auszudrücken, so würde man durch Einführung der so erhaltenen Ausdrücke Correspondenzformeln von der *wünschenswerthesten* Gestalt erhalten. Wir suchen daher jetzt die Symbole $\mu^a c^b \sigma$ so wie eben gesagt ist, auszudrücken.

Zunächst ist nach Formel (18), (25), (26):

$$\begin{aligned} \sigma &= g + h - 2\varepsilon, \\ \mu\sigma &= g_e + gh + h_e - \varepsilon(\beta + k), \\ c\sigma &= g_p + gh + h_p - \varepsilon(\beta + k). \end{aligned}$$

Multipliciren wir nun die beiden letzten Formeln mit g und subtrahiren von der erhaltenen Gleichung die mit g_p resp. g_e multiplicirte erste Formel für σ, so erhalten wir, da nach (6) und (8)

$$\mu g\sigma - g_p\sigma = \mu^2\sigma$$

und

$$cg\sigma - g_e\sigma = c^2\sigma$$

ist,

(28) $$\mu^2\sigma = gh_e + g_e h - \varepsilon\,[k_e - k_p + \beta k]\,,$$

(29) $$c^2\sigma = gh_p - g_p h - \varepsilon\,[k_p - k_e + \beta k]\,.$$

Eine Formel für $\mu c\sigma$ aber kann auf ähnlichem Wege nicht erhalten werden, da sich $\mu c\sigma$ nicht durch $\mu g\sigma$, $cg\sigma$, $g_p\sigma$, $g_e\sigma$ ausdrücken lässt. Daher lässt sich aus der für $n = 3$ specialisirten Formel (27) $\mu^2\sigma$ und $c^2\sigma$ durch (28) und (29) entfernen, nicht aber $\mu c\sigma$. Wir erhalten so:

$$(g+h)^3 - (gh^2 + g^2h) + 2\varepsilon\beta k - 2\mu c\sigma = \varepsilon\,[2\beta^2 + 4\beta k + 4k^2],$$

oder, nach Vereinfachung dieser Gleichung und Division durch 2:

(30) $$\mu c\sigma = g_s + g^2h + gh^2 + h_s - \varepsilon\,[\beta^2 + 2k^2].$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die Summe der durch 2 dividirten Gleichungen (28) und (29), so kommt:

$$\mu c\sigma - \tfrac{1}{2}\mu^2\sigma - \tfrac{1}{2}c^2\sigma = g_s + \tfrac{1}{2}g^2h + \tfrac{1}{2}gh^2 + h_s - \varepsilon\,[\beta^2 - \beta k + 2k^2],$$

oder:

(31) $$g_s + \tfrac{1}{2}g^2h + \tfrac{1}{2}gh^2 + h_s + \tfrac{1}{2}(\mu - c)^2\sigma = \varepsilon[\beta^2 - \beta k + 2k^2]\,.$$ (III)

Diese Formel enthält das Correspondenzprincip in der Strahlenaxe.

Da die Symbole $\mu^a c^b$, wo $a + b \gtrless 3$ ist, sich durch die, wo $a + b < 3$ ist, und durch die Grundbedingungen von g ausdrücken lassen, so erhält man jetzt auf leichte Weise Formeln für diese Symbole, indem man die Formeln (18), (22), (23), (28), (29), (30) mit g, g_p, g_e, g_s, G symbolisch multiplicirt und die erhaltenen Gleichungen passend verbindet. Z. B. folgt eine Formel für $\mu^3\sigma$ durch Subtraction der mit g_p multiplicirten Formel (22) von der mit g multiplicirten Formel (28), da

$$\mu^3\sigma = \mu^2 g\sigma - \mu g_p\sigma$$

ist. Es ergiebt sich so oder durch Benutzung von

$$\mu^3\sigma = \mu g_e\sigma - g_s\sigma$$

die folgende Formel für $\mu^3\sigma$:

(32) $$\mu^3\sigma = g_e h_e - \varepsilon\,(\beta k_e - k_s)\,.$$

Ebenso folgt aus $c^3\sigma = c^2 g\sigma - cg_e\sigma = cg_p\sigma - g_s\sigma$ auf zweifache Weise:

(33) $$c^3\sigma = g_p h_p - \varepsilon\,(\beta k_p - k_s)\,.$$

Ebenso ergiebt $\mu^2 c\sigma = \mu cg\sigma - cg_p\sigma$ und $\mu c^2\sigma = \mu cg\sigma - \mu g_e\sigma$:

(34) $$\mu^2 c\sigma = g_s h + g^2h^2 + gh_s - g_p h_p - \varepsilon\,[\beta^2 k - \beta k_p + 3k_s)\,,$$

(35) $$\mu c^2\sigma = g_s h + g^2h^2 + gh_s - g_e h_e - \varepsilon\,[\beta^2 k - \beta k_e + 3k_s)\,.$$

Endlich erhält man aus den Formeln:

$$\mu^3 c\sigma = \mu^3 cg\sigma - \mu c g_p \sigma = \mu c g_e \sigma - c g_s \sigma ,$$
$$\mu c^3 \sigma = \mu c^2 g\sigma - \mu c g_e \sigma = \mu c g_p \sigma - \mu g_s \sigma ,$$
$$\mu^2 c^2 \sigma = \mu^3 c\sigma + \mu c^3 \sigma ,$$
$$\mu^3 c^2 \sigma \equiv \mu^2 c^3 \sigma = \mu^2 c^2 g - \mu c^2 g_p = \mu c^3 g - c^3 g_p = \text{etc.}$$

jede der folgenden 4 Formeln auf mehrfache Weise:

(36) $$\mu^3 c\sigma = g_s h_e + g_e h_s - \varepsilon[\beta^2 k_e - \beta k_s + K] ,$$

(37) $$\mu c^3 \sigma = g_s h_p + g_p h_s - \varepsilon[\beta^2 k_p - \beta k_s + K] ,$$

(38) $$\mu^2 c^2 \sigma = g_s h^2 + g^2 h_s - \varepsilon[\beta^2 k^2 - \beta k^3 + k^4] ,$$

(39) $$\mu^3 c^2 \sigma \equiv \mu^2 c^3 \sigma = g_s h_s - \varepsilon[\beta^2 k_s - \beta k^4] ;$$

$\mu^3 c^3 \sigma$ ist natürlich gleich Null.

Substituirt man nun die eben entwickelten Werthe von $\mu^a c^b \sigma$ in die aus der Gleichung (27) durch Specialisirung von n folgenden Formeln, so erhält man Identitäten, wenn $n = 1$ und $n = 2$ ist. Es gelingt also nicht, aus den Correspondenzformeln erster, zweiter und dritter Dimension nach Entfernung von β auch σ ganz zu entfernen, sondern es bleibt dann mindestens noch ein σ angehöriges Symbol stehen. Für $n = 4$ ergiebt sich jedoch aus Formel (27) nach Einsetzung der in (32), (33), (34), (35) entwickelten Werthe von $\mu^3\sigma$, $\mu^2 c\sigma$, $\mu c^2 \sigma$, $c^3\sigma$ die folgende wichtige Formel:

(40) $$G + g_s h + g_e h_e + g_p h_p + g h_s + H = \varepsilon[\beta^3 - 2\beta^2 k + 3\beta k^2], \quad \text{(IV)}$$

welche *das Correspondenzprincip im Strahlenraume darstellt.* Man findet diese Formel auch auf folgendem Wege. Man multiplicire von der aus (30) folgenden Gleichung:

$$\mu c\sigma + \varepsilon(\beta^2 + 2k^2) = g_s + g^2 h + g h^2 + h_s$$

und von der aus (16) folgenden Gleichung:

$$\beta = g + h - \varepsilon$$

die linken Seiten und die rechten Seiten mit einander, setze die erhaltenen Ausdrücke gleich und substituire $\mu\sigma + c\sigma$ für $\beta\sigma$. Dann kommt zunächst:

$$(\mu^2 c + \mu c^2)\sigma + \varepsilon(\beta^3 + 2k^2\beta) = G + H + 3g_s h + 3g h_s + 2g^2 h^2 - \varepsilon[2k_s + 2k^3] .$$

Setzt man nun für $\mu^2 c\sigma$ und $\mu c^2 \sigma$ die Werthe aus (34) und (35) und vereinfacht die erhaltene Formel, so erhält man die Formel (40) noch einmal. Dieselbe ist vom Verfasser ursprünglich nicht auf dem hier angegebenen Wege der blossen symbolischen Rechnung aus den Hauptformeln (16), (17), (20), (21) abgeleitet worden, sondern direct geometrisch durch mehrmalige Anwendung des Pr. d. sp. Lage gefunden

worden. Die hier gegebene Ableitung sollte beweisen, wie unsere Symbolik kraft der Grundformeln des § 9. die oft schwierigen oder wenigstens mühsamen *rein geometrischen Herleitungen auf ein Minimum beschränkt.*

Analog, wie wir beim Punktepaare (§ 16.) die Formeln von höherer als der dritten Dimension durch Multiplicationen mit den Grundbedingungen eines der beiden Punkte aus der Formel dritter Dimension III ableiten konnten, so finden wir auch beim Strahlenpaare die Formeln von höherer als der vierten Dimension durch Multiplication mit g, g_p, g_e, g_s, G aus der Formel (IV) vierter Dimension.

Also:

$$Gh + g_s h^2 + g^2 h_s + g\ H = \varepsilon\,(\beta^3 k - 2\beta^2 k^2 + 3\beta k^3), \quad \text{(V)}$$

$$Gh_p + g_s h_s + g_p H = \varepsilon\,(\beta^3 k_p - 2\beta^2 k_s + 3\beta K), \quad \text{(VI)}$$

$$Gh_e + g_s h_s + g_e H = \varepsilon\,(\beta^3 k_e - 2\beta^2 k_s + 3\beta K), \quad \text{(VI')}$$

$$Gh_s + g_s H = \varepsilon\,(\beta^3 k_s - 2\beta^2 K), \quad \text{(VII)}$$

$$GH = \varepsilon\,(\beta^3 K). \quad \text{(VIII)}$$

Die letzte Formel ist selbstverständlich.

§ 19.

Relationen, welche nur Grundbedingungen des Strahlenpaares oder nur Grundbedingungen seiner Coincidenz enthalten.

Beim Punktepaare konnten die linken Seiten der eigentlichen Correspondenzformeln von höherer als der dritten Dimension auf mehrfache Weise aus der linken Seite der Formel dritter Dimension erhalten werden. Hätte man diesen Umstand zur Aufstellung von Relationen zwischen den Coincidenzsymbolen benutzt, so wäre man auf keine andern Beziehungen geführt, als auf diejenigen, welche schon aus § 9. bekannt sind. Wendet man jedoch beim Strahlenpaare das analoge Verfahren an, so kommt man auf Formeln zwischen den Grundbedingungen einer Strahlen-Coincidenz, welche neu und desshalb interessant sein dürften, weil in den letzten Jahren analoge Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Kegelschnitts aufgefunden sind. (Vergl. Lindemann's Vorl. von Clebsch, p. 406.)

Die linke Seite der Formel (41) kann aus der Formel (40) nicht bloss wie oben durch Multiplication mit g oder h, sondern auch dadurch erhalten werden, dass man ihre linke Seite mit der linken Seite, ihre rechte mit der rechten Seite der aus (16) folgenden Formel:

$$g + h - \varepsilon = \beta$$

multiplicirt und alle Coincidenzsymbole nach rechts bringt. Dadurch erhält man nämlich zunächst:

$$2Gh + g_1h^2 + g_1h_p + g_ph_1 + g_1h_e + g_eh_1 + g^2h_1 + 2gH$$
$$= \varepsilon[K + k_1k + k_pk_p + k_ek_e + kk_1 + K] + \varepsilon[\beta^4 - 2\beta^3k + 3\beta^2k^2],$$

und aus dieser Formel durch Vereinfachung:

$$2Gh + 2g_1h^2 + 2g^2h_1 + 2gH = \varepsilon[\beta^4 - 2\beta^3k + 3\beta^2k^2 + 6K].$$

Die linke Seite dieser Formel ist nun das Doppelte der linken Seite von Formel (41). Multiplicirt man also die Formel (41) mit 2 und vergleicht die rechten Seiten, so erhält man:

$$\varepsilon(\beta^4 - 2\beta^3k + 3\beta^2k^2 + 6K) = \varepsilon(2\beta^3k - 4\beta^2k^2 + 6\beta k^3),$$

oder:

$$\varepsilon(\beta^4 - 4\beta^3k + 7\beta^2k^2 - 6\beta k^3 + 3k^4) = 0, \tag{46}$$

oder:

$$\varepsilon(\beta^2 - \beta k + k^2)(\beta^2 - 3\beta k + 3k^2) = 0.$$

Da

$$\varepsilon(\beta k - k^2) = \varepsilon B$$

ist, so kann die Formel (46) durch Einführung des Symbols B eine einfachere Form annehmen, aus welcher nun k ganz verschwunden ist, nämlich:

$$\varepsilon(\beta^4 - 4\beta^2B + 3B^2) = 0, \tag{47}$$

oder:

$$\varepsilon(\beta^2 - B)(\beta^2 - 3B) = 0.$$

Für eine lineare Congruenz, deren beide erzeugende Axen unendlich nahe sind, gilt also der Satz, dass *zwischen der einfachen Grundbedingung ihrer Coincidenz-Axe k und ihrer Büschelbedingung β, oder zwischen ihrer Büschelbedingung β und ihrer Strahlbedingung B immer ein und dieselbe Relation vierter Dimension besteht, welche durch Formel* (46) *oder* (47) *dargestellt wird.* Aus der Formel (46) kann man dann auch verschiedene auf das *allgemeine Strahlenpaar,* oder, was dasselbe ist, auf die *allgemeine lineare Congruenz* bezügliche Relationen *fünfter Dimension* finden. Dies geschieht dadurch, dass man die Gleichung

$$g + h - \beta = \varepsilon$$

derartig mit g und h zugehörigen Symbolen multiplicirt, dass durch Addition der so erhaltenen Gleichungen eine Formel entsteht, deren rechte Seite nach Formel (46) gleich Null zu setzen ist. Wir erwähnen von diesen Relationen diejenige, welche zwischen $(g+h)$ einerseits und β andererseits besteht. Zu dem Ende multipliciren wir

$$g + h - \beta = \varepsilon$$

erstens mit β^4,
zweitens mit $-\frac{1}{2}\beta^3(g+h)$,
drittens mit $+\frac{1}{4}\beta^2(g+h)^2$,

viertens mit $-\frac{8}{3}\beta(g+h)^3$,
fünftens mit $+\frac{3}{16}(g+h)^4$,

und addiren die erhaltenen Gleichungen. Dann kommt bei Benutzung von (46):

$$(48)\quad 16\beta^5-48\beta^4(g+h)+60\beta^3(g+h)^2-40\beta^2(g+h)^3+15\beta(g+h)^4 \\ -3(g+h)^5=0.$$

In diese Gleichung lässt sich leicht die Bedingung ν einführen, welche aussagt, dass eine der beiden erzeugenden Axen der linearen Congruenz einen gegebenen Strahl schneiden sollen. Dieselbe ist nämlich nach dem Gesetz der Spaltung gleich

$$g+h.$$

Ersetzt man demgemäss das Symbol $g+h$ in (48) durch ν, so erhält man *eine Beziehung fünfter Dimension zwischen der Bedingung, dass ein Strahl der linearen Congruenz einem Strahlbüschel angehören soll, und der Bedingung, dass eine Axe einen Strahl schneiden soll.*

Es gelingt auch, eine Formel fünfter Dimension aufzufinden, welche nur β und B enthält. Wir multipliciren zu diesem Ende die Formel (17)

$$\beta=\sigma+\varepsilon$$

mit

$$\beta^4-4\beta^2B+3B^2,$$

und benutzen erstens, dass nach Formel (47)

$$\varepsilon(\beta^4-4\beta^2B+3B^2)=0$$

ist, und zweitens, dass auch

$$\sigma(\beta^4-4\beta^2B+3B^2)=0$$

ist. Letzteres folgt daraus, dass bei Benutzung von (14) und (15) und von

$$\mu^3c+\mu c^3=\mu^2c^2 \text{ (Grundformeln des § 9.)}$$

der Ausdruck

$$\sigma(\beta^4-4\beta^2B+3B^2)=\sigma[(\mu+c)^4-4(\mu+c)^2(\mu^2+c^2)+3(\mu^2+c^2)^2]$$

verschwindet. Daher wird die mit $(\beta^4-4\beta^2B+3B^2)$ symbolisch multiplicirte Formel (17) zu:

$$(49)\qquad \beta^5-4\beta^3B+3\beta B^2=0$$

oder:

$$\beta(\beta^2-B)(\beta^2-3B)=0.$$

Dieses Resultat könnte in Worten etwa so ausgesprochen werden:

„Für jede beliebige einer linearen Congruenz auferlegte dreifache Bedingung Z sind die drei Anzahlen, von denen

die erste angiebt, wieviel lineare Congruenzen die Bedingung Z

zu erfüllen, und zugleich 5 gegebenen Strahlbüscheln je einen Strahl zuzuschicken vermögen,

die zweite angiebt, wieviel Z erfüllen, 3 gegebenen Strahlbüscheln je einen Strahl zuschicken und 1 gegebenen Strahl enthalten können,

die dritte angiebt, wieviel Z erfüllen, 1 gegebenen Strahlbüschel einen Strahl zuschicken, und 2 gegebene Strahlen enthalten können,

derartig von einander abhängig, dass die Summe der ersten Anzahl und des Dreifachen der dritten Anzahl gleich dem Vierfachen der zweiten Anzahl ist.“

Die eben gefundenen Resultate sind, wie schon oben erwähnt ist, Analoga von Resultaten, die Herr Halphen (Bull. de la soc. math. Bd. 1) (Lindemann's Vorl. von Clebsch, p. 406, Formel (11)) für Kegelschnitte aufgefunden hat. Bezeichnet nämlich ν die einfache Grundbedingung des Punktorts, ϱ die des Strahlenorts eines in fester Ebene befindlichen Kegelschnitts, so besteht, wie die *eigentliche* Charakteristikentheorie ergiebt, zwischen ν und ϱ immer eine Relation dritter Dimension, welche lautet:

$$2\nu^3 - 3\nu^2\varrho + 3\nu\varrho^2 - 2\varrho^3 = 0\ ^*).$$

Wie nun bei Kegelschnitten der Relationen jeder noch höheren Dimension mehrere vorhanden sind, so bestehen auch bei der linearen Congruenz zwischen β und $(g+h)$, und zwischen β und B *mehrere Relationen jeder höheren Dimension*, die auf demselben Wege gefunden werden können wie die Formeln (46), (47), (48), (49).

Selbstverständlich besteht für jedes Gebilde mit der Constantenzahl c eine Relation zwischen je zwei c-fachen Bedingungssymbolen. Festzustellen wäre jedoch, ob nicht zwischen zwei oder mehr Bedingungssymbolen von kleinerer als der c^{ten} Dimension *auch* Relationen bestehen. Beziehen sich die Bedingungssymbole auf verschiedene Plücker'sche Oerter, welche in der Lage *ganz unabhängig* von einander sind, so können natürlich solche Relationen nicht bestehen. Wohl aber sind dieselben möglich, wenn die Oerter eine specielle Lage zu einander einnehmen, wie der Ort der Punkte einer Curve, der Ort ihrer Tangenten und der Ort ihrer Schmiegungsebenen. Der eben ausgesprochene Gedanke führt zu folgendem möglichst allgemein ausgesprochenen Probleme:

„Gegeben ist die Definition eines Gebildes und a Bedingungen für dasselbe. Gesucht werden allgemeingültige Formeln möglichst niedriger, vielleicht p^{ter} Dimension, deren p-fache Bedingungssymbole jene a-fachen Bedingungen oder einen Theil derselben zu symbolischen Factoren haben.“

*) Die analogen Relationen für *Flächen* zweiter Ordnung sind während des Drucks vom Verfasser gefunden.

Die einfachsten Fälle dieses Problems haben wir schon durch die Formeln des § 8., § 9. und § 10. erledigt. Formel (III) in § 9. löst z. B. folgendes Problem:

„*Gegeben* ein Gebilde, welches aus einer Ebene und einem darauf liegenden Punkte besteht, und erstens die Bedingung μ, dass die Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll, zweitens die Bedingung c, dass der Punkt auf einer gegebenen Ebene liegen soll. *Gesucht* eine Formel möglichst niedriger Dimension zwischen den Producten der Potenzen von μ und c. Die niedrigste Dimension einer solchen Formel ist die dritte. Die Formel selbst lautet:

$$\mu^3 - \mu^2 c + \mu c^2 - c^3 = 0.“$$

Zwischen den Grundbedingungen zweier in allgemeiner Lage zu einander befindlichen Strahlen kann natürlich keine Relation bestehen. Wohl aber besteht eine solche zwischen den Grundbedingungen zweier sich schneidender Strahlen. Diese Relation ist durch die Formel (IV) des § 9. ausgesprochen.

Die obigen auch das Schneidepaar berücksichtigenden Formeln liefern uns die Mittel, die eben erwähnte Formel noch einmal zu erhalten. Multiplicirt man nämlich die Formel (18) symbolisch mit

$$G - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + H\,,$$

so wird die linke Seite der entstehenden Formel identisch Null. Daher kommt:

$$\begin{aligned} 0 = \sigma\,&[G - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + H] \\ &+ 2\varepsilon\,[K - k_s k + k_p k_e + k_e k_p - k k_s + K]\,. \end{aligned}$$

Da nun $k_s k = K$, $k_p k_e$ aber gleich Null ist, so verschwindet auch das ε angehörige Symbol, so dass wir erhalten:

$$\sigma\,[G - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + H] = 0\,;$$

das ist der Inhalt der Formel (IV) in § 9.

Da zwar G und g_s durch g allein, nicht aber jedes der Symbole g_p und g_e durch g allein ausdrückbar ist, so würde diese Formel noch keine Lösung des Problems ergeben können, eine Formel möglichst niedriger Dimension aufzustellen, welche *nur die Potenzen der Axenbedingungen* der beiden Strahlen eines Schneidepaars enthielte. Die gesuchte Formel entstände aber, wenn man die eben aufgestellte Formel mit g oder h symbolisch multiplicirte, und benutzte, dass $g_s = \frac{1}{2} g^3$, $G = \frac{1}{2} g^4$ ist. Dann kommt nämlich die Formel fünfter Dimension:

$$\sigma\,[g^1 h - g^3 h^2 + g^2 h^3 - g h^4] = 0\,,$$

welche, ebenso wie die Formeln (46) bis (49), ein Analogon zu der interessanten Formel dritter Dimension liefert, welche die einfachen

Grundbedingungen eines in fester Ebene befindlichen Kegelschnitts verbindet.

§ 20.

Formeln zwischen den Grundbedingungen der Coincidenz des Schneidepaars und denen des Schneidepaars oder des allgemeinen Strahlenpaars.

Das *Schneidepaar*, welches wir in § 18. nur als Ausartung des allgemeinen Strahlenpaars aufgefasst haben, betrachten wir hier *um seiner selbst willen*. Dabei behalten wir noch immer die Bezeichnungen des § 18. bei.

Die Coincidenz des Schneidepaars σ, die am passendsten mit $\varepsilon\sigma$ zu bezeichnen ist, entsteht dadurch, dass die Strahlen g und h in den Strahl k unendlich nahe rücken, wobei der Schnittpunkt c und die Schnittebene μ vollkommen bestimmt bleibt. Eine $\varepsilon\sigma$ zugesetzte a-fache Bedingung bezeichnet die Anzahl derjenigen Coincidenzen $\varepsilon\sigma$, welche diese a-fache Bedingung erfüllen und einem vorliegenden Systeme $(a-1)^{\text{ter}}$ Stufe angehören. Alle Formeln zwischen Grundbedingungen des Schneidepaars gelten natürlich auch zwischen den gleichnamigen Grundbedingungen dieses specielleren Schneidepaars. Z. B.

$$\beta\varepsilon\sigma = \mu\varepsilon\sigma + c\varepsilon\sigma, \tag{50}$$

$$B\varepsilon\sigma = \mu^2\varepsilon\sigma + c^2\varepsilon\sigma, \tag{51}$$

$$k_p\varepsilon\sigma = \mu k\varepsilon\sigma - \mu^2\varepsilon\sigma, \tag{52}$$

$$k_e\varepsilon\sigma = ck\varepsilon\sigma - c^2\varepsilon\sigma, \tag{53}$$

$$k_s\varepsilon\sigma = \mu ck\varepsilon\sigma - \mu^3\varepsilon\sigma - \mu c^2\varepsilon\sigma, \tag{54}$$

$$K\varepsilon\sigma = (\mu^2 c - \mu^3)k\varepsilon\sigma - \mu^2 c^2\varepsilon\sigma. \tag{55}$$

Dieselbe Art der Benutzung des Corr.-Pr., welche in § 18. zu der Formel (16) führte, führt hier bei dem Schneidepaare zu folgender Formel:

$$g\sigma + h\sigma - \beta\sigma = \varepsilon\sigma. \tag{56}$$ (41)

Durch sbl. Mult. dieser Gleichung mit μ, c und g oder h erhält man nach Benutzung von (6) und (8) oder (7) und (9) und von (50):

$$g_p\sigma + h_p\sigma + \mu^2\sigma - \mu c\sigma = \mu\varepsilon\sigma, \tag{57}$$

$$g_e\sigma + h_e\sigma + c^2\sigma - \mu c\sigma = c\varepsilon\sigma, \tag{58}$$

$$gh\sigma - \mu^2\sigma - c^2\sigma = k\varepsilon\sigma. \tag{59}$$

Statt (59) kann wegen (51) auch geschrieben werden:

$$B\sigma = gh\sigma - k\varepsilon\sigma \text{ (vergl. (24))}. \tag{60}$$

Durch Addition von (59) zu (57) und zu (58) erhält man:

(61) $g_p\sigma + gh\sigma + h_p\sigma - \mu c\sigma - c^2\sigma = \varepsilon\sigma(\mu + k)$, (II')

(62) $g_e\sigma + gh\sigma + h_e\sigma - \mu c\sigma - \mu^2\sigma = \varepsilon\sigma(c + k)$. (II)

Durch Multiplication der Gleichung (57) mit c oder der Gleichung (58) mit μ, und durch Benutzung der Relation:

$$\mu^3\sigma - \mu^2 c\sigma + \mu c^2\sigma - c^3\sigma = 0$$

erhält man endlich:

(63) $$g_s\sigma + h_s\sigma + \mu^3\sigma + c^3\sigma = \varepsilon\sigma(\mu c).$$

Diese Formel enthält das beste Correspondenzprincip für zwei sich schneidende Strahlen bei dreifacher Correspondenzbedingung. Sie könnte hinsichtlich ihrer Einfachheit der Formel (7) des § 16. an die Seite gestellt werden.

Führen wir jetzt die dem allgemeinen Strahlenpaare angehörigen Symbole dadurch ein, dass wir durch Multiplication von (18) mit g_s und h_s, $g_s\sigma$ und $h_s\sigma$ ausdrücken, und die erhaltenen Ausdrücke, ebenso wie die in (32) und (33) gegebenen Ausdrücke für $\mu^3\sigma$ und $c^3\sigma$ in Formel (63) einsetzen, so erhalten wir:

(64) $$G + g_s h + g_e h_e + g_p h_p + g h_s + H = \varepsilon\sigma(\mu c) + \varepsilon(\beta k^2 + k^3).$$

Die linke Seite dieser Formel stimmt mit der linken Seite der Formel (40) überein; die rechte Seite aber enthält ausser der Coincidenz des allgemeinen Strahlenpaars auch die Coincidenz des Schneidepaars. Wir verändern nun, weil dies für die Ablesung von Correspondenzsätzen zweckmässig ist, die rechte Seite der Formel (64) so, dass alle Symbole, die ε angehören und β enthalten, verschwinden und dafür $\varepsilon\sigma$ angehörige Symbole eintreten. Dies gelingt durch gewisse Formeln, welche nur ε und $\varepsilon\sigma$ enthalten und auf folgendem Wege gefunden werden.

Man addire die mit $(g+h)$ multiplicirte Gleichung (17), die mit $-\beta$ multiplicirte Gleichung (18) und die Gleichung (56). Dann erhält man nach Aufhebung der gleichen Glieder:

$$0 = \varepsilon\sigma + 2\varepsilon k - 2\varepsilon\beta,$$

oder:

(65) $$\tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma = \varepsilon(\beta - k).$$

Hieraus erhält man durch sbl. Mult. mit $\beta + k$ und mit $\beta^2 + \beta k + k^2$:

(66) $$\tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma(\beta + k) = \varepsilon(\beta^2 - k^2),$$

(67) $$\tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma(\beta^2 + \beta k + k^2) = \varepsilon(\beta^3 - k^3).$$

Berechnet man aus (65) $\varepsilon\beta$, multiplicirt mit k^2, und setzt den erhaltenen Ausdruck statt $\varepsilon\beta k^2$ in (64) ein, so kommt:

(68) $$G + g_s h + g_p h_p + g_e h_e + g h_s + H = \varepsilon\sigma(\mu c + \tfrac{1}{2}k^2) + 4\varepsilon k_s,$$

eine Formel, welche in vielen Fällen der Anwendung des Correspondenzprincips im Strahlenraume bequemer ist, als Formel (40).

Es liegt nahe, die Formeln (40) und (68) oder (64) dadurch zu verificiren, dass man ihre rechten Seiten gleichsetzt. Dies giebt:

$$\varepsilon\sigma(\mu c) = \varepsilon(\beta^3 - \beta^2 k + \beta k^2 - k^3). \tag{69}$$

Führt man hier statt $\varepsilon\beta^3$, $\varepsilon\beta^2 k$, $\varepsilon\beta k^2$ die aus (65), (66) und (67) folgenden $\varepsilon\sigma$ enthaltenden Ausdrücke ein, so kommt:

$$\varepsilon\sigma(\mu c) = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\sigma(\beta^2 - \beta k + k^2).$$

Beachtet man jetzt, dass $k^2 = k_p + k_e$, und benutzt (50), (52) und (53), so erhält man die bestätigende Identität:

$$\varepsilon\sigma(\mu c) = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\sigma\,[(\mu + c)^2 - (\mu + c)k + (\mu k - \mu^2 + ck - c^2)].$$

§ 21.

Ablesung von Correspondenzsätzen aus den für das Strahlenpaar und das Schneidepaar erhaltenen Formeln.

Nach den in § 15. gemachten allgemeinen Bemerkungen über die Salmon-Zeuthen'sche Erweiterung des Correspondenzprincips und nach der in § 17. besprochenen Uebersetzung der Formeln für Punktepaare in Sätze über Correspondenzen zwischen Punkten ist hier nur wenig hinzuzufügen, da die meisten Bemerkungen des § 17. ohne Weiteres vom Punktepaar auf das Strahlenpaar übertragen werden können.

Die Eintheilung der Coincidenzen in Gattungen gestaltet sich hier wie folgt. Eine Coincidenz im Strahle k ist von der $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ *Gattung* oder α-stufig, wenn dieselbe die Bedingung β^α von selbst zu erfüllen im Stande ist, oder, was dasselbe ist, wenn als verbindende lineare Congruenz der beiden in k zusammengefallenen Strahlen jede Congruenz aus einem System α^{ter} Stufe solcher Congruenzen angesehen werden kann. Eine Coincidenz $(\alpha+1)^{\text{ter}}$ Gattung wird ferner δ-fach zu nennen sein, wenn durch jede Bedingung β^α δ solcher verbindenden linearen Congruenzen bestimmt sind. Unter ∞^α einem Strahle k unendlich nahen Strahlen giebt es immer $\infty^{\alpha-1}k$ schneidende Strahlen. Daher ist bei einer Coincidenz $(\alpha+1)^{\text{ter}}$ Gattung im Strahle k immer ein System $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Stufe von Coincidenz-Schneidepaaren bestimmt, welche k als Coincidenzstrahl besitzen. Nun drücken aber die Formeln (65), (66) und (67) des § 20. die $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\beta^2$, $\varepsilon\beta^3$ durch die εk, εk^2, εk^3, $\varepsilon\sigma$, $\varepsilon\sigma\beta$, $\varepsilon\sigma k$, $\varepsilon\sigma\beta^2$, $\varepsilon\sigma\beta k$, $\varepsilon\sigma k^2$ aus, und die $\varepsilon\sigma\beta$, $\varepsilon\sigma\beta^2$, $\varepsilon\sigma\beta k$ lassen sich wieder durch die $\varepsilon\sigma\mu$ und $\varepsilon\sigma c$ ausdrücken. Daher können bei den Correspondenzsätzen die *Coincidenzzahlen, je nach Bedarf,* entweder durch die Producte der Potenzen von β und k für ε, oder durch die Producte der Potenzen von μ und c für $\varepsilon\sigma$ und eine einzige Potenz von k für ε ausgedrückt werden, wie Formel (40) und (68) zeigen.

Die Formeln, welche in § 18. und § 20. mit römischen Nummern bezeichnet sind, eignen sich namentlich zur Ablesung von Correspondenzprincipien in herkömmlicher Ausdrucksweise.

Das Chasles'sche Correspondenzprincip im Strahlbüschel erhält man dadurch, dass man sich Formel (56) mit $\mu^3 c^2$ symbolisch multiplicirt denkt. *Die schon durch Zeuthen's Untersuchung bekannten Correspondenzprincipien im Strahlenfelde und im Strahlenbündel entstehen aus* (62) *und* (61) *durch sbl. Mult. mit* μ^3 *resp.* c^3. *Neu ist das aus* (31) *folgende Correspondenzprincip in der Strahlenaxe.* Man erhält dasselbe, wenn man sich diese Formel mit B sbl. multiplicirt denkt und beachtet, dass

$$\tfrac{1}{2} B(\mu - c)^2 \sigma = \tfrac{1}{2}(\mu^2 + c^2)(\mu - c)^2 \sigma = \tfrac{1}{2}(\mu^2 c^2 + c^2 \mu^2 - 2\mu^3 c - 2\mu c^3)\sigma$$

identisch verschwindet, da $\mu^2 c^2 \sigma = \mu^3 c \sigma + \mu c^3 \sigma$ ist.

Die Formel (31) lautet dann:

$$(70) \qquad B(g_s + \tfrac{1}{2} g^2 h + \tfrac{1}{2} g h^2 + h_s) = \varepsilon(\beta^2 - \beta k + 2k^2) B$$
$$= \tfrac{1}{2} \varepsilon \sigma (\mu + c) B + 2\varepsilon k^2 B.$$

Sie ist so zu einer eigentlichen (§ 15.) Correspondenzformel geworden. Die Formeln vierter und höherer Dimension sind von selbst eigentliche.

Es wird überflüssig erscheinen, die rechten Seiten dieser Correspondenzformeln durch Einführung der Coincidenzen *verschiedener Gattungen* noch besonders zu erläutern, da ja erstens die Art und Weise einer solchen Deutung durch das Beispiel des Punktepaares hinreichend gekennzeichnet ist, und zweitens für die Anwendungen die oben gegebene einfachere Gestalt der Correspondenzformeln viel *geeigneter* ist.

Das vollständige Correspondenzprincip in der Strahlenaxe lautet also nach Formel (70), da $Bg_p = Bg_e$, also $\tfrac{1}{2} Bg^2 h = Bg_p h = Bg_e h$ ist:

1) „*Wenn zwischen den* ∞^3 *Strahlen, welche eine Axe schneiden, eine durch eine dreifache Correspondenzbedingung definirte Correspondenz derartig besteht, dass einem Strahle* X *resp.* X' α' *Strahlen* X' *resp.* α *Strahlen* X *entsprechen, und dass diejenigen Strahlen* X' *resp.* X, *welche den sämmtlichen Strahlen* X *resp.* X' *eines in der Axe liegenden Strahlbüschels entsprechen, eine Regelfläche vom Grade* β' *resp.* β *bilden, so ist die Summe dieser* 4 *Zahlen*

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta'$$

gleich

$$u - v + 2z,$$

wo u *die Anzahl derjenigen Strahlen der Axe ist, in welchen zwei sich entsprechende Strahlen so zusammenfallen, dass zwei gegebene Strahlbüschel je einen Strahl enthalten, der diese beiden zusammenfallenden Strahlen zu schneiden vermag,*

wo v der Grad der von denjenigen Strahlen der Axe erzeugten Regelfläche ist, in welchen zwei sich entsprechende Strahlen so zusammenfallen, dass ein gegebener Strahlbüschel einen Strahl enthält, der diese beiden zusammenfallenden Strahlen zu schneiden vermag,

und wo z die Summe von Bündelgrad und Feldgrad des von denjenigen Strahlen der Axe erzeugten Strahlenortes zweiter Stufe ist, in welchem zwei sich entsprechende Strahlen zusammenfallen.“

Die eben genannte Zahl α entsprach unserm Bg_1, α' unserm Bh_1, β unserm $\frac{1}{2}Bg^2h$, β' unserm $\frac{1}{2}Bgh^2$, u unserm $\varepsilon B\beta^2$, v unserm $\varepsilon B\beta k$, z unserm εBk^2.

Das Correspondenzprincip im Strahlenraume wollen wir aus der Formel (68) ablesen, dabei also die Coincidenz des Schneidepaars berücksichtigen:

2) *„Wenn zwischen den ∞^4 Strahlen des Raums eine durch eine vierfache Correspondenzbedingung definirte Correspondenz derartig besteht, dass einem Strahle X resp. X' α' Strahlen X' resp. α Strahlen X entsprechen, dass ferner diejenigen Strahlen X' resp. X, welche den sämmtlichen Strahlen X resp. X' eines Strahlbüschels entsprechen, eine Regelfläche vom Grade β' resp. β bilden, dass ferner diejenigen Strahlen X' resp. X, welche den sämmtlichen Strahlen X resp. X' eines Strahlenbündels entsprechen, einen Strahlenort zweiter Stufe vom Bündelgrade γ bilden, und dass endlich alle diejenigen Strahlen X' resp. X, welche den sämmtlichen Strahlen X resp. X' eines Strahlenfeldes entsprechen, einen Strahlenort zweiter Stufe vom Feldgrade δ bilden, dann ist die Summe dieser 6 Zahlen:*

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \delta$$

gleich

$$u + v + 4z,$$

wo u die Anzahl derjenigen Strahlen ist, in welchen zwei sich entsprechende Strahlen zusammenfallen und zugleich sich so schneiden, dass der Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen kann und die Schnittebene durch einen gegebenen Punkt gehen kann,

wo v die halbe Summe von Bündelgrad und Feldgrad des von denjenigen Strahlen erzeugten Strahlenorts zweiter Stufe ist, in welchen zwei sich entsprechende Strahlen zusammenfallen und zugleich sich schneiden,

und wo z der Grad des von denjenigen Strahlen erzeugten Strahlenortes dritter Stufe (Complexes) ist, in welchen zwei sich entsprechende Strahlen zusammenfallen.“

Wir fügen diesen beiden Correspondenzprincipien noch die Uebersetzung einiger der für das Schneidepaar gefundenen Formeln hinzu:

Multiplicirt man Formel (57) und (58) mit der Trägerbedingung B, so verschwinden die Symbole $\mu^2\sigma - \mu c\sigma$ resp. $c^2\sigma - \mu c\sigma$ identisch,

und wir erhalten so folgende Correspondenzsätze aus diesen beiden Formeln:

3) „*Wenn zwischen den* ∞^3 *Strahlen, welche eine Axe schneiden, eine Correspondenz derartig besteht, dass je zwei entsprechende Strahlen sich schneiden, und dass durch einen nicht auf der Axe liegenden Punkt* α *Strahlen* X *resp.* α' *Strahlen* X' *gehen, die entsprechende besitzen, so ist die Summe dieser beiden Zahlen*

$$\alpha + \alpha'$$

gleich der Anzahl derjenigen Strahlen der Axe, in denen zwei sich entsprechende so zusammenfallen, dass ihre Schnittebene durch einen gegebenen Punkt gehen kann.“

4) *Der andere Satz entspricht diesem dualistisch.*

Aus der Formel (63) kann man Folgendes ablesen:

5) „*Wenn zwischen den* ∞^4 *Strahlen des Raums eine Correspondenz* (X, X') *besteht, so ist die Anzahl derjenigen Strahlen, in denen zwei sich entsprechende so zusammengefallen sind, dass sie sich schneiden, und dass ihr Schnittpunkt auf einer gegebenen Ebene liegen, ihre Schnittebene durch einen gegebenen Punkt gehen kann, gleich der Summe von 4 Zahlen, von denen zwei den Grad des Complexes der von entsprechenden Strahlen geschnittenen Strahlen* X *resp.* X' *angeben, und von denen die beiden andern angeben, wieviel Strahlen mit ihren entsprechenden in ein und derselben Ebene liegen resp. durch ein und denselben Punkt gehen können.*“

Es bedarf wohl kaum noch der Erwähnung, dass die Fälle, in denen einem Strahle unendlich viele entsprechen, von unsern Formeln (41) bis (45) erledigt werden, und dass die Formel (41) mit dem Correspondenzprincip in der Strahlenaxe, die Formel (42) mit dem in dem Strahlenbündel, die Formel (43) mit dem in dem Strahlenfelde, die Formel (44) mit dem in dem Strahlenbüschel einen gewissen Zusammenhang hat, dessen Analogon beim Punktepaare in § 17. besprochen ist.

Uebrigens erledigen unsere Correspondenzformeln in § 16. und § 18. auch diejenigen Fälle, wo durch die Correspondenz (X, X') das von den Hauptelementen X gebildete System von *anderer* Stufe ist, als das von den Hauptelementen X' gebildete System, wo also z. B. jedem Punkte X eine endliche Anzahl von Punkten X' entspricht, wo aber nun nicht jeder beliebige Punkt ein Punkt X' sein kann, sondern etwa nur jeder Punkt einer gewissen Curve, jedoch so, dass jedem Punkte X' dieser Curve ∞^2 Punkte X entsprechen. Ein Beispiel hierzu bietet die Ableitung der Formel (I) in § 22.

Anwendungen unserer Correspondenzformeln für Strahlen folgen erst in § 24., § 25., § 26., nachdem auch die übrigen Paare von Hauptelementen behandelt sind.

§ 22.

Das aus Punkt und Ebene gebildete Paar.

Nachdem durch die ausführliche Behandlung des Strahlenpaares in § 18., 19., 20., 21. der Weg angedeutet ist, wie man weiterzugehen hat, um auch andere Paare hinsichtlich der Beziehungen zwischen ihren Grundbedingungen und denen ihrer Ausartungen zu behandeln, so können wir uns bei den noch nicht behandelten durch zwei *verschiedene Hauptelemente* definirten Paaren mit kurzen Andeutungen begnügen.

Das aus Punkt und Ebene bestehende Paar hat zu Plücker'schen Oertern nur seinen Punkt c und seine Ebene μ (§ 14.). Seine Coincidenz ε ist ein Gebilde, welches aus einer Ebene und einem darauf liegenden Punkte besteht. Da die Constantenzahl dieser Coincidenz immer gleich 5, die des allgemeinen Paares aber gleich 6 ist, so kann die Coincidenz von keiner höheren Gattung (§ 17.) als der ersten sein. Andere Ausartungen als ε sind nicht möglich. Die für ein System erster Stufe geltende Grundformel zwischen c, μ und ε ergiebt sich am leichtesten, wenn man jeden der ∞^1 Punkte der ∞^1 Paare dieses Systems mit jedem Punkte, welcher auf der diesem Punkte zugehörigen Ebene liegt, als Punktepaar auffasst, und auf das dadurch bestimmte System dritter Stufe von Punktepaaren die Formel (III) aus § 16. anwendet. Die Symbole c^3 und $c^2 d$ aus dieser Formel sind dann gleich Null zu setzen. Das cd^2 von dort ergiebt sich hier gleich $c \cdot 1$, das d^3 von dort gleich μ, das εg_p von dort gleich ε, die übrigen Coincidenzsymbole von dort sind hier gleich Null. Daher kommt:

(I) $$c + \mu = \varepsilon.$$

Hieraus folgt durch sbl. Mult. mit $c - \mu$:

(II) $$c^2 - \mu^2 = \varepsilon\,(c - \mu),$$

und durch sbl. Mult. mit $c^2 - c\mu + \mu^2$:

(III) $$c^3 + \mu^3 = \varepsilon\,(c^2 + \mu^2 - c\mu).$$

Endlich ergiebt sich durch sbl. Mult. mit $c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3$

$$0 = \varepsilon\,(c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3),$$

das ist der Inhalt der Formel (III) aus § 9., welche die Grundbedingungen einer Ebene mit denen eines darauf liegenden Punktes verbindet.

Als Beispiel für die Uebersetzungen dieser Formeln in Worte wählen wir die von Formel (III).

„Besteht zwischen den Punkten und den Ebenen des Raums eine Correspondenz derartig, dass einem Punkte α' Ebenen, und einer Ebene α Punkte entsprechen, bilden ferner die Punkte, welche auf entsprechenden Ebenen liegen, eine Fläche von der Ordnung n, die Ebenen, welche durch entsprechende Punkte gehen, eine Fläche von der Classe m, und giebt

es endlich in jeder Ebene r Punkte, welche auf entsprechenden Ebenen so liegen, dass diese Ebenen durch einen gegebenen Punkt gehen, so ist

$$\alpha + \alpha' = n + m - r.$$

Eine *Anwendung* folgt in § 29.

§ 23.

Das aus Punkt und Strahl gebildete Paar*).

Dieses Paar hat drei Plücker'sche Oerter, nämlich seinen Punkt c, seinen Strahl g und die durch beide gelegte Ebene μ. Daher ist nach Formel (II) und (III) in § 9.:

(1) $$\mu^2 = \mu g - g_p,$$

(2) $$\mu^3 = \mu g_e - g_s,$$

(3) $$\mu^3 = \mu^2 c - \mu c^2 + c^3.$$

Das Paar hat keine andern Ausartungen als die Coincidenz ε. ε besteht aus einem Strahle g und einem darauf liegenden Punkte c; ε hat also, wenn die Verbindungsebene μ zwischen c und g jede von den ∞^1 durch g möglichen Ebenen sein kann, die Constantenzahl 5, und wenn diese Verbindungsebene μ endlichdeutig bestimmt ist, die Constantenzahl 6, d. h. entweder eine um 2 oder eine um 1 kleinere Constantenzahl, als das allgemeine Paar. Mit andern Worten, die Coincidenz von Punkt und Strahl kann erster und zweiter aber nicht höherer Gattung sein. Bei einer a-fachen Coincidenz erster Gattung würde die Verbindungsebene a-deutig bestimmt sein, bei einer a-fachen Coincidenz zweiter Gattung würde jede durch den Strahl gelegte Ebene $a$mal als seine Verbindungsebene mit dem in ihn fallenden Punkte gerechnet werden müssen. Wollte man also die beiden Gattungen der Coincidenz unterscheiden, so würde man das Symbol

$$\varepsilon\,\mu$$

in zwei Summanden zerlegen müssen, von denen der erste angiebt, wieviel Coincidenzen erster Gattung ihre resp. eine ihrer Verbindungsebenen durch einen gegebenen Punkt schicken, und der zweite angiebt, wieviel Coincidenzen zweiter Gattung vorhanden sind, jede so oft gerechnet als ihre Vielfachheit beträgt.

Um eine allgemeingültige Formel erster Dimension zwischen c, g, μ und ε zu erhalten, fassen wir jeden der ∞^1 Punkte der ∞^1 Paare mit jedem Punkte des ihm zugehörigen Strahls als Punktepaar zusammen, und wenden auf das dadurch erhaltene System zweiter Stufe von Punkte-

*) Dreistufige in fester Ebene liegende Systeme solcher Paare betrachtet Clebsch in diesen Annalen (Bd. VI, p. 203) von einem anderen Gesichtspunkte aus unter dem Namen *Connexe*.

paaren die Formel (II) des § 16. an. Das c^2 von dort ist hier Null, das cd von dort ist hier gleich $c \cdot 1$, das d^2 von dort ist hier gleich g, das g_p von dort ist hier gleich μ, das εg von dort ist hier gleich ε, das εb ist hier gleich Null. Daher kommt:

$$c + g - \mu = \varepsilon. \tag{4}$$ (I)

Durch sbl. Mult. dieser Formel mit $c + \mu$ und Benutzung von (1) kommt die eigentliche Correspondenzformel:

$$c^2 + cg + g_p = \varepsilon\,(e + \mu). \tag{5}$$ (II)

Durch sbl. Mult. von (4) mit $c^2 - cg + g_e$ erhält man links bei Benutzung von (1), (2), (3) Null. Daher kommt:

$$0 = \varepsilon\,(c^2 - cg + g_e),$$

das ist der Inhalt der Formel (I) aus § 9., welche die Beziehung zwischen den Grundbedingungen eines Strahls und denen eines darauf liegenden Punktes ausspricht.

Durch sbl. Mult. der Formel (4) mit $g_e + \mu g - \mu c$ erhält man bei Benutzung von (1), (2) und (3) die *eigentliche* Correspondenzformel:

$$g_s + cg_e - c^3 = \varepsilon\,(g_e + \mu g - \mu c). \tag{6}$$ (III)

Diese Formel sagt Folgendes aus:

„Wenn zwischen den ∞^3 Punkten des Raums und den ∞^3 Strahlen eines Complexes eine durch eine dreifache Correspondenzbedingung definirte Correspondenz derartig besteht, dass jedem Punkte α Strahlen entsprechen, dass die ∞^2 Strahlen, welche den sämmtlichen Punkten einer Ebene entsprechen, einen Strahlenort zweiter Stufe mit dem Feldgrad β bilden, und dass die ∞^3 Strahlen, welche den sämmtlichen Punkten des Raums entsprechen, einen Complex vom Grade γ bilden, so ist

$$\gamma + \beta - \alpha = u + v - z,$$

wo u der Feldgrad des von denjenigen Strahlen gebildeten Strahlenorts zweiter Stufe ist, in welche entsprechende Punkte fallen,

wo v der Grad der von denjenigen Strahlen gebildeten Regelfläche ist, in welche entsprechende Punkte so fallen, dass die durch Punkt und Strahl gelegte Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen kann,

und wo z der Grad der von denjenigen Punkten gebildeten Curve ist, durch welche entsprechende Strahlen so gehen, dass die Verbindungsebene zwischen Punkt und Strahl durch einen gegebenen Punkt gehen kann.

Die analogen Betrachtungen und Resultate für das aus Ebene und Strahl bestehende Paar entsprechen den eben gegebenen dualistisch. Bezeichnet man bei diesem Paare die Ebene mit μ, den Strahl mit g, den Schnittpunkt mit c, die Coincidenz mit ε, so ergiebt sich durch dualistische Uebertragung aus Formel (4):

(7) $$\mu + g - c = \varepsilon,$$

und aus Formel (5):

(8) $$\mu^2 + \mu g + g_e = \varepsilon\,(\mu + c).$$

Beispiele für die Formel (6) und (8) folgen in § 29.

§ 24.

Anwendung der auf das Strahlenpaar bezüglichen Formeln für die Bestimmung der fundamentalen Anzahlen der linearen Congruenz*).

In § 6. wurde unter *Fundamentalzahl eines Gebildes mit der Constantenzahl c jede Zahl verstanden, welche angiebt, wieviel solcher Gebilde einer c-fachen nur aus Grundbedingungen zusammengesetzten Bedingung genügen.* Die sämmtlichen Fundamentalzahlen eines Gebildes sind also, kurz ausgesprochen, die numerischen Werthe aller möglichen c-fachen Grundbedingungen. Die Bestimmung dieser Werthe kann durch hinreichend viele Formeln immer zurückgeführt werden auf die Bestimmung der numerischen Werthe von Bedingungen, die andern *einfacheren* Gebilden angehören. Die Methode, durch welche diese Zurückführung geschieht, ist von Chasles durch seine Bestimmung von Kegelschnitt-Anzahlen (C. R. 1864, 1867) begründet, und von Zeuthen durch seine Abhandlung Almind. Egensk. v. Syst. af pl. Kurv. weiter ausgebildet. Den allgemeinen Charakter dieser Methode wird der Verfasser in der zweiten Abhandlung erläutern.

Nach dieser Methode reducirt sich die Bestimmung aller fundamentalen Anzahlen des Strahlenpaares, oder, was dasselbe ist, der durch die beiden Strahlen des Paares erzeugten linearen Congruenz auf die Bestimmung aller Fundamentalzahlen des Schneidepaars σ und weniger Fundamentalzahlen der Coincidenz ε, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird. Die Brücke für diese Zurückführung bilden wenige Formeln des § 18., namentlich die Formeln (17), (18), (19). Die wenigen Fundamentalzahlen von ε, deren Kenntniss zur Bestimmung der Fundamentalzahlen der linearen Congruenz nöthig ist, enthalten sämmtlich eine Grundbedingung von höherer, als der vierten Dimension für den Coincidenzstrahl ε, haben also den Werth 0. Die sämmtlichen Fundamentalzahlen des Schneidepaars aber werden durch die Formeln (6) bis (15) in § 18. auf die Zahlen zurückgeführt, deren Symbole ausser μ und c höchstens die erste Potenz von g und h enthalten. Diese sind aber sämmtlich Null, ausser

$$\sigma\mu^3c^2gh \equiv \sigma\mu^2c^3gh = 1.$$

*) Für diesen § gelten die Bezeichnungen von § 18.

Durch diese *eine* als apriorisch anzusehende Anzahl können also schliesslich alle Fundamentalzahlen der linearen Congruenz ausgedrückt werden.

Die *detaillirte* Durchführung der Reduction auf die Zahlen σ und diejenigen Zahlen ε, die gleich Null sind, würde im Vergleich zu der Einfachheit des Gegenstandes hier zuviel Raum kosten. Wir können uns damit begnügen, auf Folgendes aufmerksam zu machen:

1) Ist in einem durch eine 7-fache Grundbedinguug Z definirten Systeme σ und ε bekannt, d. h. weiss man, wieviel Schneidepaare und wieviel Coincidenzen Z erfüllen, so bestimmt sich die der 8-fachen Bedingung βZ zugehörige Zahl durch Formel (17) in § 18., und die Summe der beiden den 8-fachen Bedingungen gZ und hZ angehörigen Zahlen durch Formel (18) in § 18.

2) Die Zahl, welche einer achtfachen sowohl β als $g+h$ enthaltenden Bedingung angehört, kann immer aus *zwei* Systemen erster Stufe erhalten werden, aus dem einen als β, aus dem andern als $g+h$.

3) Die Zahlen, welche zwei achtfachen Symbolen angehören, die durch Vertauschung von g mit h in einander übergehen, sind gleich.

4) Die Zahlen, welche zwei achtfachen sich dualistisch entsprechenden Symbolen angehören, sind gleich.

5) Alle B als Factor enthaltenden Symbole können durch Formel (1) oder (2) in § 18. auf die übrigen Symbole zurückgeführt werden.

Beispiele:

1) In dem durch die Bedingung $Gh\beta^2$ definirten Systeme erster Stufe ist ausser σ auch ε bekannt, nämlich

$$\varepsilon Gh\beta^2 = 0,$$

weil sich für die Bestimmung eines Strahls eine *fünffache* Bedingung ergiebt, und:

$$\begin{aligned}\sigma Gh\beta^2 &= \sigma\,(\mu^2 cg - \mu^3 g + \mu^2 c^2)\,h\,(\mu+c)^2\\ &= \sigma gh\,(2\mu^3 c^2 + \mu^2 c^3 - \mu^3 c^2)\\ &= 2\cdot 1 + 1 - 1 = 2,\end{aligned}$$

wo die Glieder, deren numerischer Werth Null ist, fortgelassen wurden. Daher ergiebt sich das β dieses Systems gleich $2+0=2$, das $g+h=2+2\cdot 0=2$. Also

$$\begin{aligned}\beta\,(Gh\beta^2) &= Gh\beta^3 = 2,\\ (g+h)\,(Gh\beta^2) &= gGh\beta^2 + Gh^2\beta^2 = 2,\end{aligned}$$

d. h. da $gGh\beta^2$ Null sein muss, weil dem Strahle g eine fünffache Bedingung auferlegt ist:

$$Gh^2\beta^2 = 2.$$

2) *System:* $(g+h)^7$.
Bekannt: $\varepsilon(g+h)^7 = 0$.
$$\sigma(g+h)^7 = 35\,\sigma g^4h^3 + 35\,\sigma g^3h^4 = 140\,Gh_s + 140\,g_sH$$
$$= 140\,\mu^3c^2gh + 140\,\mu^3c^2gh = 280;$$
Gefunden: $(g+h)^8 = 280$; $(g+h)^7\beta = 280$.

3) *System:* $(g+h)^6\beta$.
Bekannt: aus 2) $(g+h)^7\beta = 280$; $\varepsilon(g+h)^6\beta = 0$; $\sigma(g+h)^6\beta = 280$.
Gefunden: $(g+h)^6\beta^2 = 280$.

4) *System:* $(g+h)^5\beta^2$.
Bekannt: aus 3) $(g+h)^6\beta^2 = 280$; $\varepsilon(g+h)^5\beta^2 = 0$; $\sigma(g+h)^5\beta^2 = 280$.
Gefunden: $(g+h)^5\beta^3 = 280$.

5) *System:* $(g+h)^4\beta^3$.
Bekannt: aus 4) $(g+h)^5\beta^3 = 280$; $\sigma(g+h)^4\beta^3 = 216$.
Gefunden: $(g+h)^4\beta^4 = 248$ *und* $\varepsilon(g+h)^4\beta^3 = 32$.

6) *System:* $(g+h)^3\beta^4$.
Bekannt: aus 5) $(g+h)^4\beta^4 = 248$; $\sigma(g+h)^3\beta^4 = 120$.
Gefunden: $(g+h)^3\beta^5 = 184$; $\varepsilon(g+h)^3\beta^4 = 64$.

7) *System:* $(g+h)^2\beta^5$.
Bekannt: aus 6) $(g+h)^3\beta^5 = 184$; $\sigma(g+h)^2\beta^5 = 40$.
Gefunden: $(g+h)^2\beta^6 = 112$; $\varepsilon(g+h)^2\beta^5 = 72$.

8) *System:* $(g+h)\beta^6$.
Bekannt: aus 7) $(g+h)^2\beta^6 = 112$; $\sigma(g+h)\beta^6 = 0$.
Gefunden: $(g+h)\beta^7 = 56$; $\varepsilon(g+h)\beta^6 = 56$.

9) *System:* β^7.
Bekannt: aus 8) $(g+h)\beta^7 = 56$; $\sigma\beta^7 = 0$.
Gefunden: $\beta^8 = 28$; $\varepsilon = 28$.

In den folgenden Zahlentabellen sind alle fundamentalen Anzahlen der linearen Congruenzen angegeben, und ausserdem auch alle von Null verschiedenen Zahlen ε. Von zwei Zahlen, welche Bedingungssymbolen angehören, die sich dualistisch entsprechen, oder durch Vertauschung von g und h in einander übergehen, ist immer nur die eine angegeben, weil ja die andere ihr gleich ist.

A. Tabelle der Fundamentalzahlen der linearen Congruenzen.

1) $\beta^8 = 28$;
2) $\beta^7(g+h) = 56$; $\beta^7g = 28$;
3) $\beta^6(g+h)^2 = 112$; $\beta^6g_p = 9$; $\beta^6gh = 38$;

4) $\beta^5(g+h)^3 = 184$; $\beta^5 g_s = 4$; $\beta^5 g_e h = 14$;
5) $\beta^4(g+h)^4 = 248$; $\beta^4 G = 1$; $\beta^4 g_s h = 7$; $\beta^4 g_e h_e = 5$; $\beta^4 g_e h_p = 6$;
6) $\beta^3(g+h)^5 = 280$; $\beta^3 G h = 2$; $\beta^3 g_s h_e = 3$;
7) $\beta^2(g+h)^6 = 280$; $\beta^2 G h_e = 1$; $\beta^2 g_s h_s = 2$;
8) $\beta(g+h)^7 = 280$; $\beta G h_s = 1$;
9) $(g+h)^8 = 280$; $GH = 1$.

10) $B\beta^6 = 10$;
11) $B\beta^5(g+h) = 20$; $B\beta^5 g = 10$;
12) $B\beta^4(g+h)^2 = 40$; $B\beta^4 g_p = 3$; $B\beta^4 gh = 14$;
13) $B\beta^3(g+h)^3 = 64$; $B\beta^3 g_s = 1$; $B\beta^3 g_e h = 5$;
14) $B\beta^2(g+h)^4 = 80$; $B\beta^2 G = 0$; $B\beta^2 g_s h = 2$; $B\beta^2 g_p h_p = 2$; $B\beta^2 g_p h_e = 2$;
15) $B\beta(g+h)^5 = 80$; $B\beta G h = 0$; $B\beta g_s h_e = 1$;
16) $B(g+h)^6 = 80$; $BGh_e = 0$; $Bg_s h_s = 1$.

17) $B^2\beta^4 = 4$;
18) $B^2\beta^3(g+h) = 8$; $B^2\beta^3 g = 4$;
19) $B^2\beta^2(g+h)^2 = 16$; $B^2\beta^2 g_p = 1$; $B^2\beta^2 gh = 6$;
20) $B^2\beta(g+h)^3 = 24$; $B^2\beta g_s = 0$; $B^2\beta g_e h = 2$;
21) $B^2(g+h)^4 = 24$; $B^2 G = 0$; $B^2 g_s h = 0$; $B^2 g_e h_e = 1$; $B^2 g_e h_p = 1$.

22) $B^3\beta^2 = 2$:
23) $B^3\beta(g+h) = 4$; $B^3\beta g = 2$;
24) $B^3(g+h)^2 = 8$; $B^3 g_p = 0$; $B^3 gh = 4$.

25) $B^4 = 2$.

B. Tabelle der von Null verschiedenen Fundamentalzahlen der linearen Congruenz mit unendlich nahe liegenden erzeugenden Axen.

$\beta^7 = 28$; $\beta^6 k = 28$; $\beta^5 k_e = 9$; $\beta^4 k_s = 4$; $\beta^3 K = 1$;
$B\beta^5 = 10$; $B\beta^4 k = 10$; $B\beta^3 k_e = 3$; $B\beta^2 k_s = 1$;
$B^2\beta^3 = 4$; $B^2\beta^2 k = 4$; $B^2\beta k_e = 1$;
$B^3\beta = 2$; $B^3 k = 2$.

Viele der Fundamentalzahlen dieser beiden Tabellen A. und B. können auch direct geometrisch hergeleitet werden.

Beispiele:

1) $B^3 gh = 4$. Denn die drei Strahlen von B^3 und die Axe von g werden sämmtlich durch 2 Strahlen geschnitten, ebenso besitzen die drei Strahlen von B^3 und die Axe von h 2 Strahlen, die sie alle

schneiden, und jeder der beiden ersten Strahlen bestimmt mit jedem der beiden letzten Strahlen eine lineare Congruenz, welche $B^3 g h$ erfüllt.

2) $\varepsilon B^3 \beta = 2$. Denn die drei Strahlen von B^3 erzeugen eine Regelschaar von Strahlen, die sie alle drei schneiden, und dem Strahlbüschel von β gehören zwei Strahlen an, von denen jede Tangente dieser Regelschaar ist, und auf derselben zwei unendlich nahe Axen einer linearen Congruenz ε bestimmt, die $B^3\beta$ erfüllt.

3) $\varepsilon \beta^3 K = 1$. Denn der Strahl von K bestimmt auf jedem der drei gegebenen Strahlbüschel einen Strahl, welcher den Strabl von K schneidet; durch die so bestimmten drei Strahlen ist eine den Strahl von K enthaltende Regelschaar bestimmt; diejenigen beiden Strahlen, welche auf dieser Regelschaar in dem Strahle von K unendlich nahe liegen, sind erzeugende Axen einer linearen Congruenz ε, welche $\beta^3 K$ erfüllt. —

Durch Einsetzung der oben angegebenen Fundamentalzahlen und der zugehörigen Zahlen σ in die sämmtlichen zur Berechnung nicht benutzten Formeln der § 18., 19., 20. erhält man *Verificationen* entweder jener Zahlen oder dieser Formeln.

Z. B. Für das durch die Bedingung β^4 definirte System ist nach unsern Tabellen:

$$G = H = 1\,; \quad g_s h = g h_s = 7\,; \quad g_e h_e = g_p h_p = 5\,;$$
$$\varepsilon\beta^3 = 28\,; \quad \varepsilon\beta^2 k = 28\,; \quad \varepsilon\beta k^2 = \varepsilon\beta k_e + \varepsilon\beta k_p = 9 + 9 = 18.$$

Diese Werthe stimmen mit Formel (40) überein, da:

$$1 + 7 + 5 + 5 + 7 + 1 = 28 - 2 \cdot 28 + 3 \cdot 18.$$

Die Formel (49) stimmt ferner für das durch die Bedingung $(g+h)^3$ definirte System überein mit den Werthen:

$$\beta^5 (g+h)^3 = 184\,; \quad \beta^3 B (g+h)^3 = 64\,; \quad \beta B^2 (g+h)^3 = 24,$$

da

$$184 - 4 \cdot 64 + 3 \cdot 24 = 0$$

ist.

Wir haben bisher bei allen auf das Strahlenpaar bezüglichen Formeln und Anzahlen die allgemeinere Voraussetzung gemacht, dass die beiden Strahlen des Paars *zwei* Strahlenörter nullter Stufe ersten Grades, nicht aber *einen einzigen* Strahlenort nullter Stufe zweiten Grades darstellen. Setzen wir nun den specielleren Fall, dass beide Strahlen gleichberechtigt sind, und *einen einzigen Strahlenort repräsentiren*, und bezeichnen wir mit f die diesem Orte angehörige Axenbedingung, d. h. die Bedingung, welche verlangt, dass irgend eine der beiden Axen der linearen Congruenz einen gegebenen Strahl schneide, so ist nach dem Gesetze der Spaltung:

$$f = g + h.$$

Entsprechend ist, wenn f_p, f_s, F die Bedingungen bedeuten, dass irgend eine der beiden erzeugenden Axen durch einen gegebenen Punkt gehe, resp. in einem gegebenen Strahlbüschel liege, resp. gegeben sei:

$$f_p = g_p + h_p,$$
$$f_s = g_s + h_s,$$
$$F = G + H.$$

Die Zahlen der obigen Tabelle ergeben daher diesen Formeln gemäss die Fundamentalzahlen einer linearen Congruenz, deren beide Axen nur einen einzigen Ort repräsentiren.

Z. B. aus $B^2(g+h)^4 = 24$ folgt:

$$B^2 f^4 = 24,$$

d. h. *in Worten:*

„Es giebt 24 *lineare Congruenzen, welche zwei gegebene Strahlen enthalten und ihre beiden Axen* 4 *gegebene Strahlen so schneiden lassen, dass jeder Strahl von nur* 1 *Axe geschnitten wird.“*

oder:

„Die ∞^4 *Strahlen der* ∞^2 *linearen Congruenzen, welche einen gegebenen Strahl enthalten, und ihre Axen durch* 4 *gegebene Strahlen schicken, füllen den Strahlenraum* 24*mal aus.“*

oder:

„Die ∞^1 *Axen der* ∞^1 *linearen Congruenzen, welche zwei gegebene Strahlen enthalten, und ihre Axen durch* 3 *gegebene Strahlen schicken, bilden eine Regelfläche vom* 24*ten Grade.“*

Uebrigens müssen diejenigen der obigen Fundamentalzahlen, welche ein g oder h angehöriges Symbol gar nicht enthalten, durch 2 dividirt werden, damit eine Fundamentalzahl für eine lineare Congruenz erscheine, deren erzeugende Axen nur einen einzigen Strahlenort repräsentiren.

Z. B. aus $\beta^8 = 28$ fogt:

„Es giebt 14 *lineare Congruenzen, welche in* 8 *gegebenen Strahlbüscheln je einen Strahl besitzen können.“*

oder:

„Die ∞^3 *Strahlen der linearen Congruenzen, welche* 7 *gegebenen Strahlbüscheln Strahlen zuzuschicken vermögen, bilden einen Complex* 14*ten Grades.“*

§ 25.

Abhängigkeit der auf das Sturm'sche Problem der räumlichen Projectivität bezüglichen Anzahlen von einander durch die auf das Strahlenpaar bezüglichen Formeln.

Die Abzählungsresultate, welche Herr Sturm in seiner Abhandlung „Das Problem der räumlichen Projectivität“ (Math. Ann. Bd. VI,

p. 513—550) findet, sind zum grossen Theil durch die Formeln des § 18. von einander abhängig. Wir constatiren hier die Anwendbarkeit unserer Formeln auf das genannte Problem, ohne uns dabei irgendwie dem Charakter dieses Problems nähern zu wollen. Dasselbe lautet in einer unserm Zwecke entsprechenden Formveränderung:

„Gegeben sind im Raume zwei Gruppen von je n Punkten, welche einander entsprechend zugeordnet sind; das von einem solchen Strahlenpaar erzeugte System $(11-n)^{ter}$ *Stufe zu untersuchen, dessen beide Strahlen beziehlich mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden, projectivische Ebenenwürfe liefern, in denen die nach homologen Punkten gehenden Ebenen entsprechend sind.“*

Für ein solches Strahlenpaar giebt es, der Natur des Problems gemäss, nur solche Coincidenzen, welche wir früher als von der vierten Gattung bezeichneten, d. h. jeder Punkt eines Coincidenzstrahles kann als Schnittpunkt der beiden zusammenfallenden Strahlen, und jede Ebene durch den Coincidenzstrahl kann als Schnittebene derselben aufgefasst werden, mit andern Worten, die Coincidenz ε eines solchen Paares erfüllt immer jede Bedingung β^3 von selbst (vergl. § 21. und § 17.). Daher sind für die Systeme von Strahlenpaaren, die durch die räumliche Projectivität bestimmt werden, alle ε, welche die Bedingung β^3 nicht enthalten, gleich Null. Wir bezeichnen nun im Folgenden immer, wie Sturm, die beiden zusammengehörigen Gruppen von je n Punkten mit $A^n B^n$, ferner geben wir an: erstens die Stufe des dadurch bestimmten Systems von Strahlenpaaren $(11-n)^{ter}$ Stufe, zweitens die Nummern der anzuwendenden Formeln aus § 18., und drittens die von Sturm gefundenen oder von uns danach bestimmten numerischen Werthe der auf das System bezüglichen Bedingungssymbole in der Schreibweise des § 18., indem wir diejenigen Coincidenzsymbole fortlassen, deren Werth Null ist.

1) Punktgruppen A^1B^1, System 7^{ter} Stufe, Formel (44),
$$Gh_s = g_s H = 2\,;\quad \varepsilon\beta^3 k_s = 4\,.$$

2) Punktgruppen A^5B^5, System 6^{ter} Stufe, Formel (43),
$$Gh_e = g_e H = 3\,;\quad g_s h_s = 5\,;\quad \varepsilon\beta^5 k_e = 11\,.$$

3) Punktgruppen A^5B^5, System 6^{ter} Stufe, Formel (42),
$$Gh_p = g_p H = 1\,;\quad g_s h_s = 5\,;\quad \varepsilon\beta^3 k_p = 7\,.$$

4) Punktgruppen A^6B^6, System 5^{ter} Stufe, Formel (41),
$$Gh = Hg = 2\,;\quad g_s h^2 = g^2 h_s = 3 + 9\,;\quad \varepsilon\beta^3 k = 28\,.$$

5) Punktgruppen A^7B^7, System 4^{ter} Stufe, Formel (40),
$$G = H = 1;\quad g_s h = g h_s = 7;\quad g_p h_p = 3;\quad g_e h_e = 19;\quad \varepsilon\beta^3 = 38.$$

6) Punktgruppen A^8B^8, System 3^{ter} Stufe, Formeln (28), (29), (30). Aus Sturm's Resultaten:

$$g_s = h_s = 4; \quad g_e h = g h_e = 16; \quad g_p h = g h_p = 8 \ .$$

folgt:

$$\mu^2\sigma = 32; \quad c^2\sigma = 16; \quad \mu c\sigma = 56 \ .$$

7) Punktgruppen A^9B^9, System 2^{ter} Stufe, Formeln (25), (26). Aus Sturm's Resultaten:

$$g_e = h_e = 10; \quad gh = 16; \quad g_p = h_p = 6$$

folgt:

$$\mu\sigma = 36; \quad c\sigma = 28 \ .$$

8) Punktgruppen $A^{10}B^{10}$, System 1^{ter} Stufe, Formel (18). Aus Sturm's Resultaten:

$$g = h = 20$$

folgt:

$$\sigma = 40 \ .$$

Die von Sturm angegebenen Zahlen reichen übrigens auch aus, um für jedes System die numerischen Werthe aller übrigen auf das Strahlenpaar und das Schneidepaar bezüglichen Bedingungen zu berechnen.

Z. B. Für das durch die Punktgruppen A^9B^9 bestimmte System zweiter Stufe ergiebt sich aus

$$\beta^2 = (g+h)^2 - \varepsilon(2k+\beta)$$

$$\beta^2 = g_p + g_e + h_p + h_e + 2gh - 2k\varepsilon - \beta\varepsilon = 6 + 10 + 6 + 10 + 2 \cdot 16,$$

d. h. *es giebt* 64 *sich entsprechende Strahlen, die so liegen, dass von zwei gegebenen Strahlbüscheln jeder einen Strahl enthält, der die beiden sich entsprechenden Strahlen schneidet.*

Für das durch die Punktgruppen A^6B^6 bestimmte System 5^{ter} Stufe ergiebt sich aus:

$$\mu^3 c\sigma = g_s h_e + g_e h_s - \varepsilon(\beta^2 k_e - \beta k_s + K) \text{ (Formel (36))},$$

dass $\mu^3 c\sigma = 9 + 9 = 18$ ist,

d. h. *die Schnittpunkte derjenigen sich entsprechenden Strahlen, welche zugleich in einer gegebenen Ebene liegen, bilden auf dieser eine Curve* 18^{ter} *Ordnung.*

Für das durch die Punktgruppen A^7B^7 bestimmte System 4^{ter} Stufe ergiebt sich aus:

$$\mu^2 c\sigma = g_s h + g^2 h^2 + gh_s - g_p h_p - \varepsilon(\beta^2 k - \beta k_p + 3k_s) \text{ (Formel 34)},$$

dass $\mu^2 c\sigma = 7 + (3 + 19 + 6 + 6) + 7 - 3 = 45$,

d. h. *die Schnittebenen derjenigen sich entsprechenden und zugleich sich schneidenden Strahlen, deren Schnittpunkte auf einer gegebenen Ebene liegen, umhüllen eine Fläche von der* 45^{ten} *Classe.*

§ 26.

Die Ablesung von Productensätzen aus den eigentlichen Correspondenzformeln.

Im Allgemeinen wollen wir unter *Productensatz* jeden Satz verstehen, welcher *eine Fundamentalzahl des Systems derjenigen Elemente, die zweien von ein und demselben Elemente erzeugten Systemen gemeinsam sind, durch Fundamentalzahlen dieser beiden Systeme ausdrückt.* Aus den allgemeinen Bemerkungen des § 1. folgt, dass das System der gemeinsamen Elemente die Stufe

$$\alpha + \beta - c$$

hat, wenn α und β die Stufen der beiden Systeme sind, und c die Constantenzahl des dieselben erzeugenden Gebildes ist. Unter Fundamentalzahl eines Systems nullter Stufe ist natürlich die *Anzahl* der dieses System bildenden Elemente zu verstehen.

Die Productensätze für Systeme von Punkten und Ebenen sind von Alters her *durch die Algebra* bekannt, welche lehrt, dass das *Product* der Grade zweier Gleichungen den Grad der zugehörigen Eliminationsgleichung giebt.

Die Productensätze für Systeme von Strahlen sind erst in den letzten Jahren *von Halphen* (C. R. Bd. 68, 1869, p. 141 und C. R. Bd. 74, 1872, p. 41) *präcis aufgestellt*, und von ihm und Zeuthen (C. R. Juni 1874) bewiesen worden.

Die Productensätze für Systeme von Kegelschnitten in fester Ebene sind im Anschluss an die berühmte Chasles'sche Vermuthung „$\alpha\mu + \beta\nu$" (C. R. 1864 u. folg. Jahre) namentlich studirt worden von:

Cremona (C. R. Bd. 59, p. 776),
Clebsch (Math. Ann. Bd. VI, p. 1),
Halphen (Bull. de la Soc. math., Bd. 1, 1873, p. 130 u. p. 233),
Lindemann („Vorlesungen von Clebsch," p. 400 bis 406).

Productensätze für Systeme anderer Gebilde, als der eben genannten 4 Gebilde, sind bisher noch nicht aufgefunden worden.

Die Productensätze für Systeme von Punkten, Strahlen und Ebenen stecken als sehr specielle Fälle in unsern eigentlichen Correspondenzformeln für das Punktepaar, das Strahlenpaar und das Ebenenpaar. Sind nämlich allgemein zwei Systeme α^{ter} und β^{ter} Stufe gegeben, welche von ein und demselben Element mit der Constantenzahl c erzeugt sind, so bestimmt jedes der ∞^{α} Elemente des ersten Systems mit jedem der ∞^{β} Elemente des zweiten Systems ein Paar. Daher bestimmen die beiden Systeme ein System $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe von Paaren. Wir wissen aber, dass, wie schon oben erwähnt ist, die in diesem System $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe vorhandenen Coincidenzen ein System von der Stufe

$$\alpha + \beta - c$$

bilden. Mit andern Worten, während das allgemeine Paar die Constantenzahl $2c$ hat, hat jede Coincidenz desselben die Constantenzahl c, das heisst eine um c kleinere Constantenzahl. Dies giebt bei Ausdehnung des in § 17. gegebenen Begriffs der *Gattung einer Coincidenz* von Punktepaaren auf Paare überhaupt, dass jedes gemeinsame Element zweier von ein und demselben Element erzeugten Systeme α^{ter} Stufe und β^{ter} Stufe eine Coincidenz *höchster Gattung* derjenigen Paare bildet, welche von je einem Element des einen und je einem Element des andern Systems erzeugt werden.

Sind also specieller die die Systeme erzeugenden Elemente Punkte, Ebenen oder Strahlen, so ist das eben erwähnte gemeinsame Element eine Punktcoincidenz oder eine Ebenencoincidenz oder eine Strahlencoincidenz, welche die Bedingung g_p resp. die reciproke (§ 17.) resp. die Bedingung β^3 (§ 21.) von selbst zu erfüllen vermag. Wenn wir daher auf ein in der angegebenen Weise aus zwei Oertern α^{ter} und β^{ter} Stufe entstandenes System $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe von Hauptelementenpaaren eine unserer Correspondenzformeln $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Dimension anwenden, so *verschwinden in dieser alle Coincidenzsymbole, ausser denjenigen, welche εg_p resp. das reciproke zu εg_p, resp. $\varepsilon\beta^3$ implicite enthalten.* Ist ein solches nicht verschwindendes Coincidenzsymbol gleich εg_p resp. reciprok dazu, resp. gleich $\varepsilon\beta^3$, so giebt es die *Zahl* der den Oertern α^{ter} Stufe und β^{ter} Stufe *gemeinsamen* Elemente an. Sind diese Symbole noch mit einer auf den Coincidenzpunkt resp. die Coincidenzebene resp. den Coincidenzstrahl bezüglichen Grundbedingung multiplicirt, so geben sie eine *Gradzahl des Orts* der *gemeinsamen* Elemente an, die immer aus dieser Grundbedingung leicht ersichtlich ist. Ist ferner ein Glied der linken Seite der Correspondenzformel, welche wir auf das System $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe von Hauptelementenpaaren anwenden wollten, derartig aus zwei symbolischen Factoren zusammengesetzt, dass der eine Factor von einem dem Orte α^{ter} Stufe angehörigen Elemente eine α-fache Grundbedingung verlangt, der andere Factor von einem dem Orte β^{ter} Stufe angehörigen Elemente eine β-fache Grundbedingung verlangt, so wird dieses Glied von jedem Paare befriedigt, dessen erstes Hauptelement die α-fache Grundbedingung, und dessen zweites Hauptelement die β-fache Grundbedingung erfüllt, d. h. der numerische Werth eines solchen Gliedes ist gleich dem *Product zweier aus diesen Grundbedingungen ersichtlichen Gradzahlen der beiden Oerter.* Besteht aber ein Glied jener Correspondenzformel derartig aus zwei symbolischen Factoren, dass der eine Factor von einem dem Orte α^{ter} Stufe angehörigen Elemente eine Grundbedingung verlangt, deren Dimension von α verschieden ist, und dass der andere Factor von einem dem Orte β^{ter} Stufe angehörigen Elemente eine Grundbedingung verlangt, deren Dimension nun also auch von β verschieden sein muss, so kann dieses Glied von keinem Paare erfüllt

werden, weil ein Ort von selbst keine Grundbedingung erfüllen kann, deren Dimension grösser ist als seine Stufenzahl. Desshalb *verschwindet* jedes Glied von solcher Beschaffenheit bei der Anwendung einer Correspondenzformel $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe auf das durch zwei Oerter α^{ter} und β^{ter} Stufe bestimmte System $(\alpha+\beta)^{\text{ter}}$ Stufe von Hauptelementenpaaren. Wenden wir also eine *eigentliche* Correspondenzformel auf dieses System an, d. h. eine solche Formel, deren Glieder auf der linken Seite, abgesehen von einer allen gemeinsamen Trägerbedingung, *nur* Grundbedingungen enthalten, die sich auf die beiden das Paar constituirenden Hauptelemente beziehen, *so verschwinden links alle Glieder bis auf das eine resp. die beiden Glieder, deren erster Factor eine α-fache, deren zweiter eine β-fache Grundbedingung ausspricht.* Dies Glied aber, resp. jedes dieser beiden Glieder ergiebt das Product zweier Gradzahlen der beiden Oerter. Die Fälle, wo die beiden gegebenen Oerter einen gemeinsamen Träger besitzen, erledigen sich durch die mit der zugehörigen Trägerbedingung symbolisch multiplicirten Correspondenzformeln.

Wir stellen nun in den folgenden beiden Tabellen die eigentlichen Correspondenzformeln für Punktepaare und Strahlenpaare zum Zweck der Ablesung der Productensätze für Punktörter und Strahlenörter noch einmal zusammen, indem wir die verschwindenden Coincidenzsymbole fortlassen. Wir bemerken, dass *jedes* Glied der linken Seite der mit der Nummer n versehenen Correspondenzformel einen Productensatz für einen Fall ausspricht, wo die Stufensumme der beiden gegebenen Oerter $\alpha+\beta$ gleich n ist, wobei an einigen Stellen zwei durch eine Klammer vereinigte als ein einziges Glied gelten. Freilich können die meisten dieser Productensätze als selbstverständlich angesehen werden, nämlich alle diejenigen, bei denen der eine der beiden gegebenen Oerter *nullter oder höchst möglicher* Stufe ist. Zwei in c und d resp. g und h symmetrische Glieder ergeben natürlich ein und denselben Satz.

Für zwei Punktörter (§ 16.).

1) $$G(c+d) = G\varepsilon\,,$$
2) $$g_e(c^2+cd+d^2) = g_e g\varepsilon\,,$$
3) $$c^3+c^2d+cd^2+d^3 = g_p\varepsilon\,,$$
4) $$c^2d+c^2d^2+cd^3 = bg_p\varepsilon\,,$$
5) $$c^3d^2+c^2d^3 = b^2g_p\varepsilon\,,$$
6) $$c^3d^3 = b^3g_p\varepsilon\,.$$

Für zwei Strahlenörter (§ 18. und § 20.).

1) $$\mu^3c^2\sigma(g+h) = \mu^3c^2\sigma\varepsilon\,,$$
2) $$\mu^3\sigma(g_e+gh+h_e) = \mu^3\beta\sigma\varepsilon\,,$$
2a) $$c^3\sigma(g_p+gh+h_p) = c^3\beta\sigma\varepsilon\,,$$

$$3) \qquad B(g_s+g_p h+g h_p+h_s) = B\beta^2\varepsilon\,,$$

$$3a) \qquad B(g_s+g_e h+g h_e+h_s) = B\beta^2\varepsilon\,,$$

$$4) \qquad G+g_s h+(g_e h_e+g_p h_p)+g h_s+H = \beta^3\varepsilon\,,$$

$$5) \qquad Gh+(g_s h_p+g_s h_e)+(g_p h_s+g_e h_s)+gH = k\beta^3\varepsilon\,,$$

$$6) \qquad Gh_p+g_s h_s+g_p H = k_p\beta^3\varepsilon\,,$$

$$6a) \qquad Gh_e+g_s h_s+g_e H = k_e\beta^3\varepsilon\,,$$

$$7) \qquad Gh_s+g_s H = k_s\beta^3\varepsilon\,,$$

$$8) \qquad GH = K\beta^3\varepsilon\,.$$

Beispiele der Ablesung für Punktörter:

1) Für den Fall, dass zwei in einer Ebene gelegene Punktörter erster Stufe gegeben sind, verschwinden auf der linken Seite der Formel (2) alle Glieder bis auf das zweite

$$g_e c d\,,$$

desshalb ist die Zahl der gemeinsamen Punkte gleich dem *Producte der Gradzahlen der Oerter.*

2) Für den Fall, dass zwei Punktörter zweiter Stufe gegeben sind, verschwinden auf der linken Seite der Formel (4) alle Glieder bis auf das zweite

$$c^2 d^2\,,$$

desshalb ist $b g_p \varepsilon$, das heisst, die Gradzahl des Orts erster Stufe der gemeinsamen Punkte, gleich dem *Producte der Gradzahlen der Oerter.*

3) Für den Fall, dass ein Punktort dritter Stufe a^{ten} Grades, d. h. der a-fach zu rechnende Punktraum, und ein Punktort zweiter Stufe b^{ten} Grades, d. h. eine Fläche b^{ter} Ordnung gegeben ist, verschwinden auf der linken Seite der Formel (5) alle Glieder bis auf das erste

$$c^3 d^2\,,$$

wir erhalten daher das auch selbstverständliche Resultat, dass $b^2 g_p \varepsilon$, d. h. der Grad des dem Punktort zweiter Stufe und dem Punktort dritter Stufe gemeinsamen Punktorts zweiter Stufe, gleich $a \cdot b$, dem *Producte der Gradzahlen beider Oerter* ist.

Beispiele der Ablesung für Strahlenörter:

1) Für den Fall, dass ein in einer Strahlenaxe gelegener Strahlenort zweiter Stufe und ein in derselben Axe gelegener Strahlenort erster Stufe gegeben ist, verschwinden auf der linken Seite jeder der beiden Formeln (3) alle Glieder bis auf das zweite. Diese Glieder sind in beiden Formeln gleich, da

$$B g_p = (\beta g - g^2) g_p = \beta g_s - G$$

ist, und auch

$$B g_e = (\beta g - g^2) g_e = \beta g_s - G$$

ist; die Formeln sagen also beide dasselbe aus. Wir erhalten daher in unserm Falle das Resultat, dass die Zahl der gemeinsamen Strahlen einer Congruenz und einer Regelfläche, welche beide ihre sämmtlichen Strahlen durch dieselbe Axe schicken, gleich dem *Producte ihrer Gradzahlen ist, wobei es bei der Congruenz gleichgültig ist, ob man den Bündelgrad oder den Feldgrad nimmt, da beide in diesem Falle gleich sein müssen.*

2) Für den Fall, dass zwei Strahlenörter zweiter Stufe gegeben sind, von denen der erste den Feldgrad a und den Bündelgrad a' haben möge, der zweite den Feldgrad b und den Bündelgrad b' haben möge, verschwinden auf der linken Seite der Formel (4) alle Glieder bis auf das in eine Klammer eingeschlossene, aus zwei Summanden bestehende Glied:

$$g_e h_e + g_p h_p;$$

der erste Summand wird von jedem Strahlenpaare erfüllt, dessen dem ersten Orte angehöriger Strahl in einer gegebenen Ebene liegt, und dessen dem zweiten Orte angehöriger Strahl auch in einer gegebenen Ebene liegt; der zweite Summand wird von jedem Strahlenpaare erfüllt, dessen dem ersten Orte angehöriger Strahl durch einen gegebenen Punkt geht, und dessen dem zweiten Orte angehöriger Strahl auch durch einen gegebenen Punkt geht. *Wir erhalten so für diesen Fall den bekannten Halphen'schen Satz, dass die Zahl der gemeinsamen Strahlen der beiden Oerter*

$$ab + a'b'$$

ist.

3) Für den Fall, dass ein Strahlenort zweiter Stufe und ein Strahlenort dritter Stufe gegeben ist, verschwinden auf der linken Seite der Formel (5) alle Glieder bis auf das dritte

$$g_p h_s + g_e h_s;$$

desshalb ist der Grad der von den gemeinsamen Strahlen beider Oerter gebildeten Regelfläche gleich dem *Producte aus dem Grade des Orts dritter Stufe und der Summe des Bündelgrads und des Feldgrads des Orts zweiter Stufe.*

Der im Voranstehenden geschilderte Zusammenhang zwischen den Productensätzen und den eigentlichen Correspondenzformeln, konnte zwar den bekannten Resultaten keine neuen hinzufügen, wohl aber die bekannten Productensätze aus gemeinsamer Quelle und in einer Weise beweisen, welche dem Charakter derselben am meisten entsprechen möchte. Da jeder Productensatz sich als ein sehr specieller Fall einer eigentlichen Correspondenzformel dadurch erweist, dass für ihn von den Gliedern der linken Seite der Correspondenzformel nur ein einziges gewisses Glied nicht verschwindet, so wäre es möglich gewesen,

aus den bekannten sämmtlichen Productensätzen auf die Gestalt der linken Seite jeder eigentlichen Correspondenzformel *inductiv* zu schliessen.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle besonders hervorheben, dass *die Productensätze für jedes andere Gebilde, als Punkt, Strahl, Ebene in analoger Weise in gewissen Correspondenzsätzen für Systeme enthalten sein müssen, die von einem aus zwei solchen Gebilden bestehenden Paare erzeugt werden.* Namentlich also würden die für Kegelschnitte in fester Ebene aufgestellten Productensätze enthalten sein müssen in den noch unbekannten Correspondenzformeln, welche für Systeme von Kegelschnitt-Paaren in fester Ebene gelten müssen. *Vielleicht könnten umgekehrt die bekannten Productensätze benutzt werden, um diese Correspondenzformeln, wenn auch vorläufig nur in ihren wichtigsten Gliedern, und unter gewissen Beschränkungen, inductiv abzuleiten.*

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diesem § noch die Bemerkung hinzuzufügen, dass im Vorangehenden hinreichend Mittel geboten sind, um *für jeden Productensatz einen kurzen Beweis zuzuschneiden,* welcher die Anwendung des Princips der speciellen Lage und nur einmalige Anwendung des Chasles'schen Corr.-Pr. enthält, und welcher, unbekümmert um andere Fragen direct auf sein Ziel lossteuert. Einen solchen Beweis lassen wir hier folgen, und zwar für den Halphen'schen Productensatz, weil dieser am längsten unbekannt war, und desshalb ein neuer Beweis desselben am meisten interessiren möchte.

Am kürzesten scheint der Beweis zu sein, welcher sich an Formel (63) in § 20. anschliesst. Diese Formel ergiebt sich aus der Formel (56), die ja unmittelbar aus dem Corr.-Pr. floss, am schnellsten durch sbl. Mult. mit μc und Benutzung von (10), (11), (14). Der Halphen'sche Satz folgt dann dadurch, dass $g_3\sigma$ uud $h_3\sigma$ verschwinden, so dass übrig bleibt

$$\mu^3\sigma + c^3\sigma = \varepsilon\sigma(\mu c).$$

Diese Operation ergiebt folgenden Beweis), in welchem die Symbolik des Verfassers und die Grundformeln des* § 9. *absichtlich nicht vorausgesetzt sind.*

Beweis des Halphen'schen Satzes.

Die beiden Congruenzen C_1 und C_2 mögen in jeder Ebene a_1 resp. a_2 Strahlen besitzen, und durch jeden Punkt a_1' resp. a_2' Strahlen schicken. Wir bezeichnen nun mit *„Paar"* je zwei *sich schneidende* Strahlen, von denen der eine s_1 der Congruenz C_1, der andere s_2 der Congruenz C_2 angehört. Jedes Paar besitzt einen Schnittpunkt und eine Schnittebene. Jeder der x *gemeinsamen* Strahlen s der beiden Congruenzen ist ein Paar, dessen s_1 und s_2 derartig zusammenfallen, dass *jeder Punkt auf*

*) Diesen Beweis hat der Verfasser schon im Januar 1874 einigen Mathematikern brieflich mitgetheilt.

ihm als Schnittpunkt, jede Ebene durch ihn als Schnittebene des Paares angesehen werden kann. Die Strahlen s gehören also immer zu denjenigen Paaren, deren Schnittpunkte auf einer beliebigen gegebenen Ebene E liegen, und deren Schnittebenen durch einen beliebigen Punkt P gehen, und sind unter diesen Paaren diejenigen, deren s_1 und s_2 zusammenfallen. Wir bestimmen daher *nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip in einem Strahlbüschel*, dessen Scheitel Q und dessen Ebene F heisse, die Zahl derjenigen Strahlen, in denen zwei Strahlen von solcher Beschaffenheit zusammenfallen, dass der eine g_1 den Strahl s_1, der andere g_2 den Strahl s_2 eines Paares schneidet, dessen Schnittpunkt auf einer beliebigen Ebene E liegt, und dessen Schnittebene durch einen beliebigen Punkt P geht, und erhalten also,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi + \varepsilon + x$$

wo α_1 resp. α_2 die Zahl der Paare ist, deren s_1 resp. s_2 einen gegebenen Strahl g_1 resp. g_2 schneidet, während ihr Schnittpunkt auf E liegt, und ihre Schnittebene durch P geht,

wo π die Zahl der Paare ist, deren Schnittpunkt auf E liegt, und deren Schnittebene sowohl durch P, wie auch durch den Scheitel des Büschels Q geht, d. h. durch eine Gerade geht,

wo ε die Zahl der Paare ist, deren Schnittebene durch P geht, und deren Schnittpunkt sowohl auf E, wie auch auf der Büschelebene F liegt, d. h. auf einer Geraden liegt,

und wo endlich x die gesuchte Zahl der gemeinsamen Strahlen ist.

Demnach ist:

$$x = (\alpha_1 - \pi) + (\alpha_2 - \varepsilon).$$

Man erkennt nun leicht *durch das Princip der speciellen Lage*, dass der erste Summand rechts gleich p ist, und der zweite gleich e ist, wenn p die Zahl der Paare ist, welche ihren Schnittpunkt in einem gegebenen Punkte, und e die Zahl derer ist, welche ihre Schnittebene in einer gegebenen Ebene haben. Denn legt man einen eben g_2 genannten Strahl und einen eben P genannten Punkt in eine eben E genannte Ebene, so zerlegt sich die Zahl α_2 in die Zahl derjenigen Paare, welche ihren Schnittpunkt auf g_2 haben, und zugleich ihre Schnittebene durch P schicken, und die Zahl derjenigen Paare, deren Schnittebene die Ebene E ist, d. h. in die Zahl ε und die Zahl e. Es ist also:

$$\alpha_2 - \varepsilon = e,$$

ebenso natürlich auch:

$$\alpha_1 - \varepsilon = e,$$

und dualistisch entsprechend:

$$\alpha_2 - \pi = p,$$
$$\alpha_1 - \pi = p.$$

Daher erhalten wir

$$x = p + e.$$

Damit ist der Halphen'sche Satz bewiesen. Denn

$$e = a_1 \cdot a_2, \text{ und } p = a_1' \cdot a_2',$$

da der Voraussetzung gemäss, in einer Ebene E die Congruenz C_1 a_1, die Congruenz C_2 a_2 Strahlen besitzt, da ferner jeder dieser a_1 Strahlen mit jedem dieser a_2 Strahlen ein Paar giebt, dessen Schnittebene die Ebene E ist, und da endlich das dualistisch entsprechende für einen Punkt P gilt.

§ 27.

Lösung der Probleme der an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung.

Die in § 16. entwickelte allgemeinere Auffassung des Correspondenzprincips zwischen Punkten ergiebt mit Leichtigkeit sowohl die schon bestimmten, wie auch die bisher noch nicht bestimmten *Gradzahlen der Oerter, welche von den eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung F_n an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten, deren Berührungspunkten und deren einfachen Schnittpunkten gebildet werden.*

Der Kürze wegen bezeichnen wir mit

$$„s_{\alpha\beta\gamma\delta},“$$

wo α, β, γ oder δ nur geschrieben wird, wenn es mindestens gleich zwei ist, jeden Strahl, welcher von F_n an einer Stelle α, an einer zweiten β, an einer dritten γ, an einer vierten δ unendlich nahe Punkte enthält. Jeden der ∞^4 Strahlen, die im Allgemeinen F_n an n Stellen einpunktig schneiden, bezeichnen wir mit „s_1.“ Jeden Punkt, in welchem ein solcher Strahl s_x p unendlich nahe Punkte von F_n enthält, d. h. p-punktig berührt, nennen wir „$(s_x r_p)$,“ oder auch „*einen Punkt r_p des Strahls s_x*“, und jeden Punkt, in welchem ein solcher Strahl s_x nur *einen* Punkt der Fläche enthält, m. a. W. die Fläche *schneidet*, „*einen seiner Punkte r_1*“ oder „$(s_x r_1)$“. Das Problem, welches die Bestimmung der Gradzahlen des von einem s_x erzeugten Strahlenorts oder der von seinen Punkten r erzeugten Punktörter verlangt, bezeichnen wir auch mit s_x. Dann sind folgende Probleme möglich (vergl. Salmon-Fiedler's Raumgeometrie II. Aufl. II. Th. Art. 447 und 462):

$$s_2;\ s_3, s_{22};\ s_4, s_{32}, s_{222};\ s_5, s_{42}, s_{322}, s_{33}, s_{2222}.$$

Von diesen Problemen ist

1) in den Plücker'schen Formeln als specieller Fall enthalten:

$$s_2;$$

2) seit lange vollständig gelöst:

$$s_3, s_{22}$$

(vergl. Salmon-Fiedler, II. Th., II. Aufl., Art. 13 u. f. Cremona's Teoria delle superf. in Curtze's Uebers. Nr. 67);

3) durch Salmon algebraisch gelöst:

$$s_4, s_{32}, s_{222}$$

(vergl. Salmon, Quart. Journ. Bd. 1, und Salmon-Fiedler, II. Th., II. Aufl., Art. 447 u. f.);

4) durch Clebsch algebraisch behandelt:

$$s_4$$

(vergl. Clebsch, Crelle-Borch. J. Bd. 58, p. 93)*);

5) durch Sturm mit synthetischer Abzählung behandelt:

$$s_4, s_{32}$$

(vergl. Sturm, Crelle-Borch. J. Bd. 72, p. 350);

6) bisher noch nicht gelöst:

$$s_5, s_{42}, s_{322}, s_{33}, s_{2222}$$

(vergl. Salmon-Fiedler, II. Th., II. Aufl., Art. 465, letzte Zeile).

Unsere *Lösung dieser* 11 *Probleme* beruht darauf, dass wir unsere in § 16. entwickelten Punktepaarformeln auf alle diejenigen Systeme vierter bis erster Stufe von Punktepaaren anwenden, welche erzeugt werden von allen möglichen zwei Punkten:

1) r_1 und r_1 jedes der ∞^4 Strahlen s_1 (giebt Problem s_2),
2) r_2 und r_1 jedes der ∞^3 Strahlen s_2 (Problem s_3),
3) r_1 und r_1 jedes der ∞^3 Strahlen s_2 (Problem s_{22});

4) r_3 und r_1 jedes der ∞^2 Strahlen s_3 (Problem s_4),
5) r_1 und r_1 jedes der ∞^2 Strahlen s_3 (Problem s_{32});

6) r_2 und r_2 jedes der ∞^2 Strahlen s_{22} (Problem s_4),
7) r_2 und r_1 jedes der ∞^2 Strahlen s_{22} (Problem s_{32}),
8) r_1 und r_1 jedes der ∞^2 Strahlen s_{22} (Problem s_{222});

9) r_4 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_4 (Problem s_5),
10) r_1 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_4 (Problem s_{42});

11) r_3 und r_2 jedes der ∞^1 Strahlen s_{32} (Problem s_5),
12) r_3 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_{32} (Problem s_{42}),
13) r_2 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_{32} (Problem s_{33}),
14) r_1 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_{32} (Problem s_{322});

*) Voss bestimmt (Math. Ann. Bd. IX, p. 483) die Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung auch auf Flächen mit Doppel- und Rückkehrcurve und auf windschiefen Flächen.

15) r_2 und r_2 jedes der ∞^1 Strahlen s_{222} (Problem s_{42}),
16) r_2 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_{222} (Problem s_{322}),
17) r_1 und r_1 jedes der ∞^1 Strahlen s_{222} (Problem s_{2222}).

Die in dieser Tabelle einem der 17 Systeme nachgesetzte Klammer giebt dasjenige unter den oben aufgestellten 11 Problemen s an, dessen Lösung durch die Coincidenzen dieses Systems erhalten werden kann. Der Umstand, dass *mehrere* Anzahlen aus zwei oder drei Systemen gewonnen werden können, wird für die Controle der Rechnung nutzbar.

Der Verfasser behandelt *im Folgenden nur die Systeme* 9) *bis* 17), weil die aus ihnen resultirenden Anzahlen *bisher unbekannt* waren, bemerkt jedoch, dass er durch die analoge Behandlung der Systeme 1) bis 8) *die durch Salmon und Sturm bekannten Anzahlen ohne Schwierigkeit gewonnen hat.*

Die Systeme 9) bis 17) sind sämmtlich erster Stufe. In Uebereinstimmung mit den Symbolen des § 16. bezeichnen wir die einfache Grundbedingung, welche sich auf den in jedem Systeme zuerst genannten Punkt bezieht, mit c, die auf den zweiten Punkt bezügliche einfache Grundbedingung mit d, die auf den Verbindungsstrahl bezügliche einfache Grundbedingung mit g, die Anzahl der Coincidenzen mit ε. Dann besteht zwischen c, d, g, ε die auf das Punktepaar erster Stufe bezügliche Formel (§ 16., Formel (I))

$$c + d - g = \varepsilon.$$

Wir brauchen daher für die Systeme 9) bis 17) nur folgende 10 Zahlen:

$$s_4,\ (s_4 r_4),\ (s_4 r_1);$$
$$s_{32},\ (s_{32} r_3),\ (s_{32} r_2),\ (s_{32} r_1);$$
$$s_{222},\ (s_{222} r_2),\ (s_{222} r_1),$$

wo s_x resp. $(s_x r_p)$ die *Gradzahl* des von den ∞^1 Strahlen s_x resp. den ∞^1 Punkten $(s_x r_p)$ erzeugten Ortes erster Stufe bedeute.

Von diesen Zahlen sind durch Salmon bekannt und vom Verfasser durch seine Abzählungsmethode bestätigt gefunden:

$$s_4 = 2n(n-3)(3n-2) \quad \text{(Art. 458)},$$
$$(s_4 r_4) = n(11n-24) \quad \text{(Art. 447)},$$
$$s_{32} = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4) \quad \text{(Art. 459)},$$
$$(s_{32} r_3) = n(n-4)(3n^2+5n-24) \quad \text{(Art. 459)},$$
$$(s_{32} r_2) = n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12) \quad \text{(Art. 460)},$$
$$s_{222} = \tfrac{1}{2} n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2) \quad \text{(Art. 461)},$$
$$(s_{222} r_2) = \tfrac{1}{2} n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12) \quad \text{(Art. 461)}.$$

Die jeder der 7 Zahlen beigesetzte Artikelnummer bezieht sich auf Salmon-Fiedler's Werk, II. Th., II. Aufl.

Die noch nicht bekannten 3 Zahlen $(s_4 r_1)$, $(s_{32} r_1)$, $(s_{222} r_1)$ können aus diesen 7 Zahlen sehr leicht bestimmt werden.

Die Anzahl der Punkte, welche, in einer Ebene liegend, zugleich der Fläche F_n und den vierpunktigen Tangenten s_4 angehören, ist nach einem Productensatz (§ 26.):

$$n \cdot s_4 .$$

Zu diesen Punkten gehören aber nicht bloss die Punkte r_1 der Strahlen s_4, d. h. die einfachen Schnittpunkte der Strahlen s_4, sondern auch deren Berührungspunkte r_4. Da in jedem solchen Berührungspunkte die Fläche F_n und die von den Punkten der Strahlen s_4 gebildete Fläche 4 Punkte gemein haben, so zerlegt sich die Zahl $n \cdot s_4$ in zwei Summanden, von denen der eine $4 \cdot (s_4 r_4)$ und der andere $(s_4 r_1)$ ist*). Also:

$$(s_4 r_1) = n \cdot s_4 - 4\,(s_4 r_4) .$$

Analog:

$$(s_{32} r_1) = n \cdot s_{32} - 3\,(s_{32} r_3) - 2\,(s_{32} r_2) ,$$
$$(s_{222} r_1) = n \cdot s_{222} - 2\,(s_{222} r_2) .$$

Daraus ergiebt sich *die Ordnung der von den einfachen Schnittpunkten der vierpunktigen Tangenten gebildeten Curve:*

$$(s_4 r_1) = 2n(n-4)\,(3n^2+n-12),$$

ferner die *Ordnung der Curve, gebildet von den einfachen Schnittpunkten der dreipunktig und zugleich zweipunktig berührenden Tangenten:*

$$(s_{32} r_1) = n(n-4)\,(n-5)\,(n^3+6n^2-n-24),$$

und *die Ordnung der Curve, gebildet von den einfachen Schnittpunkten der an drei Stellen zweipunktig berührenden Tangenten:*

$$(s_{222} r_1) = \tfrac{1}{3}\, n(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n^3+3n^2-2n-12).$$

Der Factor $(n-4)$ in der ersten, $(n-5)$ in der zweiten und $(n-6)$ in der dritten dieser drei Formeln *musste* erscheinen, weil bei einer Fläche vierter Ordnung die vierpunktig berührenden Tangenten, bei einer Fläche fünfter Ordnung die drei- und zweipunktig berührenden Tangenten, bei einer Fläche sechster Ordnung die an drei Stellen zweipunktig berührenden Tangenten keinen weiteren Schnittpunkt besitzen können.

Wir haben durch die oben erwähnten 7 bekannten Formeln und die eben abgeleiteten 3 Formeln *alle Anzahlen, welche zur Bestimmung der Anzahlen der Coincidenzen in den Systemen* 9) *bis* 17) *nöthig sind.* Wie sich diese Coincidenzen und die Zahlen s_5, s_{42}, s_{33}, s_{322}, s_{2222} dann ergeben, zeigt die folgende Zusammenstellung.

*) Aehnlich verfährt Sturm bisweilen in seiner oben erwähnten Abhandlung (Borch. J. Bd. 72, p. 350).

System 9) oder r_4 und r_1 auf s_4.

$$c = (s_4 r_4) \cdot (n-4) = n(11n-24)(n-4),$$
$$d = (s_4 r_1) \qquad = 2n(n-4)(3n^2+n-12),$$
$$g = s_4 \cdot (n-4) \quad = 2n(n-3)(3n-2)(n-4),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = 5n(n-4)(7n-12),$$

d. h.

$$s_5 = 5n(n-4)(7n-12),$$

oder:

„Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt

$$5n(n-4)(7n-12)$$

fünfpunktig berührende Tangenten.“

Danach bestätigt sich die ursprünglich von Salmon vermuthete Zahl (Salmon-Fiedler, II. Th., II. Aufl., Art. 465 am Schluss) nicht*).

System 10) oder r_1 und r_1 auf s_4.

$$c = (s_4 r_1)(n-5) \quad = 2n(n-4)(3n^2+n-12)(n-5),$$
$$d = (s_4 r_1)(n-5) \quad = 2n(n-4)(3n^2+n-12)(n-5),$$
$$g = s_4 \cdot (n-4)(n-5) = 2n(n-3)(3n-2)(n-4)(n-5).$$

Der Factor $(n-4)(n-5)$ steht bei s_4 in dem Ausdrucke für g desswegen, weil auf einer vierpunktigen Tangente jeder der $(n-4)$ einfachen Schnittpunkte mit jedem der $(n-5)$ andern einfachen Schnittpunkte zwei Punktepaare unseres Systems bildet, da jeder der beiden Punkte als Punkt c und als Punkt d gelten kann. Wir erhalten:

$$\varepsilon = c + d - g = 2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5),$$

d. h.

$$s_{42} = 2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5),$$

oder:

„Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt

$$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

Tangenten, welche an einer Stelle vierpunktig, an einer andern zweipunktig berühren.“

System 11) oder r_3 und r_2 auf s_{32}.

$$c = (s_{32} r_3) = n(n-4)(3n^2+5n-24),$$
$$d = (s_{32} r_2) = n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12),$$
$$g = s_{32} \quad = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = 5n(n-4)(7n-12) = s_5.$$

Dies giebt eine Bestätigung der in System 9) bestimmten Anzahl.

*) Jene Zahl ist vielmehr um $6n(n-4)(11n-24)$ zu gross.

System 12) oder r_3 und r_1 auf s_{32}.

$$c = (s_{32}r_3)(n-5) = n(n-4)(3n^2+5n-24)(n-5),$$
$$d = (s_{32}r_1) \quad = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24),$$
$$g = s_{32} \cdot (n-5) = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)(n-5),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = 2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5) = s_{42}.$$

Dies giebt eine Bestätigung der im Systeme 10) *bestimmten Anzahl.*

System 13) oder r_2 und r_1 auf s_{32}.

$$c = (s_{32}r_2)(n-5) = n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)(n-5),$$
$$d = (s_{32}r_1) \quad = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24),$$
$$g = s_{32} \cdot (n-5) = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)(n-5),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g \quad = n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60).$$

Da auf jeder Tangente, die an zwei Stellen dreipunktig berührt, *zwei* Coincidenzen unseres Punktepaars liegen, so ergiebt sich für s_{33} die Hälfte von ε, also:

$$s_{33} = \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60),$$

oder:

„*Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt*

$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60)$

Tangenten, die an zwei Stellen osculiren.“

System 14) oder r_1 und r_1 auf s_{32}.

$$c = (s_{32}r_1)(n-6) \quad = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24)(n-6),$$
$$d = (s_{32}r_1)(n-6) \quad = n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24)(n-6),$$
$$g = s_{32} \cdot (n-5)(n-6) = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)(n-5)(n-6),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60).$$

Jede an einer Stelle dreipunktig und an zwei Stellen zweipunktig berührende Tangente besitzt in jeder dieser beiden Stellen eine Coincidenz ε, also:

$$s_{322} = \tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60),$$

oder:

„*Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt*

$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60)$

Tangenten, die an einer Stelle dreipunktig und an zwei Stellen zweipunktig berühren.“

System 15) oder r_2 und r_2 auf s_{222}.

$$c = 2 \cdot (s_{222} r_2) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12),$$
$$d = 2 \cdot (s_{222} r_2) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12),$$
$$g = 6 \cdot s_{222} = 6 \cdot \tfrac{1}{3} n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2).$$

Die Coefficienten 2, 2 und 6 desswegen, weil auf jeder dreifachen Tangente mit einem bestimmten der drei Berührungspunkte *zwei* andere Berührungspunkte ein Punktepaar bilden, und weil auf ihr überhaupt *sechs* Punktepaare existiren, wenn jeder der drei Berührungspunkte als Punkt c und als Punkt d betrachtet werden darf. Wir erhalten also:

$$\varepsilon = c + d - g = 2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5) = s_{42}.$$

Dadurch erhalten wir die durch das System 3) *bestimmte Zahl* s_{42} *zum dritten Male.*

System 16) oder r_2 und r_1 auf s_{222}.

$$c = (s_{222} r_2)(n-6) = \tfrac{1}{2} n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)(n-6),$$
$$d = 3 \cdot (s_{222} r_1) = 3 \cdot \tfrac{1}{3} n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12),$$
$$g = 3 \cdot s_{222} \cdot (n-6) = 3 \cdot \tfrac{1}{3} n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)(n-6),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = \tfrac{1}{2} n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60) = s_{322}.$$

Dies giebt eine Bestätigung der schon aus System 14) *bestimmten Anzahl.*

System 17) oder r_1 und r_1 auf s_{222}.

$$c = (s_{222} r_1)(n-7) = \tfrac{1}{3} n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12)(n-7),$$
$$d = (s_{222} r_1)(n-7) = \tfrac{1}{3} n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12)(n-7),$$
$$g = s_{222} \cdot (n-6)(n-7) = \tfrac{1}{3} n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)(n-6)(n-7),$$

also:

$$\varepsilon = c + d - g = \tfrac{1}{3} n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30).$$

Da jede an 4 Stellen zweipunktig berührende Tangente 4 Coincidenzen ε enthält, so erhalten wir

$$s_{2222}$$

oder die Zahl der vierfachen Tangenten dadurch, dass wir den eben erhaltenen Ausdruck durch 4 dividiren, oder:

„Eine Fläche n^{ter} Ordnung enthält

$$\tfrac{1}{12} n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30)$$

vierfache Tangenten.“

Durch Vermittelung der oben berechneten Ausdrücke für $(s_4 r_1)$, $(s_{32} r_1)$, $(s_{222} r_1)$ ist jede der fünf Zahlen s_5, s_{42}, s_{33}, s_{322}, s_{2222} eine wenig complicirte Function von zwei oder drei der schon durch Salmon algebraisch berechneten 7 Zahlen, welche sich auf die vierpunktigen, die drei- und zweipunktigen und die dreifachen Tangenten beziehen. Wir lassen diese Functionen hier folgen, weil sie vielleicht einer algebraischen Herleitung der bis jetzt noch nicht bestimmten Zahlen als Fingerzeig dienen können. Wir bedienen uns dabei genau der in Salmon-Fiedler's Werk (Art. 447) gebrauchten Bezeichnung, indem wir die Zahl

s_4 mit a,
s_{32} mit b,
s_{222} mit c,
$(s_4 r_4)$ mit A,
$(s_{32} r_3)$ mit B,
$(s_{32} r_2)$ mit C,
$(s_{222} r_2)$ mit D

bezeichnen. Dann ist, unsrer Herleitung gemäss:

$$1)\ s_5 = A(n-8) + 4a = B + C - b,$$

$$2)\ s_{42} = a(n-5)(n+4) - 8A(n-5) = B(n-8) - 2C + 5b = 4D - 6c,$$

$$3)\ s_{33} = \tfrac{1}{2} C(n-7) - \tfrac{3}{2} B + \tfrac{5}{2} b,$$

$$4)\ s_{322} = \tfrac{1}{2} b(n-6)(n+5) - 3B(n-6) - 2C(n-6) = D(n-12) + 18c,$$

$$5)\ s_{2222} = \tfrac{1}{4} c(n-7)(n+6) - D(n-7).$$

Wir fügen noch einige auf Doppeltangenten und Osculanten bezügliche Anzahlen hinzu, welche sich dem Verfasser bei der Betrachtung der im Vorangehenden der Kürze wegen nicht behandelten Systeme 1) bis 8) (siehe oben) ergeben haben, und welche wohl bisher noch nicht bestimmt sein dürften:

1) *Zieht man von den sämmtlichen Punkten einer auf F_n gelegenen ebenen Curve C_n die sämmtlichen Osculanten, welche nicht auf C_n osculiren, so bilden die nicht auf C_n liegenden einfachen Schnittpunkte dieser Osculanten eine Curve von der Ordnung*

$$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3).$$

2) *Bestimmt man auf jeder Doppeltangente, welche auf einer in F_n gelegenen ebenen Curve ihren einen Berührungspunkt hat, den andern*

Berührungspunkt, so bilden diese andern Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung

$$n(n^3-2n^2+2n-6),$$

also von der 27ten Ordnung bei einer F_3 (27 Gerade).

3) *Die weiteren einfachen Schnittpunkte aller Doppeltangenten, die ihren einen einfachen Schnittpunkt auf einer in F_n gelegenen ebenen Curve C_n besitzen, bilden eine Curve von der Ordnung*

$$\tfrac{1}{2}\,n(n-2)\,(n-4)\,(n-5)\,(2n^2+5n+3).$$

Auch diejenigen auf eine Fläche n^{ter} Ordnung bezüglichen Anzahlen, welche die Tangentialebenen, die Lage jeder der beiden Haupttangenten, die parabolische Curve etc. mit berücksichtigen, können in ähnlicher Weise leicht abgeleitet werden, z. B. auch die eben von Voss (Math. Ann. Bd. IX, p. 241) neu bestimmte Anzahl der Kreispunkte einer F_n.

Jedoch beabsichtigt der Verfasser, welcher erst während der Redaction dieser Arbeit auf die in diesem § gegebene Anwendung seiner allgemeineren Correspondenzformeln gekommen ist, *später* in einer *besonderen* Abhandlung noch andere auf eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung bezügliche Anzahlen zu bestimmen*).

§ 28.

Bestimmung von Anzahlen, welche sich auf die Berührung von Elementen zweier Curven- oder Flächensysteme erster Stufe beziehen.

Für den Chasles'schen Satz, dass in der Ebene die Anzahl derjenigen Curven eines Systems (μ, ν), welche eine Curve m^{ter} Ordnung n^{ten} Ranges berühren, gleich

$$n\mu + m\nu$$

ist, sind bekanntlich Analoga für die Berührung einer Fläche durch Flächen eines Systems und für die Berührung einer Fläche durch Raumcurven eines Systems (vergl. Brill, Math. Ann. Bd. VIII, p. 534) aufgestellt. Sind nun in einer Ebene *zwei* Systeme von Curven, oder im Raume *zwei* Systeme von Flächen, oder ein System von Raumcurven und ein System von Flächen gegeben, so werden die *Berührungspunkte* einen *Punktort erster Stufe*, und die *Tangentialebenen* resp. *Tangenten in den Berührungspunkten einen Ebenenort resp. Strahlenort erster Stufe bilden. Die Gradzahlen dieser Oerter sollen im Folgenden* durch Anwendung der Punktepaar-Formeln (§ 16.) *bestimmt werden.*

Wir bezeichnen ein System erster Stufe von Plancurven in fester

*) Die hier entwickelten Resultate habe ich inzwischen durch die Gött. Nachr. (Febr. 1876) mitgetheilt.

Ebene mit (μ, ν), wenn μ resp. ν Plancurven des Systems ihren Punktort resp. Strahlenort erster Stufe die einfache Grundbedingung erfüllen lassen, ein System von Flächen mit (μ, ν, ϱ), wenn μ resp. ν resp. ϱ Flächen des Systems ihren Punktort resp. ihren Tangentenort resp. ihren Tangentialebenenort die einfache Grundbedingung erfüllen lassen, endlich ein System von Raumcurven mit (p, t, t', e), wenn das System p Raumcurven enthält, deren Punktort die einfache Grundbedingung erfüllt, t Raumcurven enthält, deren Tangentenort die Feldbedingung erfüllt, d. h. welche eine Ebene berühren, t' Raumcurven enthält, deren Tangentenort die Bündelbedingung erfüllt, d. h. welche eine Tangente durch einen Punkt schicken, und e Raumcurven enthält, deren Schmiegungsebenen-Ort die einfache Grundbedingung erfüllt.

Der Umstand, dass bei einer *Plancurve* eine Tangente und ihr Berührungspunkt, bei einer *Fläche* eine Tangente und ihr Berührungspunkt, ferner eine Tangente und ihre Tangentialebene, endlich eine Tangentialebene und ihr Berührungspunkt, bei einer *Raumcurve* eine Tangente und ihr Berührungspunkt, ferner eine Tangente und ihre Schmiegungsebene, endlich eine Schmiegungsebene und ihr Berührungspunkt, je zwei Hauptelemente repräsentiren, welche, kurz ausgesprochen, *in einander liegen*, liefert die für die Anwendbarkeit der allgemeinen Formeln des § 9. nothwendige Voraussetzung. Die Anwendung dieser Formeln auf die in einander liegenden elementären Oerter einer Curve oder einer Fläche oder eines *Systems* von solchen Gebilden, liefert Sätze, welche zum Theil schon von Chasles, Zeuthen und andern gelegentlich benutzt sind, und dabei meist auch durch das Princip der speciellen Lage erläutert sind. Alle diese Sätze sind implicite in den vier allgemeinen Schemata des § 9. enthalten. So ergiebt die für einen durch einen Punkt c gehenden Strahl g gültige allgemeine Formel

$$c^3 + g_s = c g_p ,$$

wenn man c als einen Punkt einer Fläche, g als eine seiner Tangenten auffasst, also c^3 gleich Null, g_s gleich dem Range der Fläche setzt, den bekannten Satz, dass der Rang gleich der Ordnung der Curve der Berührungspunkte ist, die den von einem Punkte an die Fläche gelegten Tangenten angehören. So giebt ferner die Formel:

$$c^2 g_p = c^3 g + G$$

für ein System (μ, ν, ϱ) von Flächen den Satz (Salmon-Fiedler Art. 440):

„*Der Grad des Orts der Berührungspunkte der von einem Punkte an die sämmtlichen Flächen des Systems gelegten Tangenten, oder, was dasselbe ist, der Bündelgrad des Orts der Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Strahle liegen, ist gleich*

$$\mu + \nu.“$$

Die auf solche Weise aus den allgemeinen Formeln des § 9. unmittelbar fliessenden, auf Systeme von Curven oder Flächen bezüglichen Sätze, werden im Folgenden *ohne weitere Begründung angewandt.*

A. Berührung der Elemente zweier in fester Ebene befindlicher Systeme von Plancurven.

Die beiden Systeme seien (μ_1, ν_1) und (μ_2, ν_2). Auf jeder der ∞^2 gemeinsamen Tangenten bildet jeder dem (μ_1, ν_1) angehörige Berührungspunkt c mit jedem dem (μ_2, ν_2) angehörigen Berührungspunkte d ein Punktepaar. Die so bestimmten Punktepaare bilden ein System zweiter Stufe, auf welches wir die Punktepaar-Formeln (§ 16. p. 55)

$$\varepsilon g = c^2 + d^2 + g_e - g_p\,,$$
$$\varepsilon b = cd - g_e$$

anwenden. c^2 ergiebt sich gleich $\mu_1\nu_2$, weil durch einen Punkt der Ebene μ_1 Curven des Systems (μ_1, ν_1) gehen, und die Tangente dieses Punktes an jeder dieser Curven, von ν_2 Curven des Systems (μ_2, ν_2) berührt wird. Entsprechend ist $d^2 = \nu_1\mu_2$. Ferner $g_e = \nu_1\nu_2$, g_p natürlich gleich Null, weil die Ebene der Plancurven fest ist, also

$$\varepsilon g = \mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2\,,$$

oder:

„*Die Tangenten in den Berührungspunkten je zweier sich berührender Curven zweier Systeme* (μ_1, ν_1) *und* (μ_2, ν_2) *bilden einen Strahlenort vom Grade:*

$$\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2.“$$

Nach dem Dualitätsprincip giebt der diesem Ausdruck dualistisch entsprechende:

$$\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2$$

den Grad des Orts der Berührungspunkte an. Wir erhalten denselben jedoch auch aus der Punktepaar-Formel

$$\varepsilon b = cd - g_e\,,$$

wenn wir $cd = (\mu_1 + \nu_1)\cdot(\mu_2 + \nu_2)$ setzen. Die Richtigkeit dieser Substitution folgt daraus, dass der Grad des Strahlenorts der Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Strahle der Ebene liegen, für das eine System gleich $\mu_1 + \nu_1$ und für das andere System gleich $\mu_2 + \nu_2$ ist, also die beiden so erzeugten Oerter nach den Productensätzen $(\mu_1 + \nu_1)\cdot(\mu_2 + \nu_2)$ gemeinsame Strahlen haben.

B. Berührung der Elemente zweier Systeme von Flächen.

Die beiden Systeme seien $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$. Auf jeder derjenigen ∞^3 gemeinsamen Tangenten, *denen zusammenfallende Tangentialebenen angehören*, bildet jeder dem Systeme $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ ange-

hörige Berührungspunkt c mit jedem dem Systeme $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ angehörigen Berührungspunkte d ein Punktepaar. Die so bestimmten Punktepaare bilden ein System dritter Stufe, auf welches wir die folgenden Punktepaar-Formeln dritter Dimension anwenden wollen (§ 16.):

$$\varepsilon g_p = c^3 + d^3 + g_s,$$
$$\varepsilon bg + \varepsilon b^2 = c^2 d + c d^2 - g_s.$$

Wir haben also die Zahlen c^3, d^3, g_s, $c^2 d$, $c d^2$ zu bestimmen. c^3 ist gleich $\mu_1 \varrho_2$, $d^3 = \varrho_1 \mu_2$, $c^2 d = (\mu_1 + \nu_1)(\varrho_2 + \nu_2)$, weil die Tangentialebenen, die den Punkten eines Strahls angehören, für das System $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ einen Ebenenort vom Grade $\mu_1 + \nu_1$ bilden, die Tangentialebenen, die den Punkten einer Ebene angehören, für das System $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ einen Ebenenort vom Grade $\varrho_2 + \nu_2$ bilden, und diese beiden Oerter also $(\mu_1 + \nu_1) \cdot (\varrho_2 + \nu_2)$ gemeinsame Ebenen haben. Entsprechend ist $c d^2 = (\varrho_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)$. Die Zahl g_s ergiebt sich aus dem System erster Stufe derjenigen Ebenenpaare, deren jedes aus zwei $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ angehörigen Tangentialebenen so zusammengesetzt ist, dass zwei zugehörige Tangenten in ein und denselben Strahl eines Strahlbüschels fallen. Die Zahl der Coincidenzen in diesem Systeme von Ebenenpaaren ist nach der Ebenenpaar-Formel erster Dimension gleich:

$$(\varrho_1 + \nu_1)\nu_2 + (\varrho_2 + \nu_2)\nu_1 - \nu_1 \nu_2 = g_s.$$

Wir erhalten also:

$$\varepsilon g_p = (\mu_1 \varrho_2) + (\varrho_1 \mu_2) + (\varrho_1 \nu_2 + \nu_1 \varrho_2 + \nu_1 \nu_2),$$
$$\varepsilon bg + \varepsilon b^2 = (\mu_1 + \nu_1)(\varrho_2 + \nu_2) + (\varrho_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2) - (\varrho_1 \nu_2 + \nu_1 \varrho_2 + \nu_1 \nu_2)$$
$$= \mu_1 \varrho_2 + \varrho_1 \mu_2 + \mu_1 \nu_2 + \nu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2.$$

Da als Verbindungsstrahl derjenigen zwei auf einer gemeinsamen Tangente liegenden Punkte, welche in dem Berührungspunkte zweier sich berührender Flächen zusammenfallen, *jede* beliebige Tangente in diesem Berührungspunkte angesehen werden kann, so hat unser Punktepaar-System dritter Stufe Coincidenzen *zweiter* Gattung (§ 17.). Mit andern Worten, εg_p ist die Zahl, welche angiebt, wieviel von den Tangentialebenen in den ∞^1 Berührungspunkten durch einen Punkt gehen. Wir erhalten also den Satz:

„Die ∞^1 Tangentialebenen in den ∞^1 Berührungspunkten von allen möglichen zwei sich berührenden Flächen zweier Flächensysteme $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ bilden einen Ebenenort vom Grade:

$$\mu_1 \varrho_2 + \mu_2 \varrho_1 + \nu_1 \nu_2 + \varrho_1 \nu_2 + \varrho_2 \nu_1.“$$

Das Symbol εbg drückt die Zahl der in einer Ebene liegenden Berührungspunkte aus, das Symbol εb^2 kann gar nicht erfüllt werden, weil jede Coincidenz zweiter Gattung ist, oder, was hier dasselbe ist, weil

das System dritter Stufe nicht ∞^2, sondern nur ∞^1 Coincidenzstellen besitzt. Wir erhalten daher das weitere Resultat:

„Die Berührungspunkte von allen möglichen zwei sich berührenden Flächen zweier Flächensysteme $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ *und* $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ *bilden einen Punktort vom Grade:*

$$\mu_1\varrho_2 + \mu_2\varrho_1 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1.“$$

Die Thatsache, dass dieser Ausdruck dem obigen dualistisch entspricht, liefert eine Bestätigung.

C. Berührung einer Raumcurve eines Systems von Raumcurven durch eine Fläche eines Systems von Flächen.

Das System von Raumcurven sei (p, t, t', e), das System von Flächen sei (μ, ν, ϱ). Auf jeder der ∞^2 gemeinsamen Tangenten dieser beiden Systeme bildet jeder dem Raumcurven-Systeme angehörige Berührungspunkt c mit jedem dem Flächen-Systeme angehörigen Berührungspunkte d ein Punktepaar. Die so bestimmten Punktepaare bilden ein System zweiter Stufe, auf welches wir die folgenden Punktepaar-Formeln zweiter Dimension anwenden wollen:

$$\varepsilon g = c^2 + d^2 + g_e - g_p$$
$$\varepsilon b = cd - g_e.$$

Es ist aber $c^2 = p \cdot \nu$, $g_e = t \cdot \nu$, $g_p = t' \cdot \nu$. d^2 ergiebt sich nach dem Halphen'schen Productensatze für zwei Strahlenörter zweiter Stufe gleich

$$t'(\mu+\nu) + t\mu,$$

cd ist gleich $(p+t)(\mu+\nu)$, weil diejenigen Tangenten der *Raumcuren*, deren Berührungspunkte in einer Ebene liegen, einen Strahlenort erster Stufe vom Grade $p + t$ bilden, weil ferner diejenigen Tangenten der *Flächen*, deren Berührungspunkte auf einer Ebene liegen, einen Strahlenort dritter Stufe vom Grade $\mu + \nu$ bilden, und weil endlich diese beiden Oerter dann $(p+t) \cdot (\mu+\nu)$ gemeinsame Strahlen besitzen. Daher ist:

$$\begin{aligned}\varepsilon g &= p\nu + [t'(\mu+\nu)+t\mu] + t\nu - t'\nu \\ &= (p+t)\,\nu + (t+t')\,\mu, \\ \varepsilon b &= (p+t)(\mu+\nu) - t\nu \\ &= p\nu + (p+t)\,\mu.\end{aligned}$$

Dies giebt die beiden Resultate:

„Die Berührungspunkte, in denen die Raumcurven eines Systems (p, t, t', e) *durch die Flächen eines Systems* (μ, ν, ϱ) *berührt werden, bilden eine Curve von der Ordnung*

$$p\nu + (p+t)\,\mu$$

und die diesen Punkten angehörigen Tangenten der Raumcurven eine Regelfläche vom Grade

$$(p+t)\,\nu + (t+t')\,\mu.“$$

Durch dualistische Uebertragung ergeben sich aus diesen beiden Resultaten noch zwei andere.

§ 29.

Beispiele zu den Correspondenzsätzen für zwei verschiedenartige Hauptelemente.

Zu den in § 22. und § 23. bewiesenen Formeln für das aus Punkt und Ebene, das aus Punkt und Strahl und das aus Ebene und Strahl bestehende Paar sind bis jetzt noch keine Beispiele aufgetreten. Der Vollständigkeit wegen lassen wir solche hier folgen. Sie beziehen sich sämmtlich auf die durch *Pol und Polarebene* bei allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung hergestellte Verwandtschaft.

A. Correspondenz zwischen Punkt und Ebene.

Jeder Punkt des Raums bildet mit seiner Polarebene in Bezug auf eine F_n ein aus Punkt und Ebene bestehendes Paar. Die so bestimmten Paare bilden ein System dritter Stufe, auf welches die Formel (III) des § 22. angewendet werden soll. Diese hiess

$$c^3 + \mu^3 = \varepsilon(c^2+\mu^2-\mu c).$$

Jeder Punkt hat 1 Polarebene, also ist $c^3 = 1$. Jede Ebene ist jedoch Polarebene zu $(n-1)^3$ Punkten, also ist $\mu^3=(n-1)^3$. Die Punkte der ∞^2 Coincidenzen bilden den Punktort, die Ebenen den Tangentialebenenort der F_n. Daher ist εc^2 gleich der Ordnung, $\varepsilon\mu^2$ gleich der Classe, $\varepsilon\mu c$ gleich dem Range der F_n. Wir erhalten also durch unsere Formel die Identität:

$$1 + (n-1)^3 = n + n(n-1)^2 - n(n-1).$$

B. Correspondenz zwischen Punkt und Strahl.

In Bezug auf zwei allgemeine Flächen A und B von den Ordnungen $a+1$ resp. $b+1$ hat jeder Punkt des Raums je eine Polarebene. Jeder Punkt bestimmt also mit der Schnittaxe seiner beiden Polarebenen in Bezug auf A und B ein aus Punkt und Strahl bestehendes Paar. Die so bestimmten Paare bilden ein System dritter Stufe, auf welches wir die Formel (III) des § 23. anwenden wollen. Diese hiess:

$$g_e + c g_e - c^3 = \varepsilon(g_e+\mu g-\mu c).$$

Jedem Punkte gehört 1 Strahl zu, also ist $c^3 = 1$. g_e ergiebt sich durch Betrachtung des Systems dritter Stufe derjenigen Ebenenpaare,

deren beide Ebenen ein und denselben Pol in Bezug auf A und B besitzen. Man benutzt dabei den Satz, dass hinsichtlich einer F_n die den ∞^1 Ebenen einer Ebenenaxe zugehörigen Pole eine Curve von der Ordnung $(n-1)^2$ bilden, und die den ∞^2 Ebenen eines Ebenenbündels zugehörigen Pole eine Fläche von der Ordnung $n-1$ bilden, und erhält dann:

$$g_e = a^2 b + a b^2.$$

Die Zahl cg_e ist die Zahl derjenigen in einer Ebene liegenden Strahlen, in denen sich zwei Ebenen schneiden, welche in Bezug auf A und B ein und denselben auf einer Ebene liegenden Pol besitzen. Diese Zahl ergiebt sich durch das Correspondenzprincip im Strahlenfelde, wie bei Zeuthen in dem Beispiele zum Théorème I seiner in den Comptes rendus (Juni 1874) enthaltenen Abhandlung über das Correspondenzprincip, nämlich:

$$cg_e = a^2 + ab + b^2.$$

Die linke Seite unserer Correspondenzformel liefert also den Werth:

$$a^2 b + a b^2 + a^2 + ab + b^2 - 1 = (a+1)(b+1)(a+b-1).$$

Um den Werth der rechten Seite zu berechnen, haben wir die Coincidenzen des Systems zu untersuchen. Eine Coincidenz findet da statt, wo ein Punkt sowohl in Bezug auf die Fläche A wie auch in Bezug auf die Fläche B mit seiner Polarebene zusammenfällt, also in der Schnittcurve der beiden Flächen. Jede solche Coincidenz erfüllt die Bedingung μ von selbst, d. h. sie ist zweiter Gattung. Daher ist εg_e gleich Null, $\varepsilon\mu c$ gleich der Ordnung der Schnittcurve der beiden Flächen, $\varepsilon\mu g$ ist der Grad der Regelfläche, welche von den Schnittaxen der beiden Tangentialebenen in jedem Punkte der Schnittcurve erzeugt wird. Diese Zahl ergiebt sich aus dem System der Paare dieser Tangentialebenen gleich $a'(b+1) + b'(a+1)$, wo a' resp. b' den Rang der Flächen A und B angeben, also gleich $(a+1)\cdot a$ resp. $(b+1)\cdot b$ sind. Wir haben also:

$$\varepsilon g_e = 0;\quad \varepsilon\mu c = (a+1)\cdot(b+1);$$
$$\varepsilon\mu g = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(a+b).$$

Daher ergiebt sich für die rechte Seite unserer Correspondenzformel:

$$\varepsilon g_e + \varepsilon\mu g - \varepsilon\mu c = (a+1)(b+1)(a+b-1),$$

das ist derselbe Werth, der oben für die linke Seite erhalten war.

C. Correspondenz zwischen Ebene und Strahl.

Jedem Punkte eines Punktfeldes T gehört in Bezug auf zwei Flächen A und B von den Ordnungen $a+1$ resp. $b+1$ *ein Strahl* als Schnitt seiner beiden Polarebenen in Bezug auf diese Flächen zu,

und in Bezug auf eine dritte Fläche F von der Ordnung $f+1$ *eine Ebene* als Polarebene. So werden durch die Vermittelung der Punkte auf T ∞^2 aus Ebene und Strahl bestehende Paare bestimmt. Auf das von ihnen gebildete System zweiter Stufe soll die Formel (8) aus § 23. angewandt werden. Diese hiess:

$$\mu^2 + \mu g + g_e = \varepsilon(\mu + c),$$

μ^2 ist die Zahl der Punkte auf T, deren Polarebenen in Bezug auf F durch eine gegebene Axe gehen, also gleich f^2. g_e ist die schon (p. 112) angeführte Zahl derjenigen Strahlen eines Strahlenfeldes, in denen sich zwei Ebenen schneiden, die in Bezug auf die Flächen A und B einen gemeinsamen in einer Ebene T gelegenen Pol besitzen, also gleich

$$a^2 + ab + b^2.$$

Die Zahl μg giebt an, wie oft auf T ein Punkt vorhanden ist, dessen Polarebene in Bezug auf F durch einen gegebenen Punkt geht, während seine Polarebenen in Bezug auf A und B sich in einer Geraden schneiden, die einen gegebenen Strahl schneidet. Diejenigen Punkte aber, deren Polarebenen in Bezug auf A und B sich in einer Geraden schneiden, die einen gegebenen Strahl schneidet, bilden auf T einen Punktort erster Stufe, dessen Grad sich durch das gewöhnliche Corr.-Pr. gleich

$$a + b$$

ergiebt, und diejenigen Punkte, deren Polarebenen in Bezug auf F durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden auf T auch einen Punktort erster Stufe, dessen Grad f ist. Daher ist μg gleich dem Producte dieser beiden Zahlen

$$\mu g = f(a+b).$$

Die linke Seite unserer Correspondenzformel liefert also den Werth:

$$f^2 + f(a+b) + a^2 + ab + b^2.$$

Eine Coincidenz findet da statt, wo die drei Polarebenen in Bezug auf A, B und F sich in einem einzigen Strahle schneiden. Jede solche Coincidenz ist *zweiter Gattung*, weil *jeder* Punkt des Strahls als Schnittpunkt der Polarebene in Bezug auf F angesehen werden kann. Mit andern Worten, die Bedingung μ kann nicht durch ε erfüllt werden, und die Bedingung c wird durch jede Coincidenzstelle von selbst erfüllt. εc giebt also die Anzahl derjenigen Punkte des Punktfeldes T an, deren Polarebenen in Bezug auf die drei Flächen A, B und F sich in einem einzigen Strahle schneiden. Diese Anzahl ist aber die Ordnung der sogenannten *Jacobi'schen Curve in Bezug auf drei Flächen* (Salmon-Fiedler, II. Th., II. Aufl., p. 550, Nr. 437) (Cremona's Teoria d. superf. in Curtze's Uebers. Art. 137, p. 114). Wir erhalten also das bekannte Resultat:

„Die Jacobi'sche Curve in Bezug auf drei Flächen A, B, F von den Ordnungen $a+1$, $b+1$, $f+1$ ist von der Ordnung

$$a^2+b^2+f^2+ab+af+bf.“$$

Dieses Resultat kann durch das Correspondenzprincip im Punktfelde T noch schneller gewonnen werden, wenn man als Correspondenzbedingung für das Punktepaar c und d die Bedingung annimmt, dass die Schnittaxe der beiden Polarebenen des einen Punktes c in Bezug auf A und B in der Polarebene des andern Punktes d in Bezug auf F liegt. Dann ist (Formel (II) in § 16.): $c^2=f^2$, $cd=f(a+b)$, $d^2=a^2+ab+b^2$, εb gleich Null, εg die *Ordnung der Jacobi'schen Curve.*

§ 30.

Die Charakteristikentheorie des Punktes, der Ebene und des Strahls.

Aus den Productensätzen für die drei Hauptelemente, welche in § 26. als specielle Fälle der allgemeinen Correspondenzformeln erkannt sind, fliesst unmittelbar die *eigentliche Charakteristikentheorie* dieser drei einfachsten Gebilde.

Sind A und B zwei ganz beliebige Bedingungen erster resp. zweiter Dimension für Punkte, und giebt α an, wieviel Punkte A erfüllen und in einer Punktaxe liegen, β, wieviel Punkte B erfüllen und in einer Punktebene liegen, so nennen wir α und β die *Parameter* der Bedingung A und B. Nach den Productensätzen giebt dann das *Product $\alpha\cdot\beta$ die Zahl der Punkte an, welche A und B zugleich erfüllen.* Daraus folgt, dass in jedem beliebigen Systeme von Punkten jede beliebige einfache resp. zweifache Bedingung ersetzt werden kann durch die mit ihrem Parameter multiplicirte Bedingung c, resp. c^2, wo c resp. c^2 angiebt, wieviel Punkte des Systems einem Punktfelde resp. einer Punktaxe angehören. Damit ist also für den Punkt eine Bedingung c vorhanden, durch deren erste resp. zweite Potenz jede einfache resp. zweifache Bedingung ausgedrückt werden kann. Natürlich kann auch jede dreifache Bedingung, durch welche γ Punkte bestimmt sein mögen, ersetzt werden durch γc^3, wo c^3 ausdrückt, wieviel Punkte des Systems in einen beliebigen Punkt des Raums fallen, d. h. den *wievielfachen* Punktraum das System repräsentirt. Das Analoge gilt für die Ebene. *Für den Punkt und die Ebene ist daher im Sinne der Definition der Charakteristiken eines Gebildes in* § 2. *eine aus nur einer Bedingung c bestehende Gruppe von Charakteristiken vorhanden.*

Bei einem *Strahle* kann ebenso jede einfache Bedingung durch das Product ihres Parameters mit der Grundbedingung g ersetzt werden. Entsprechendes gilt für jede dreifache und vierfache Bedingung, die durch $g_1=\frac{1}{2}g^3$ resp. $G=\frac{1}{4}g^4$ ausgedrückt werden können. Nur eine

zweifache Bedingung kann nicht durch die zweite Potenz von g allein ausgedrückt werden. Bezeichnet α resp. α' die Zahl der Strahlen, welche eine zweifache Bedingung erfüllen und in einem Strahlenfelde resp. Strahlenbündel liegen, d. h. ist α ihr Feld-Parameter, α' ihr Bündel-Parameter, so ist diese Bedingung nach dem Halphen'schen Productensatze ersetzbar durch

$$\alpha g_e + \alpha' g_p.$$

Da $g_e + g_p = g^2$ ist, so würden also beim Strahle erst *zwei* Bedingungen g und g_p oder g und g_e im Stande sein, durch ihre Potenzen *alle* Bedingungen auszudrücken. Die vierfache Bedingung, welche aus zwei zweifachen Bedingungen mit den Parametern α, α' resp. β, β' besteht, muss das Product von $\alpha g_e + \alpha' g_p$ mit $\beta g_e + \beta' g_p$ zum Modul haben, also gleich

$$(\alpha g_e + \alpha' g_p)\ (\beta g_e + \beta' g_p),$$

oder gleich

$$(\alpha\beta + \alpha'\beta')G$$

sein, da $g_e g_p$ nicht erfüllbar ist.

Aus der hiermit erledigten Charakteristikentheorie von Punkt, Ebene und Strahl ergiebt sich namentlich folgender Satz:

„Jede einem Gebilde auferlegte Bedingung, welche nichts anderes aussagt, als dass ein Element eines Plücker'schen Orts dieses Gebildes irgend welche Bedingung erfüllt, ist immer durch fundamentale Bedingungen des Gebildes ersetzbar."

Beispiel:

Sollen die Elemente des Punktorts einer Plancurve $C_3{}^3$ 7 zweifache Bedingungen erfüllen, deren Parameter sämmtlich gleich n sind, die Spitze eine einfache Bedingung erfüllen, deren Parameter gleich γ ist, und die Wendetangente eine zweifache Bedingung erfüllen, deren Feld-Parameter gleich α und deren Bündel-Parameter gleich α' ist, so ist die Anzahl der $C_3{}^3$, welche ihre Plücker'schen Oerter diese Bedingungen erfüllen lassen, gleich

$$n^7 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot (\nu^7 c w_e) + n^7 \cdot \gamma \cdot \alpha' \cdot (\nu^7 c w_p),$$

wo $\nu^7 c w_e$, oder die Zahl derjenigen $C_3{}^3$, welche 7 gegebene Gerade schneiden, ihre Spitze auf einer gegebenen Ebene besitzen, und eine gegebene Ebene osculiren, nach des Verfassers Tabellen gleich 5968 ist,

und wo $\nu^7 c w_p$, die Zahl der $C_3{}^3$, welche 7 gegebene Gerade schneiden, ihre Spitze auf einer gegebenen Ebene besitzen, und ihre Wendetangente durch einen gegebenen Punkt schicken, gleich 3296 ist.

In derselben Weise, wie bei Punkt, Ebene und Strahl *folgt bei jedem Gebilde aus seinen Productensätzen seine eigentliche Charakteristiken-*

theorie. Productensätze sind jedoch bis jetzt nur für die drei Hauptelemente und die Kegelschnitte abgeleitet. Wir erkannten in § 26. *jeden Productensatz für Hauptelemente als ein Glied einer Correspondenzformel.* Dies führt auf den schon in § 26. erwähnten Gedanken, die Ableitung von Correspondenzformeln zu versuchen, welche dasselbe für Kegelschnitte sind, was die Correspondenzformeln des § 16. und § 18. für Punkte und Strahlen sind, um dann in den einzelnen Gliedern dieser Kegelschnitt-Correspondenzformeln die bekannten Productensätze für Kegelschnitte wieder erkennen, und die Charakteristikentheorie der Kegelschnitte von einem allgemeineren Standpunkte aus überschauen zu können.

Nachtrag.

In der allgemeinen Einleitung (p. 1) der vorstehenden ersten Abhandlung meiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" habe ich versäumt, auf die Arbeiten von Hirst und Fouret aufmerksam zu machen. Die Arbeit von Hirst „On the correlation of two planes" (Annali di Matematica, tomo VI, p. 260) gehört der *dritten* der drei in meiner Einleitung besprochenen Untersuchungsrichtungen an, und ist dadurch bemerkenswerth, dass sie nicht eine Curve oder eine Fläche, sondern das durch die *Correlation* (Ein-eindeutiges Entsprechen von Punkt und Strahl) auf zwei festen Ebenen definirte Gebilde der Chasles'schen Methode der Ausartungsabzählung unterwirft. Die Arbeiten von Fouret „Sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendantes définis par deux caractéristiques" (Bull. de la Soc. math. de France, tome 2, p. 72 und p. 96) besprechen den Zusammenhang einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung mit den in fester Ebene liegenden Curvensystemen (μ, ν).

Hildesheim, im Februar 1876.

Das Problem der Collineation.

Von

Rudolf Sturm in Darmstadt.

Nachdem ich in früheren Aufsätzen (Math. Annalen Bd. I und VI) die Probleme der ebenen und räumlichen Projectivität behandelt, gehe ich nun zu dem der Collineation (Collinearität oder Homographie) über, unter welchem ich das folgende verstehe:

Wenn im Raume zwei Gruppen von gleich vielen und zugeordneten Punkten gegeben sind, solche entsprechende Punkte zu finden, aus denen die zugeordneten Punkte durch homologe Strahlen collinearer Bündel projicirt werden.

I.

1. *Es seien einerseits fünf Strahlen* $a_1, \cdots, a_5$ *eines Bündels* A *gegeben; anderseits vier Punkte* $B_1, \cdots, B_4$; *ein Punkt* B *bewegt sich durch den ganzen Raum,* BB_i *werde mit* b_i *bezeichnet; wie bewegt sich* b_5, *wenn*

$$(b_1, \cdots, b_5) \text{ coll. } (a_1, \cdots, a_5)$$

sein soll?

Auf $a_1, \cdots, a_5$ seien ebenfalls feste Punkte $A_1, \cdots, A_5$ gelegt; zwei räumliche Systeme mögen dadurch collinear bezogen sein, dass den fünf Punkten $A_1, \cdots, A_4, A$ die festen Punkte $B_1, \cdots, B_4$ und der bewegliche B entsprechen; ist jedesmal B_5 der Punkt, welcher dem A_5 correspondirt, so ist BB_5 der gesuchte Strahl b_5. Nun durchlaufen ersichtlich B und B_5 collineare räumliche Systeme, denen $B_1, \cdots, B_4$ entsprechend gemein sind; *die Verbindungsgeraden* b_5 *erzeugen demnach einen tetraedralen Complex 2. Grades**). Derselbe ist mit demjenigen identisch, welcher der Geraden a_5 bezüglich der Gruppen $A_1, \cdots, A_4$; $B_1, \cdots, B_4$ correspondirt**); denn b_5 $(b_1, \cdots, b_4)$ oder

*) Reye, Geometrie der Lage, II, 15. Vortrag.

**) Sturm, Räuml. Project., Math. Ann. Bd. VI, S. 514.

$b_5\,(B_1, \cdots, B_4)$ ist stets mit $a_5\,(a_1, \cdots, a_4)$ oder $a_5\,(A_1, \cdots, A_4)$ projectiv*).

2. Bewegt sich B blos in einer Ebene, so beschreibt B_5 ein collineares ebenes System (Feld); die Geraden b_5 erzeugen die Congruenz (3, 1) der Schnittlinien der Osculationsebenen einer cubischen Raumcurve; zu diesen Schmiegungsebenen gehören auch die Träger der beiden collinearen Felder.

Durchläuft B eine Gerade b, so beschreibt B_5 eine projective Punktreihe und b_5 *erzeugt ein Hyperboloid* $[b]^2$. Geht b durch einen der gegebenen Punkte $B_1, \cdots, B_4$, so thut dies auch der Träger der Reihe B_5; also werden die beiden Reihen perspectiv und das Erzeugniss von b_5 ist ein Strahlbüschel.

Bewegt sich B auf einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch jeden der 4 Punkte B_i λ_i-mal geht, so thut dies auch B_5, und b_5 erzeugt eine Fläche vom Grade $n' = 2n - \sum_1^4 \lambda_i$. Ist z. B. die Curve eine cubische Raumcurve, die durch jeden der vier B_i geht, so ist diese Fläche vom 2. Grade.

3. Werden die Punkte $A_1, \cdots, A_5$ auf $a_1, \cdots, a_5$ verschoben, so ändert sich der Complex, die Congruenz, das Hyperboloid, die dem Raume, einer Ebene, einer Geraden zugehören, nicht; das von B_5 erzeugte räumliche System wird ein anderes; d. h. denselben B entsprechen andere B_5, die jedoch auf derselben Complexgeraden liegen. Das räumliche System B_5 hat sich mithin so verschoben, dass jeder Punkt auf der ihn mit seinem entsprechenden B verbindenden Complexgeraden bleibt. Die Punkte, welche den Punkten B einer Ebene entsprechen, bleiben stets in einer Ebene und alle diese Ebenen, die derselben Ebene des Systems B correspondiren, sind die Schmiegungsebenen der dieser Ebene zugehörigen cubischen Raumcurve. Die homologen Punkte der Punkte einer Geraden bleiben stets auf einer Geraden und diese Geraden sind die Leitgeraden von $[b]^2$.

4. *Es sei a_5 eine Ebene des festen Bündels A*; a', a'' zwei in ihr liegende Strahlen dieses Bündels; die entsprechenden Strahlen b', b'' beschreiben, wenn der bewegliche Scheitel B sich auf einer Curve n^{ter} Ordnung bewegt, zwei Flächen n'^{ten} Grades. Um den Torsus (die abwickelbare Fläche) der Ebenen β_5 zu erhalten, welche je durch b', b''

*) Ich schreibe mit Absicht „projectiv" und „perspectiv" nach Analogie von projettivo und projectif, weil ich nicht einsehe, warum wir Deutschen an die Endung „iv" noch die zweite Endung „isch" hängen sollen. Diese Häufung von Endungen hat übrigens nur wenige Analoga, die meistens auch nicht glückliche Bildungen sind.

gehen und demnach der Ebene α_5 correspondiren, durchschneidet man beide Flächen mit einer Ebene; die Schnittcurven sind eindeutig auf einander bezogen und die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen die Spur des gesuchten Torsus. Da n-mal zwei entsprechende Punkte sich vereinigen, nämlich in den Spuren der Curve n^{ter} Ordnung, so ist die Classe dieser Einhüllungscurve und folglich auch des Torsus

$$2n' - n = 3n - 2\sum_1^4 \lambda_i.$$

Wenn also die Curve, auf der B sich bewegt, eine Gerade b ist, die durch keinen der B_i geht, so ist der Torsus der Ebenen β_5 3. Classe; er ist den beiden von b' und b'' erzeugten Hyperboloiden gleichzeitig umschrieben und hat mit dem Ebenenbüschel b, den sie sonst noch gemein haben, zwei Ebenen gemein. Geht aber b durch einen der Punkte B_i, so beschreibt β_5 einen Ebenenbüschel, dessen Ebenen die homologen Strahlen zweier mit derselben Punktreihe perspectiven Strahlbüschel, der ausgearteten Hyperboloide, verbinden.

Ist die von B beschriebene Curve eine durch alle vier Punkte B_i gehende cubische Raumcurve, so ist der Torsus ein Ebenenbüschel, dessen Axe eine Sehne der Raumcurve ist: in der That, wenn ein Punkt B auf einer durch $B_1, \cdots, B_4$ gehenden cubischen Raumcurve sich bewegt und $b_1, b_2, b_3, b_4, \beta_5$ stets collinear bleibt, so dreht sich β_5 um eine Sehne der Curve.

5. *Nehmen wir nun a_5 beweglich und B_5 fest an*, so gehen von den Ebenen, welche einer Ebene α von A in den Bündeln B entsprechen, deren Scheitel die Gerade b durchläuft, drei durch B_5 (Nr. 4.); woraus hervorgeht, dass die drei a_5, welche $b_5 = BB_5$ correspondiren, in α liegen. Folglich *beschreiben alle a_5 einen Kegel 3. Ordnung.* Seine Kanten sind eindeutig auf die Punkte B von b bezogen; also muss er vom Geschlechte 0 sein und eine Doppelkante haben, welche sich bald ergeben wird.

6. *Sei B ein beliebiger Punkt, so liegen die Scheitel aller Bündel, welche mit dem Bündel B so collinear sind, dass die nach $B_1, \cdots, B_5$ gehenden Strahlen sich entsprechen, auf der durch $B_1, \cdots, B_5, B$ gehenden cubischen Raumcurve.* Denn ist B' der Scheitel eines solchen Bündels, so begegnen sich einfach unendlich viele Strahlen von B mit den homologen von B' und diese Begegnungspunkte, unter denen sich hier auch die Punkte $B_1, \cdots, B_5$ befinden, erzeugen bekanntlich eine cubische Raumcurve, auf der auch die beiden Scheitel B und B' liegen; d. h. B' liegt auf der durch $B_1, \cdots, B_5$ und B gehenden cubischen Raumcurve.

7. Liegt B auf b, so begegnet die zu B gehörige (adjungirte) Raumcurve 3. Ordnung im Allgemeinen der Geraden b nicht noch einmal. Unter den cubischen Raumcurven durch $B_1, \cdots, B_5$ giebt

es aber eine, welche b zweimal trifft; ihre beiden Begegnungspunkte mit b senden nach $B_1, \cdots, B_5$ collineare Bündel; folglich entspricht ihnen auch im Bündel A derselbe Strahl a_5, und wir haben so *die Doppelkante des Kegels 3. Ordnung.*

8. *Der Punkt B komme* nun während seiner Bewegung auf b *in die Ebene* $\beta_{123} = B_1B_2B_3$; es liegen dann die drei Strahlen b_1, b_2, b_3 in derselben Ebene, während a_1, a_2, a_3 dies nicht thun: wir haben *eine exceptionelle Collineation**) zwischen den Bündeln A und B; die Ebene β_{123} ist die singuläre Ebene in B, der Strahl a_4 der singuläre Strahl in A; jedem weiteren Strahle b' von B in β_{123} correspondiren einfach unendlich viele Strahlen von A, alle in der Ebene α' gelegen, die durch a_4 geht, und für welche $a_4\,(a_1, a_2, a_3, \alpha') \overline{\wedge} B(B_1, B_2, B_3, b')$; hingegen allen Strahlen von B, die nicht in die Ebene β_{123} fallen, entspricht der eine singuläre Strahl a_4. Folglich fällt bei dieser Lage des Scheitels B der dem b_5 entsprechende Strahl a_5 nach a_4; a_4 und ebenso a_1, a_2, a_3 sind also Kanten des Kegels 3. Ordnung.

9. Sei B_5 nun wieder beweglich und α eine Ebene im Bündel A; so gehen von den Ebenen β, welche ihr in dem veränderlichen Bündel B (auf b) entsprechen, zwei durch b (Nr. 4), folglich fällt zweimal der Strahl in A, welcher b entspricht, in die Ebene α; die Strahlen also in A, die dem festen Strahl b der veränderlichen Bündel, deren Scheitel sich auf b bewegt, entsprechen, erzeugen einen Kegel 2. Grades, der durch a_1, a_2, a_3, a_4 geht (Nr. 8).

10. Sei β eine durch b gelegte Ebene; untersuchen wir, indem sie zu den verschiedenen Bündeln gerechnet wird, die Bewegung der entsprechenden Ebene in A. Sei A_5 und a_5 wieder eingeführt; von den entsprechenden b_5, die ein Hyperboloid $[b]^2$ bilden, liegt also eine in β; folglich geht die der β entsprechenden Ebene und nur diese durch A_5 (oder a_5); also bilden diese Ebenen einen Ebenenbüschel. Derselbe ist der Punktreihe b projectiv; sei seine Axe a und die eines andern Büschels, welcher der Ebene β' durch b zugehört, a'; die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen von a und a' erzeugen mithin einen Kegel 2. Grades, der auch durch a und a' geht; aber diese Schnittlinien sind die entsprechenden Strahlen von $b = \beta\beta'$, also ist unser Kegel der obige in Nr. 9. Mithin:

Die entsprechenden Strahlen in A zu dem festen Strahle b der Bündel, deren Scheitel sich auf b bewegt, erzeugen denselben Kegel 2. Grades, wie die Axen der Büschel, welche je von den Ebenen gebildet werden, die jeder Ebene durch b in A entsprechen. Jede Kante ist

---

*) Hirst, on the correlation of two planes (Proceed. Lond. Math. Society V, p. 40; Annali di matem. ser. II, t. VI, p. 260 Nr. 11—14).

also gleichzeitig die homologe Gerade von b für eine gewisse Lage von B auf b und die Axe des Büschels der Ebenen, die einer gewissen β durch b correspondiren.

11. *Sei nun A_5 fest und bewege sich auch der Scheitel A auf einer Geraden a; welches Flächensystem erzeugen die Hyperboloide $[b]^2$, bez., was dasselbe ist, welches Liniensystem ihre Erzeugenden b_5?*

Wenn β eine beliebige Ebene ist, so wird dieselbe von so vielen Hyperboloiden tangirt, als Erzeugende b_5 durch den Punkt $b\beta$ gehen und in β liegen; weil aber alle b_5, die durch diesen Punkt gehen, wegen Nr. 5. einen Kegel 3. Ordnung erzeugen, so ist die Zahl der β tangirenden Hyperboloide 3.

Suchen wir ferner die Zahl der b_5, die durch einen Punkt B_5 gehen; dieselben liegen alle in der Ebene $B_5 b$ und wir haben die Classe der Curve zu ermitteln, die von den b_5 in einer Ebene β durch b umhüllt wird. Durch jeden Punkt von b gehen in β, wie eben gezeigt, drei; ausserdem aber ist noch b selbst eine Doppeltangente dieser Curve.

12. Seien nämlich B', B'' irgend zwei Punkte auf b; so beschreiben nach Nr. 5. die beiden Strahlen b_5', b_5'', welche dem mit A beweglichen Strahle a_5 entsprechen, zwei Kegel 3. Ordnung, welche beide eindeutig auf die Punktreihe a, also auch auf einander bezogen sind. Jede Ebene durch b schneidet 3 Strahlen aus dem Kegel (B') aus, deren drei correspondirende auf (B') mit b die drei entsprechenden Ebenen geben, ebenso umgekehrt. Also giebt es sechs Coincidenz-Ebenen, zu denen aber auch die vier Ebenen nach $B_1, \cdots, B_4$ gehören (entsprechend den Spuren von a in den vier Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$).

In den beiden übrigen Ebenen β^* und β^{**} (durch b) liegen also zwei demselben Punkte A^*, bez. A^{**} von a entsprechende b_5' b_5''. Die andern b_5 für A^* z. B. (d. h. die den andern Punkten B von b zugehörigen) liegen dann auch in dieser Ebene β^*. Denn weil b_5' und b_5'' beide in β^* liegen, so gehen die der β^* in A^* entsprechenden Ebenen α (wenn β^* zum Bündel B' oder B'' gerechnet wird) beide durch $a_5 = A^* A_5$; also ist a_5 die Axe des Büschels aller Ebenen α in A^*, welche β^* entsprechen, jenachdem sie zu den verschiedenen Bündeln mit auf b befindlichen Scheiteln gerechnet wird, woraus folgt, dass auch die b_5 in allen diesen Bündeln, welche a_5 entsprechen, in β^* liegen. Das Hyperboloid dieser b_5 hat sich also für A^* und ebenso für A^{**} in einen in β^*, bez. β^{**} gelegenen Kegelschnitt verwandelt.

13. Wenn $A^* A_5$ die Axe eines Büschels von Ebenen ist, die der Ebene β^* entsprechen, so ist sie auch die entsprechende Gerade von b für eine gewisse Lage von B, d. h. in die b fällt, weil dasselbe auch für A^{**} gilt, b_5 zweimal. Mithin ist einerseits gefunden, dass die beiden

Kegelschnitte in β^* und β^{**}, welche entartete Hyperboloide sind, die Gerade b berühren; andererseits, dass für die in Nr. 11. betrachtete Einhüllungscurve b eine doppelte Tangente ist, diese Curve also von der 5ten Classe ist. Folglich gehen durch jeden Punkt B_5 fünf Gerade b_5 und fünf Hyperboloide $[b]^2$; *das Liniensystem der b_5 ist demnach* (5, 3); *in dem Hyperboloidsysteme gehen je fünf Flächen durch einen Punkt, berühren je drei eine Ebene und zwei sind zu Kegelschnitten ausgeartet.*

In der Ebene jedes dieser Kegelschnitte zerfällt also die Curve 5. Classe in den Kegelschnitt und eine Curve 3. Classe.

14. Kommt der Scheitel A bei der Bewegung auf a in eine der vier Ebenen $\alpha_{ikl} = A_iA_kA_l$, so degenerirt das Hyperboloid ebenfalls und zwar in ein System von zwei ebenen Strahlbüscheln, deren Scheitel auf der Schnittlinie der Träger liegen. Es liege z. B. A in α_{123}, so muss nach Nr. 8. den beiden Strahlen a_1 und a_5, die nicht in der Ebene $a_1a_2a_3$ liegen, dieselbe Gerade b_4 entsprechen, d. h. wo auch B auf b sich befindet, b_5 geht stets durch B_4 und beschreibt also den Strahlbüschel (B_4, b). Gelangt jedoch auch B in die Ebene β_{123}, so ist durch das Entsprechen von a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 die Collineation nicht bestimmt; ist a^0 der Schnittstrahl (α_{123}, a_4a_5) und b^0 so in β_{123} construirt, dass $b_1b_2b_3b^0 \overline{\wedge} a_1a_2a_3a^0$, so kann *jeder* Strahl der Ebene b^0b_4 im Bündel B der dem a_5 entsprechende Strahl sein; denn sei b_5 ein solcher Strahl, so sind dann in der durch das Entsprechen von $a_1a_2a_4a_5$ und $b_1b_2b_4b_5$ bestimmten Collineation auch a^0 und b^0, a_3 und b_3 homolog. Also der eine Punkt $B = b\beta_{123}$ liefert den ganzen zweiten Büschel. *Das Hyperboloidsystem enthält mithin vier Ebenenpaare.*

15. Jedem Punkte von a entspricht demgemäss ein Hyperboloid $[b]^2$ und im Allgemeinen auch umgekehrt jedem Hyperboloid ein Punkt von a. Aber den beiden Begegnungspunkten der a mit der sie zweimal treffenden cubischen Raumcurve durch $A_1, \cdots, A_5$ entspricht das nämliche Hyperboloid. *Dasselbe ist also in unserem Flächensysteme doppelt*; d. h. es zählt bei jedem seiner Punkte für zwei von den fünf durchgehenden Systemflächen; ebenso zählt die durch ihn gehende Erzeugende b_5 für zwei Gerade im Liniensysteme (5, 3). Die Erzeugenden dieses Hyperboloids sind die Doppelkanten der den verschiedenen Punkten B von b zugehörigen Kegel 3. Ordnung (Nr. 5.), und diejenige, welche je in einer Ebene β durch b liegt, ist eine zweite Doppeltangente der Curve 5. Classe in dieser Ebene (Nr. 11., 13.). Ausser den beiden schon gefundenen Doppeltangenten muss diese Curve, weil sie eindeutig auf die Punktreihe a bezogen ist, noch vier andere haben: dies sind die Schnittlinien von β mit den vier Ebenen β_{123}, β_{124}, β_{131}, β_{234}.

Denn jeder Strahl b_5 um $B = b\beta_{123}$ in β_{123} ist für zwei Punkte A auf a entsprechender Strahl von a_5; in dem Bündel B ist nämlich β_{123} singuläre Ebene, in welcher b_1, b_2, b_3, b_5 liegen, jedem dieser Strahlen entsprechen ganze Büschel von Strahlen, deren Ebenen durch den singulären Strahl von A gehen (Nr. 8.) und, da je einer von ihnen bez. durch A_1, A_2, A_3, A_5 gehen soll, je diese Punkte enthalten. Dem b_4, welcher ausserhalb der singulären Ebene β_{123} liegt, muss der singuläre Strahl a' in A correspondiren; derselbe muss demnach durch A_4 gehen, a in A treffen und so beschaffen sein, dass $a'(A_1A_2A_3A_5) \barwedge B(B_1B_2B_3b_5)$. Also sind die Punkte A die beiden Schnittpunkte der a und des Kegels 2. Grades mit der Spitze A_4, dessen Kanten mit den Punkten A_1, A_2, A_3, A_5 das Doppelverhältniss $B(B_1B_2B_3B_5)$ umfassen.

16. Unser Flächensystem hat die Charakteristiken $\mu=5$, $\varrho=3$; ferner ist $\psi = 4$, und, wie wohl nicht schwer zu erkennen, die Zahl φ der Kegel $= 0$; die Zahl der Kegelschnitte ist, wie oben gefunden, 2, jedoch ist in der Formel: $2\mu = \chi + \nu$ jeder derselben doppelt zu rechnen, also $\chi = 2 \cdot 2$, wie mir Herr Zeuthen, dem ich gelegentlich über dies System schrieb, bemerkte: in der That, fassen wir in der Correspondenz (μ, μ), hier also (5, 5), auf einer beliebigen Geraden, aus der die obige Formel folgt, den Schnittpunkt B' mit einer der Kegelschnittebenen ins Auge: von den 5 durch ihn gehenden Geraden des Liniensystems sind zwei Tangenten des Kegelschnitts, die 3 andern gehören allgemeinen Hyperboloiden an; im Flächensysteme gehen also durch ihn die Kegelschnittebene als ausgeartete Fläche und drei Flächen; folglich ist jene doppelt zu rechnen; und von den fünf zweiten Schnittpunkten haben sich zwei mit B' vereinigt; also ist derselbe ein doppelter Coincidenzpunkt. Nun führen die drei Formeln:

$$\varphi = 0 = 2\varrho - \nu = 6 - \nu,$$
$$\chi = 2 \cdot 2 = 2\mu - \nu = 10 - \nu$$

und

$$\psi = 4 = 2\nu - \mu - \varrho = 2\nu - 8$$

alle zu: $\nu = 6$.

II.

17. *Wir geben nun auch dem Punkte B_5 eine feste Lage, so dass wir die beiden Gruppen $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$ haben.* Lassen wir diese einander entsprechen, so sind die beiden Räume (*a*) und (*b*) collinear bezogen. Jedem Punkte A correspondirt ein B. *Alle Punkte, die dem A bezüglich $A_1, \cdots, A_5$ adjungirt sind, d. h. welche nach diesen Punkten Bündel senden, die mit $A(A_1, \cdots, A_5)$ collinear sind, erzeugen die durch $A_1, \cdots, A_5$, A gehende cubische Raumcurve a^3 (die dem A adjungirte)* nach Nr. 6.; *alle Punkte B, die ihm (und seinen adjungirten) in Bezug auf beide Gruppen $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$*

correspondiren, d. h. nach $B_1, \cdots, B_5$ Strahlenbündel senden, die zu A $(A_1, \cdots, A_5)$ collinear sind, bilden offenbar die cubische Curve b^3, welche der a^3 als zu (a) gehörig in (b) entspricht; zwei derartige Curven mögen *analog* heissen. Es ist nicht schwer, einzusehen, dass zwei solche analoge Curven es auch im Probleme der räumlichen Projectivität (Abschnitt II.) sind; d. h. dass die Ebenenbüschel, welche von irgend einer Sehne der einen Curve nach $A_1, \cdots, A_5$, und von irgend einer Sehne der andern nach $B_1, \cdots, B_5$ gehen, projectiv sind.

Die beiden Bündel cubischer Raumcurven durch $A_1, \cdots, A_5$ und $B_1, \cdots, B_5$ sind collinear, indem sich je die analogen entsprechen. Die analoge Curve in (b) zu einer in (a) erhält man so: sei A ein Punkt der letzteren, so construire man die beiden Kegel mit den Spitzen B_5, B_4, deren Kanten b', bez. b'' so sind, dass $b'(B_1B_2B_3B_4) \overline{\wedge} AA_5(A_1A_2A_3A_4)$ und $b''(B_1B_2B_3B_5) \overline{\wedge} AA_4(A_1A_2A_3A_5)$; ihr Schnitt ausser B_4B_5 ist die gesuchte Curve.

18. *Bewegt sich A auf einer Geraden a, so beschreibt die adjungirte Curve a^3 eine Fläche 5. Ordnung, welche die fünf Punkte $A_1, \cdots, A_5$ zu dreifachen Punkten, ihre 10 Verbindungsgeraden zu einfachen Geraden hat und die die a zweimal treffende erzeugende Curve doppelt enthält*). Die analoge Curve b^3 gleitet ebenfalls an einer Geraden hin,* der entsprechenden in der räumlichen Collineation, *erzeugt die entsprechende Fläche 5. Ordnung, auf der die entsprechenden Gebilde der eben genannten in derselben Weise liegen.*

Da diese Fläche von einer beliebigen Geraden fünfmal getroffen wird, so zeigt sich nochmals, dass *fünf Punkte von a einen correspondirenden auf b haben,* wie dies sich ja schon daraus ergab, dass fünf der Hyperboloide $[b]^2$, die den Punkten von a zugehören, durch B_5 gehen.

19. Nur einfach unendlich viele analoge Curven der beiden Bündel (Nr. 17.) treffen einander; wir suchen *den Ort dieser Begegnungspunkte, also derjenigen Punkte $(C)_5$, die zugleich nach beiden Gruppen collineare Bündel senden.*

Sei γ eine beide Räume durchziehende Ebene; A ein Punkt derselben aus dem Raume (a); seine correspondirende Curve trifft γ in drei Punkten B; ebenso entsprechen jedem B drei A. Bewegt sich A in γ auf einer Geraden a, so schneidet die Fläche der correspondirenden Curven in γ eine Curve 5. Ordnung ein. Daraus ergiebt sich nach dem Correspondenz-Princip der Ebene**), dass es $3+3+5=11$

*) Reye, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 13, S. 525. — Sturm, Borchardt's Journal Bd. 79, S. 99.

**) Salmon, Geometry of three dimensions, 2. Aufl., S. 511 (wie in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie citirt wird), 3. Aufl., S. 537; deutsche

Coincidenzen von A und B giebt. Alle 11 sind Begegnungspunkte analoger Curven. Der Ort der Punkte $(C)_5$ ist demnach *eine Curve* 11. *Ordnung*; dieselbe geht ersichtlich durch die 10 Gruppenpunkte und die vier Punkte, die den beiden collinearen Räumen entsprechend gemein sind.

20. Die acht weiteren Schnittpunkte dieser Curve, z. B. mit der Ebene α_{123}, sind leicht zu ermitteln. Sei A ein Punkt dieser Ebene, so besteht die ihm adjungirte Curve aus der Geraden $a_{45} = A_4 A_5$ und dem Kegelschnitte in α_{123} durch A_1, A_2, A_3, A und die Spur von a_{45}, die correspondirende aus b_{45} und dem analogen Kegelschnitte in β_{123} durch B_1, B_2, B_3, und die Spur von b_{45}; d. h. dem, von dessen Punkten nach diesen vier Punkten Büschel gehen, die zu den von den Punkten jenes Kegelschnitts nach den homologen Punkten gehenden Büscheln projectiv sind. Da also die veränderlichen Theile der correspondirenden Curven der Punkte von α_{123} in β_{123} liegen, so kann eine Coincidenz nur auf der Geraden $\alpha_{123}\beta_{123}$ statthaben: jedem A oder B dieser Geraden entsprechen zwei bewegliche Schnittpunkte seiner correspondirenden Curve mit dieser Geraden; also giebt es vier Coincidenzen. Dies sind Punkte unserer Curve 11. Ordnung. Die vier übrigen in α_{123} sind $\alpha_{123} b_{45}$, $a_{12}\beta_{345}$, $a_{13}\beta_{245}$, $a_{23}\beta_{145}$.

III.

21. Es seien nun zwei Gruppen von je sechs Punkten gegeben: $A_1, \cdots, A_6$; $B_1, \cdots, B_6$. Wir bilden aus ihnen zwei Gruppenpaare von je fünf Punkten: $A_1, \cdots, A_5$; $B_1, \cdots, B_5$, welche wir $(\mathsf{A})^5$ und $(\mathsf{B})^5$ nennen wollen, und $A_1, \cdots, A_4, A_6$; $B_1, \cdots, B_4, B_6$, welche $(\mathsf{A}')^5$ und $(\mathsf{B}')^5$ heissen mögen. Wenn nun ein Punkt A im Raume (a) einen derartigen correspondirenden B in (b) hat, dass

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6),$$

der ihm also in Bezug auf die beiden sechspunktigen Gruppen $(\mathsf{A})^6$, $(\mathsf{B})^6$ entspricht, so muss B sowohl auf der A in Bezug auf $(\mathsf{A})^5(\mathsf{B})^5$ correspondirenden Curve in (b), als auch auf der in Bezug auf $(\mathsf{A}')^5(\mathsf{B}')^5$ correspondirenden liegen. Ist A ein beliebiger Punkt, so haben diese beiden correspondirenden Curven im Allgemeinen (ausser den Punkten $B_1, \cdots, B_4$) keinen Punkt gemein; also hat im Allgemeinen ein Punkt keinen correspondirenden in Bezug auf $(\mathsf{A})^6$, $(\mathsf{B})^6$. Wir haben mithin die Fläche $\mathfrak{A}^*$ der Punkte $(A)_6$ aufzusuchen, welche correspondirende

---

Bearbeitung 2. Aufl., 2. Th., S. 556. — Zeuthen hat dies Princip selbständig gefunden (Comptes rendus Juni 1874), rein geometrisch bewiesen und auf den Fall einer Coincidenzcurve, sowie auf den Raum ausgedehnt.

Punkte $(B)_6$ haben. Diese correspondirenden erfüllen natürlich eine Fläche von derselben Art: $\mathfrak{B}^*$.

22. Sei a eine beliebige Gerade, auf welcher ein Punkt bewegt werde; seine entsprechende Curve in Bezug auf $(A)^5\,(B)^5$ beschreibt eine Fläche 5. Ordnung, und ebenso die in Bezug auf $(A')^5$, $(B')^5$; diese Flächen haben ausser den 6 Verbindungslinien der Punkte $B_1, \cdots, B_4$ noch eine Curve 19. Ordnung gemein. Jeder Punkt B auf dieser hat, weil durch ihn je eine erzeugende Curve der beiden Flächen geht, einen entsprechenden Punkt A und A' auf a, deren Coincidenzen wir suchen. Die dem Punkte A auf der ersten Fläche entsprechende Curve trifft die zweite Fläche und damit die Curve 19. Ordnung ausser in den vier Punkten B_i noch in 3 Punkten, denen also 3 Punkte A' entsprechen; ebenso umgekehrt. Folglich giebt es 6 Coincidenzen der A und A'. Kommt nun A in die Ebene α_{123}, so besteht die entsprechende Curve auf der ersten Fläche aus der Geraden b_{45} und einem gewissen Kegelschnitte durch B_1, B_2, B_3 zusammengesetzt; die drei Begegnungspunkte dieser Curve mit der andern Fläche sind die beiden ferneren Schnittpunkte von b_{45} ausser dem dreifachen Punkte B_4 und der einzige noch übrige des Kegelschnitts ausser den drei dreifachen Punkten B_1, B_2, B_3. Die durch den letzten Punkt gehende erzeugende Curve der zweiten Fläche besteht aus b_{46} und einem gewissen Kegelschnitte in der Ebene β_{123}; folglich liegt sein entsprechender Punkt A' auf a in α_{123}, ist mithin unser jetziger Punkt A. Es ist auf diese Weise eine Coincidenz von A und A' zu Stande gekommen; ebenso geben die drei andern Ebenen α_{124}, α_{134}, α_{234} Coincidenzen; und es bleiben nur noch zwei weitere.

23. Die vier Coincidenzpunkte, die in den Ebenen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ liegen, führen, obgleich ihre correspondirenden Curven in Bezug auf $(A)^5\,(B)^5$ und auf $(A')^5\,(B')^5$ sich begegnen, doch nicht zu Paaren von correspondirenden Punkten in Bezug auf $(A)^6\,(B)^6$, d. h. zu solchen Punktepaaren, welche collineare Bündel nach den beiden sechspunktigen Gruppen senden.

Denn es sei A ein beliebiger Punkt in α_{123} (wie ja a in Nr. 22. eine beliebige Gerade ist). Man lege durch ihn die beiden Kegelschnitte, welche durch A_1, A_2, A_3 und bez. die Spuren A_{45}, A_{46} von a_{45} und a_{46} geben, und construire in β_{123} durch B_1, B_2, B_3 und bez. die Spuren B_{45}, B_{46} von b_{45} und b_{46} die analogen Kegelschnitte (Nr. 20.), die Kegelschnitttheile der beiden dem Punkte A correspondirenden cubischen Raumcurven; ist nun B deren vierter Schnittpunkt, so ist zwar, weil A und B den einen analogen Kegelschnitten angehören,

$$A(A_1, \cdots, A_5) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5),$$

und weil sie auch auf den andern liegen,

$$A(A_1, \cdots, A_4, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_4, B_6);$$

daraus folgt aber noch nicht:

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6).$$

Denn dazu ist nothwendig, dass durch das Entsprechen von $A(A_1, \cdots, A_4)$ und $B(B_1, \cdots, B_4)$ eine einzige collineare Beziehung festgesetzt wird. Hier aber, wo sowohl $A(A_1 A_2 A_3)$ als $B(B_1 B_2 B_3)$ in einer Ebene liegen, giebt es ein System von einfach unendlich vielen Collineationen, in denen sich jene Strahlen entsprechen: man kann nämlich noch irgend einem Strahle a' von A irgend einen Strahl b' in B zuordnen, wofern nur $AA_4(A_1A_2A_3a') \overline{\wedge} BB_4(B_1B_2B_3b')$ *); in der Collineation, die durch das Entsprechen von $A(A_1A_2A_4a')$ und $B(B_1B_2B_3b')$ bestimmt ist, sind in Folge dieser Projectivität AA_3 und BB_3 homolog, weil dies bei den Schnittstrahlen $(\alpha_{123}, a'A_4)$ und $(\beta_{123}, b'B_4)$ der Fall ist (vergl. Nr. 14.). Im Allgemeinen werden nun in einer der unendlich vielen Collineationen AA_5 und BB_5, in einer andern AA_6 und BB_6 correspondiren.

24. Also die Punkte, in denen die Gerade a den vier Ebenen α_{ikl} begegnet, haben keine solchen correspondirenden, dass aus ihnen collineare Bündel nach den beiden Gruppen $(\mathsf{A})^6$ und $(\mathsf{B})^6$ gehen. Es gilt dies mithin nur für die beiden andern Coincidenzpunkte, die sich ergeben haben.

Diejenigen Punkte $(A)_6$ *im Raume* (a), *welche in Bezug auf die beiden Gruppen* $(\mathsf{A})^6$ $(\mathsf{B})^6$ *correspondirende haben, erfüllen eine Fläche* 2. *Grades* $\mathfrak{A}^2$, *die entsprechenden* $(B)_6$ *eine ebensolche Fläche* $\mathfrak{B}^2$.

25. Die Curven, in denen diese Flächen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ bez. von α_{123} und β_{123} durchschnitten werden, lassen sich leicht als Kegelschnitte erkennen. Denn wenn auch nicht alle Punkte von α_{123} correspondirende haben, so haben doch einfach unendlich viele von ihnen und zwar nothwendig in β_{123}. Solche correspondirende Punkte A und B müssen dann, wenn die Spuren von a_{56} in α_{123}, b_{56} in β_{123} bez. A_{56}, B_{56} sind, der Bedingung genügen:

$$A(A_1A_2A_3A_{45}A_{46}A_{56}) \overline{\wedge} B(B_1B_2B_3B_{45}B_{46}B_{56});$$

denn ist das der Fall und lässt man dann $A(A_1, A_2, A_4, A_5)$ und $B(B_1, B_2, B_4, B_5)$ entsprechen, wodurch eine einzige Collineation bestimmt wird, so entsprechen sich auch $A(A_3, A_5, A_6)$ und $B(B_3, B_5, B_6)$.

Die Punkte aber A und B, welche der obigen Bedingung genügen, erfüllen zwei cubische Curven, welche bez. durch die Punkte der Grup-

*) Man erhält alle möglichen Collineationen, wenn a' festgehalten und b' in der durch die obige Projectivität bestimmten Ebene gedreht wird; eine Veränderung von a' wird nur dieselben Collineationen reproduciren.

pen gehen, wofern die Lage dieser Punkte eine ganz beliebige*). Das ist nun hier nicht der Fall, denn sowohl A_{45}, A_{46}, A_{56}, als auch B_{45}, B_{46}, B_{56} liegen je in einer Geraden.

Es sei also A ein beliebiger Punkt auf der Geraden der drei ersten Punkte und B der zweite Schnittpunkt des analogen Kegelschnitts durch B_1, B_2, B_3, B_{45} mit der zweiten Geraden, so folgt, weil $AA_{45} \equiv AA_{46} \equiv AA_{56}$ und ebenso $BB_{45} \equiv BB_{46} \equiv BB_{56}$, dass

$$A(A_1A_2A_3A_{45}A_{46}A_{56}) \overline{\wedge} B(B_1B_2B_3B_{45}B_{46}B_{56}),$$

ohne dass dies zu:

$$A(A_1A_2 \cdots A_6) \text{ coll. } B(B_1B_2 \cdots B_6)$$

führte.

Die beiden Geraden nehmen also an den Curven 3. Ordnung theil, welche demnach je in sie und einen durch A_1, A_2, A_3 bez. B_1, B_2, B_3 gehenden Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2_{123}$, $\mathfrak{b}^2_{123}$ zerfallen. Auf den Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ liegen nur die letzteren.

26. Wie auf der Curve 3. Ordnung, so liegen auch auf $\mathfrak{a}^2_{123}$ und $\mathfrak{b}^2_{123}$ Punkte von folgender Art: allen Punkten des Kegelschnitts durch $A_1A_2A_3A_{46}A_{56}$ entspricht in Bezug auf die beiden Gruppen, von denen die eine aus diesen Punkten, die andere aus den homologen Punkten besteht, ein einziger Punkt; derselbe liegt auf $\mathfrak{b}^2_{123}$**); ebenso solche Punkte liefern die Kegelschnitte durch $A_1A_2A_3A_{45}A_{56}$ und durch $A_1A_2A_3A_{45}A_{46}$ (die drei andern werden Geradenpaare); nennen wir diese Punkte B^6_{123}, B^5_{123}, B^4_{123}. Drei ähnliche Punkte ergeben sich auf $\mathfrak{a}^2_{123}$.

27. *Mit den eben gefundenen Kegelschnitten* $\mathfrak{a}^2_{ikl}$, $\mathfrak{b}^2_{ikl}$ *liegen natürlich auch die Punkte* $A_1, \cdots, A_6$, $B_1, \cdots, B_6$ *bez. auf* $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$; wie dies auch von anderer Seite zu erkennen ist.

Sei nämlich $a_0{}^3$ die cubische Raumcurve durch die 6 Punkte $A_1, \cdots, A_6$; ist $b_6{}^3$ die ihr als Curve durch $A_1, \cdots, A_5$ analoge in Bezug auf $(\mathsf{A})^5$, $(\mathsf{B})^5$, so entsprechen allen Punkten von $a_6{}^3$ in Bezug auf diese Gruppen alle Punkte von $b_6{}^3$; weil bei dem Punkte A_6 der Strahl A_6A_6 unbestimmt ist, also passend gewählt werden kann, so entsprechen diesem Punkte A_6 alle Punkte von $b_6{}^3$ auch in Bezug auf die beiden sechspunktigen Gruppen.

A_6 liegt demnach auf $\mathfrak{A}^2$, $b_6{}^3$ *auf* $\mathfrak{B}^2$; *ebenso liegen auf* $\mathfrak{B}^2$ *die fünf Curven* $b_1{}^3, b_2{}^3, \cdots, b_5{}^3$, *die den Punkten* $A_1, \cdots, A_5$ *correspondiren, und die Fläche* $\mathfrak{A}^2$ *besitzt sechs ebensolche Curven* $a_1{}^3, \cdots, a_6{}^3$,

*) Ebene Projectivität Nr. 14.

**) Ebene Projectivität Nr. 5, 6, 14.

die den Punkten $B_1, B_2, \cdots, B_6$ *entsprechen.* Es folgt daraus, dass $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ Flächen mit reellen Geraden sind.

28. Der Kegelschnitt $(A_1 A_2 A_3 A_{46} A_{56})$ ist die Projection der Curve a_0^3 aus A_6 auf α_{123}; daraus geht hervor, dass der Punkt B^6_{123} auf der Sehne durch B_6 (aus welchem Punkte B_4 und B_5 auf β_{123} in B_{46} und B_{45} projicirt werden) an die Curve b_6^3 liegt*), die zu a_0^3 in Bezug auf $(A)^5 (B)^5$ analog ist; diese Sehne liegt ja auch auf $\mathfrak{B}^2$, weil sie mit ihr 3 Punkte gemein hat.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ (oder $\mathfrak{b}^2_{ikl}$) zwei Punkte gemein haben, so dass durch drei, wie $\mathfrak{a}^2_{123}$, $\mathfrak{a}^2_{124}$, $\mathfrak{a}^2_{345}$, eine Fläche 2. Grades gelegt werden kann. Da nun die Sehne aus A_6 an a_6^3 diese 3 Kegelschnitte trifft, so liegt sie auf dieser Fläche, also auch A_6; womit dann sich zeigen lässt, dass alle andern Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ mit derselben mindestens 5 Punkte gemein haben, also auf ihr liegen; dies führt dazu, dass je die Sehne aus einem Punkte A_i an die Curve a_i^3 der Fläche angehört und also auch diese Curve selbst, weil sie 7 Punkte mit ihr gemein hat. Damit ist ein von Nr. 24. unabhängiger Beweis gegeben, dass die sechs Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2_{ikl}$ und die 6 Curven a_i^3 auf derselben Fläche 2. Grades liegen.

29. *Jede Curve* a^3 *durch* 5 *Punkte* A_i *trifft* $\mathfrak{A}^2$ *nur noch in einem Punkte*; auf jeder solchen Curve a^3 giebt es also nur einen Punkt $(A)_6$, der einen correspondirenden in Bezug auf $(A)^6 (B)^6$ hat.

Dies lässt sich auch ohne Kenntniss der Flächen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ einsehen. Die Curve a^3 gehe durch $A_1, \cdots, A_5$. Die Curven 3. Ordnung durch die Punkte $A_1, \cdots, A_4, A_6$, welche eine Gerade a treffen, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung, für welche diese fünf Punkte dreifach sind und die also von a^3 ausser in $A_1, \cdots, A_4$ noch in drei Punkten getroffen wird; geht a durch einen der Punkte $A_1, \cdots, A_4$, so entartet die Fläche 5. Ordnung in einen Kegel 2. Ordnung, der diesen Punkt zur Spitze hat: a^3 hat mit demselben ausser den Punkten $A_1, \cdots, A_4$ noch einen Punkt gemein. Folglich erzeugen die cubischen Raumcurven durch $(A')^5$, welche a^3 treffen, eine cubische Fläche, die die vier Punkte $A_1, \cdots, A_4$ zu Doppelpunkten hat. Die analogen Curven durch $(B')^5$ erzeugen ebenfalls eine Fläche 3. Ordnung, welche in $B_1, \cdots, B_4$ Doppelpunkte hat und die von der analogen Curve zu a^3 durch $(B)^5$ ausser in diesen Doppelpunkten in einem Punkte getroffen wird. Folglich wird jede Curve durch $(A)^5$ nur von einer Curve durch $(A')^5$ getroffen, in der Art, dass die analogen Curven durch $(B)^5$ und $(B')^5$ sich auch begegnen; womit der Beweis geführt ist. Es ist

*) Räumliche Projectivität Nr. 22.

dann zugleich erkannt, dass jeder Punkt, der überhaupt einen correspondirenden in Bezug auf $(A)^6\,(B)^6$ hat, nur einen hat.

30. Dass die Curve a_0^3 (Nr. 27.) der Fläche $\mathfrak{A}^2$ ausser in den Punkten A_i nicht begegnet, kann man auch ohne Kenntniss der Ordnung von $\mathfrak{A}^2$ einsehen.

Wenn A ein Punkt auf a_0^3 ist, B einer auf b_6^3, welche jener in Bezug auf die Gruppen $(A)^5\,(B)^5$ analog ist, so sind $A(A_1, \cdots, A_5)$ und $B(B_1, \cdots, B_5)$ collinear. Sucht man in B den entsprechenden Strahl zu AA_6, so wird derselbe sich nicht ändern, wenn A die Curve a_0^3 durchläuft, weil dabei der Bündel $A(A_1, \cdots, A_6)$ collinear bleibt; nur die Bewegung von B auf b_6^3 wird jenen Strahl verändern, sodass er blos einfach unendlich viele Lagen einnehmen kann, von denen im Allgemeinen keine B_6 enthält. Diese Lagen erzeugen nach Nr. 4. eine Fläche 2. Grades. Demnach hat von den Punkten auf a_0^3 keiner einen correspondirenden in Bezug auf $(A)^6\,(B)^6$, ausgenommen die sechs A_i. Hieraus, in Verbindung mit der vor. Nr., lässt sich die Ordnung der Fläche $\mathfrak{A}^2$ ableiten.

Daraus folgt weiter, dass keine zwei b_i^3, z. B. b_5^3 und b_6^3, ausser den Punkten $B_1, \cdots, B_4$ noch einen Punkt gemein haben; denn derselbe (B) würde dann, wenn A irgend ein Punkt von a_0^3 ist, so beschaffen sein, dass

$$B(B_1, \cdots, B_5) \text{ coll. } A(A_1, \cdots, A_5),$$

weil er auf b_6^3 liegt, und

$$B(B_1, \cdots, B_4, B_6) \text{ coll. } A(A_1, \cdots, A_4, A_6),$$

weil B auf b_5^3 liegt, so dass auch, weil $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$ und $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ durch ihr Entsprechen eine einzige Collineation bewirken,

$$B(B_1, \cdots, B_6) \text{ coll. } A(A_1, \cdots, A_6);$$

also alle Punkte von a_0^3 hätten einen (und zwar denselben) correspondirenden für $(A)^6\,(B)^6$, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Folglich verhalten sich alle 6 Curven b_i^3 gegen die beiden Geradenschaaren auf $\mathfrak{B}^2$ gleichartig, d. h. alle treffen die Geraden der einen Schaar (b'') zweimal und die andern (b') einmal. Aehnlich ist es auf $\mathfrak{A}^2$ mit den Curven a_i^3.

31. Eine beliebige Ebene α schneidet $\mathfrak{A}^2$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2$ (der stets reell ist); welches ist die Ordnung der Curve auf $\mathfrak{B}^2$, deren Punkte denen von $\mathfrak{a}^2$ correspondiren?

Sei β eine beliebige Ebene im Raume (b), B ein Punkt auf ihr; durch ihn geht eine Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$; die analoge im Bündel $(A_1, \cdots, A_5)$ trifft α in drei Punkten. Durch jeden derselben geht eine Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$; die analogen Curven

zu diesen 3 Curven im Bündel $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ treffen die Ebene β in 9 Punkten B'; ebenso entsprechen jedem Punkte B' 9 Punkte B.

Bewegt sich B auf einer Geraden b in β, so beschreiben die Curven des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ und ihre analogen je eine Fläche 5. Ordnung; durchläuft ebenso B' eine Gerade b' in β, so erzeugen die Curven des Bündels $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ und ihre analogen eben solche Flächen; da die beiden Curven 5. Ordnung, die von den (a)-Flächen in α eingeschnitten werden, ausser den Spuren der 6 Verbindungsgeraden der 4 Punkte $A_1, \cdots, A_4$ 19 Punkte gemein haben, so giebt es 19 Punkte B auf b, deren entsprechende B' auf b' liegen. Folglich ist die Zahl der Coincidenzpunkte nach dem Correspondenzprincip der Ebene (Nr. 19.) $9 + 9 + 19 = 37$.

Betrachten wir aber die Gerade $\beta\beta_{123}$ und bewegen B blos auf ihr; die Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ durch jeden B zerfällt in b_{45} und einen Kegelschnitt durch B_1, B_2, B_3, die analoge in a_{45} und einen Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3, welcher α in zwei beweglichen Punkten trifft, die auf $\alpha\,\alpha_{123}$ liegen. Durch jeden derselben geht eine Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$, welche in a_{46} und einen Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3 zerfällt, deren analoge Curve ähnlich aus b_{46} und einem Kegelschnitte durch B_1, B_2, B_3 besteht und β in zwei auf $\beta\beta_{123}$ liegenden beweglichen Punkten B' trifft. Also jedem B auf $\beta\beta_{123}$ entsprechen vier ebenfalls auf dieser Geraden gelegene Punkte B', ebenso umgekehrt; diese Correspondenz führt zu acht Coincidenzen, welche sich unter den 37 befinden.

Gelangt B bei seiner Bewegung auf $\beta\beta_{123}$ nach βb_{12}, so zerfällt der Kegelschnitt, der mit b_{45} die durch B gehende Curve des Bündels $(B_1, \cdots, B_5)$ bildet, in b_{12} und die Gerade von B_3 nach der Spur von b_{45}; der analoge Kegelschnitt besteht aus a_{12} und der Geraden von A_3 nach der Spur von a_{45}*); einer der Punkte, in denen dieser α trifft, ist mithin αa_{12}. Die Curve des Bündels $(A_1, \cdots, A_4, A_6)$, welche durch diesen geht, zerfällt demnach in a_{46}, a_{12} und die Gerade von A_3 nach der Spur von a_{46} in α_{123}; ähnlich ist ihre analoge Curve beschaffen und geht durch βb_{12}, sodass, wenn B in diesen Punkt kommt, einer der entsprechenden B' dort mit ihm zusammenfällt. Unter den 8 Coincidenzpunkten auf $\beta\beta_{123}$ befinden sich folglich die 3 Punkte $\beta(b_{12}, b_{13}, b_{23})$. Zu den 37 Coincidenzpunkten der Ebene β gehören demnach die 6 Ecken des vollständigen Vierseits, in welchem β das Tetraeder $B_1B_2B_3B_4$ durchschneidet, und auf jeder Seite noch 5 Punkte.

Diese 26 Punkte sind nicht Punkte $(B)_6$ auf β, welche ihre correspondirenden auf α haben; denn wenn auch die in ihnen sich schneiden-

*) Probl. der ebenen Project. Nr. 3.

den Curven der Bündel $(B_1, \cdots, B_5)$ und $(B_1, \cdots, B_4, B_6)$ zu analogen Curven solche haben, die sich auf α treffen, so führen doch diese Curven, weil sie zerfallen, aus den früher schon auseinandergesetzten Gründen nicht in ihren bez. auf α und β gelegenen Schnittpunkten zu solchen Punkten, welche collineare Bündel nach den sechspunktigen Gruppen senden. Wohl aber ist dies der Fall für die 11 übrigen Punkte.

Es giebt also in α 11 Punkte $(A)_6$, deren entsprechende $(B)_6$ auf β liegen. Oder *die entsprechenden Punkte* $(B)_6$ *der Punkte* $(A)_6$ *in* α *— die auf dem Kegelschnitte* $\mathfrak{a}^2 = (\mathfrak{A}^2, \alpha)$ *liegen — erzeugen eine Curve* 11. *Ordnung* $\mathfrak{b}^{11}$, *welche natürlich auf* $\mathfrak{B}^2$ *sich befindet.*

32. *Auf dieser Curve* $\mathfrak{b}^{11}$ *liegen die* 6 *Punkte* $B_1, \cdots, B_6$ *dreifach*; denn z. B. von den Punkten $(A)_6$, welche dem Punkte B_6 entsprechen und die Curve a_6^3 erfüllen, liegen drei in der Ebene α.

33. Da nun ferner zwei Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ zwei Punkte gemein haben, so haben auch ihre entsprechenden $\mathfrak{b}^{11}$ zwei bewegliche Punkte (ausser den 6 festen dreifachen) gemein. Daraus lässt sich ermitteln, wie gross die Zahlen μ und ν der Begegnungspunkte einer solchen Curve mit den Geraden der beiden Schaaren auf $\mathfrak{B}^2$ sind. Denn zunächst ist $\mu + \nu = 11$; legt man ferner ein beliebiges Projectionscentrum O auf die Fläche $\mathfrak{B}^2$ und projicirt zwei Curven $\mathfrak{b}^{11}$, so können nur die beiden in O sich schneidenden Geraden von $\mathfrak{B}^2$ die beiden Curven in getrennten Punkten treffen; in der Projection bewirken sie einen μ-fachen, bez. einen ν-fachen Punkt. Die Projectionen haben also gemein diese beiden Punkte, die dreifachen Punkte und die beweglichen Schnittpunkte; also ist $11^2 = \mu^2 + \nu^2 + 6 \cdot 3^2 + 2$; dies führt zu: $\mu = 7$, $\nu = 4$.

34. Die durch $A_1, \cdots, A_5$ auf $\mathfrak{A}^2$ gehende Curve a_6^3 schneidet die Geraden a'' zweimal, die a' einmal; es giebt noch eine cubische Raumcurve $(a_6^3)^*$ durch dieselben fünf Punkte, welche umgekehrt die a'' einmal, die a' zweimal trifft. Alle Punkte dieser Curve sind, weil sie auf $\mathfrak{A}^2$ liegt, Punkte $(A)_6$; ihre analoge Curve in Bezug auf $(\mathsf{A})^5$ $(\mathsf{B})^5$ geht nicht auch durch B_6, also hat jeder Punkt von $(a_6^3)^*$ einen besonderen correspondirenden $(B)_6$; diese entsprechenden müssen aber auf der analogen Curve $(b_6^3)^*$ liegen und füllen diese aus; mithin liegt dieselbe auf $\mathfrak{B}^2$.

Jedes Paar von homologen fünfpunktigen Gruppen in $(A)^6\,(B)^6$ *liefert also ein Paar analoger Curven* $(a_i^3)^*$, $(b_i^3)^*$, *welche auch in Bezug auf* $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$ *analog sind*; jedoch so, dass jedem Punkt der einen nur ein Punkt der andern entspricht, nicht alle, wie es bei der Analogie in Bezug auf fünfpunktige Gruppen der Fall ist.

35. Die Fläche der cubischen Raumcurven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche eine Gerade a treffen, ist 5. Ordnung und begegnet demnach

dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2 = (\alpha, \mathfrak{A}^2)$ in 10 Punkten. Die Fläche also der Curven desselben Bündels, welche $\mathfrak{a}^2$ schneiden, ist 10. Ordnung und enthält die beiden Curven a_6^3 und $(a_6^3)^*$, welche beide zu den erzeugenden gehören und $\mathfrak{a}^2$ dreimal treffen, dreifach, hingegen, weil durch 6 Punkte nur eine cubische Raumcurve geht, die Leitcurve $\mathfrak{a}^2$ nur einfach. Der ganze Schnitt dieser Fläche 10. Ordnung mit $\mathfrak{A}^2$ besteht aus $\mathfrak{a}^2$, a_6^3, $(a_6^3)^*$. Die analogen Curven der erzeugenden Curven dieser Fläche (in Bezug auf $(\mathsf{A})^5\,(\mathsf{B})^5$) erzeugen ebenfalls eine Fläche 10. Ordnung, die, welche jener in den durch das Entsprechen von $A_1, \cdots, A_5$ und $B_1, \cdots, B_5$ collinear gemachten Räumen (a) und (b) entspricht; sie enthält den in dieser Collineation dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ entsprechenden Kegelschnitt einfach (als Leitcurve ihrer erzeugenden Curven) und die entsprechenden Curven von a_6^3 und $(a_6^3)^*$ dreifach. Letztere ist $(b_6^3)^*$ und liegt allein von diesen drei Curven auf $\mathfrak{B}^2$, so dass die beiden Flächen noch einen Schnitt 11. Ordnung gemein haben: das ist die Curve $\mathfrak{b}^{11}$, welche dem Kegelschnitte $\mathfrak{a}^2$ entspricht. Da $(b_6^3)^*$ von den b' und b'' beziehlich zweimal, einmal getroffen wird, so schneiden diese die Fläche 10. Ordnung ausserdem noch und damit die $\mathfrak{b}^{11}$ in $10-2\cdot3$, bez. $10-3$, also in 4, bez. 7 Punkten, womit der Satz in Nr. 33. noch mehr präcisirt ist.

36. Suchen wir *die Curven auf* $\mathfrak{B}^2$, *welche den Geraden* a'', a' *entsprechen*. Da erstere den a_i^3 zweimal, letztere einmal begegnen, so werden die correspondirenden Curven von a'', bez. a' durch die B_i zweimal, bez. einmal gehen.

Die Fläche 5. Ordnung der Curven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche eine a'' treffen, enthält a_6^3 doppelt, $(a_6^3)^*$ einfach; die der analogen Curven ist die entsprechende jener bei der Collineation $(A_1, \cdots, A_5)$, $(B_1, \cdots, B_5)$, folglich ist sie ebenfalls 5. Ordnung und enthält die entsprechende Curve von a_6^3 doppelt, die von $(a_6^3)^*$, d. i. $(b_6^3)^*$ einfach und hat also ausser letzterer mit $\mathfrak{B}^2$ noch eine Curve 7. Ordnung b^7 gemein, welche der a'' correspondirt; dieselbe trifft jede b'' in $5-1=4$, jede b' in $5-2=3$ Punkten.

Ebenso ergiebt sich, dass einer Geraden a' eine Curve 4. Ordnung b^4 entspricht, welche den b'' in 3, den b' in 1 Punkte begegnet, also die unicursale Curve II. Species ist. Die Curven b^7 und $\mathfrak{b}^{11}$ sind ebenso unicursal, da sie ja auf unicursale Curven eindeutig bezogen sind.

37. Für $\mathfrak{b}^{11}$ lässt sich dies auch auf folgende Art erkennen: Sei A_0 ein fester, A ein beweglicher Punkt auf $\mathfrak{a}^2$; betrachten wir jenen als Spur einer festen a_0'', diesen als Spur einer beweglichen a', also den Büschel A_0A als Spur des Ebenenbüschels $a_0''a'$. Die Curven 4. Ordnung b^4, welche den a' correspondiren, haben mit der Curve 11. Ordnung, welche dem $\mathfrak{a}^2$ entspricht, ausser den 6 festen auf letzterer dreifachen,

auf ersteren einfachen Punkten B_i noch $4 \cdot 11 - 4 \cdot 1 - 7 \cdot 3 - 6 \cdot 3 = 1$ Punkt gemein, wie auf ähnliche Weise als in Nr. 33. durch Projection aus einem Centrum O auf $\mathfrak{B}^2$ ermittelt werden kann, wobei zu berücksichtigen ist, dass von den beiden Geraden durch O die b'' die Curven 7 mal, bez. 3 mal, die b' 4 mal, bez. 1 mal trifft. Der Curvenbüschel der b^1, von dem jede Curve einem Punkte auf $\mathfrak{a}^2$ entspricht, schneidet also $\mathfrak{b}^{11}$ nur in einem beweglichen Punkte.

38. Wie die Gebilde, denen sie entsprechen, so begegnen sich auch je zwei Curven b^4 und $\mathfrak{b}^{11}$ (wie eben gefunden), b^7 und $\mathfrak{b}^{11}$, b^4 und b^7 in einem, je zwei b^4 und je zwei b^7 in keinem beweglichen Punkte, wie dies auch durch Projection leicht zu ersehen ist.

39. *Es liege auf $\mathfrak{A}^2$ irgend eine Curve C_a $(\mu+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung, die den Geraden a'' in μ, den Geraden a' in ν Punkten begegne und durch A_h λ_h mal gehe.* Es lässt sich durch ähnliche Schlüsse wie in Nr. 35. finden, dass die Fläche der Curven des Bündels $(A_1, \cdots, A_5)$, welche C_a treffen, von der Ordnung $\sigma = 5(\mu+\nu) - 3\sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ ist; durch Projection aus einem Centrum O auf $\mathfrak{A}^2$ ergiebt sich, dass C_a den Curven $a_6{}^3$ und $(a_6{}^3)^*$ ausser in den 5 Punkte A_i in $\varrho = \mu + 2\nu - \sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ und $\varrho^* = 2\mu + \nu - \sum_{h=1}^{h=5}\lambda_h$ Punkten begegnet; so dass ϱ und ϱ^* auch die Vielfachheit dieser Curven $a_6{}^3$ und $(a_6{}^3)^*$ auf der Fläche σ^{ter} Ordnung ist; C_a und diese beiden Curven bilden den vollen Schnitt der Fläche mit $\mathfrak{A}^2$. Ferner ist auch $a_0{}^3$, weil C_a in ihrem λ_6-fachen Punkte A_6 sie trifft, eine λ_6-fache erzeugende Curve der Fläche σ^{ter} Ordnung. Die analogen Curven in Bezug auf $(\mathsf{A})^5(\mathsf{B})^5$ bilden ebenfalls eine Fläche σ^{ter} Ordnung, welche die entsprechenden Curven von $a_6{}^3$, $(a_6{}^3)^*$ und $a_0{}^3$ ebenfalls bez. ϱ-fach, ϱ^*-fach, λ_6-fach enthält. Letztere beiden sind $(b_6{}^3)^*$ und $b_6{}^3$ und liegen auf $\mathfrak{B}^2$. Folglich ist der übrige Schnitt, das ist die Curve C_b der Punkte, die denen von C_a correspondiren, von der Ordnung $2\sigma - 3(\varrho^* + \lambda_6) = 4\mu + 7\nu - 3\sum_{h=1}^{h=6}\lambda_h$. Diese Zahl ist übrigens, wie leicht zu erkennen, gerade diejenige der Begegnungspunkte von C_a mit einer Curve $\mathfrak{a}^{11}$ auf $\mathfrak{A}^2$, die ausserhalb der A_i liegen; und in der That, so oft C_a eine solche Curve $\mathfrak{a}^{11}$ trifft, so oft muss die entsprechende C_b dem ebenen Schnitte von $\mathfrak{B}^2$ begegnen, welcher $\mathfrak{a}^{11}$ correspondirt. Diese Curve C_b geht durch jeden B_i so oft, als C_a die $a_i{}^3$ ausser in den 5 Punkten $(\mathsf{A})^6$ trifft, durch welche $a_i{}^3$ geht; mithin ist die Vielfachheit von B_i gleich $\mu + 2\nu - \sum_{h=1}^{h=6}\lambda_h + \lambda_i$. Ferner trifft jede b'', b' die Curve C_b so oft, als sie der Fläche σ^{ter} Ordnung ausser

auf $(b_6^3)^*$ und b_6^3 begegnet, das ist in $\sigma - \varrho^* - 2\lambda_6 = 3\mu + 4\nu - 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} \lambda_\lambda$, bez. in $\sigma - 2\varrho^* - \lambda_6 = \mu + 3\nu - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} \lambda_\lambda$ Punkten.

Ist z. B. C_a eine Raumcurve 4. Ordnung I. Species, welche durch $A_1, \cdots, A_5$ geht, aber nicht durch A_6; so ist $\mu = \nu = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = 0$; folglich entspricht ihr eine Curve C_b 7. Ordnung, welche durch die Punkte $B_1, \cdots, B_5$ je zweimal, durch B_6 einmal geht und die Geraden b'' viermal, die b' dreimal trifft.

40. Die Punkte $(C)_5$, welche gleichzeitig nach $(\mathsf{A})^5$ und $(\mathsf{B})^5$ collineare Bündel senden, erzeugen eine Curve 11. Ordnung (Nr. 8.); ebenso entsteht durch die Punkte, welche mit $(\mathsf{A}')^5$ und $(\mathsf{B}')^5$ collineare Bündel geben, eine solche Curve. Bei der Beliebigkeit der den Gruppen nicht gemeinsamen Punkte werden beide Curven ausser den 8 Punkten $A_1, \cdots, A_4, B_1, \cdots, B_4$ keinen weiteren Punkt gemeinsam haben. Es giebt also im Allgemeinen keinen Punkt im Raume, der gleichzeitig nach $(\mathsf{A})^6$ und $(\mathsf{B})^6$ collineare Bündel schickt.

IV.

41. Wir betrachten nun zwei Gruppen von je sieben Punkten: $A_1, \cdots, A_7$; $B_1, \cdots, B_7$. Zu den sechspunktigen Gruppen $A_1, \cdots, A_6$; $B_1, \cdots, B_6$ gehören zwei Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, welche die in Bezug auf die Gruppen correspondirenden Punkte $(A)_6$ und $(B)_6$ enthalten. Die Punkte $(A)_6'$ und $(B)_6'$, welche sich in Bezug auf die Gruppen $A_1, \cdots, A_5, A_7$; $B_1, \cdots, B_5, B_7$ correspondiren, erfüllen zwei Flächen $(\mathfrak{A}^2)'$, $(\mathfrak{B}^2)'$. Die Punkte $(A)_7$, welche correspondirende $(B)_7$ in Bezug auf $(\mathsf{A})^7\,(\mathsf{B})^7$ haben, können also nur auf der Curve 4. Ordnung I. Species a^4 liegen, in der sich $\mathfrak{A}^2$ und $(\mathfrak{A}^2)'$ durchschneiden; die entsprechenden auf $b^4 = [\mathfrak{B}^2, (\mathfrak{B}^2)']$. Aber da jeder Punkt von $\mathfrak{A}^2$ oder $(\mathfrak{A}^2)'$ nur einen entsprechenden hat, so brauchen diejenigen Punkte, welche einem Punkte von a^4 in Bezug auf $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$ und auf $(\mathsf{A}')^6\,(\mathsf{B}')^6$ entsprechen, nicht identisch zu sein.

a^4 geht durch die fünf Punkte $A_1, \cdots, A_5$, mithin entspricht ihr als Curve von $\mathfrak{A}^2$ eine Curve 7^{ter} Ordnung, wie sie in Nr. 39. am Ende beschrieben ist, auf $\mathfrak{B}^2$. Diese Curve begegnet der ebenfalls auf $\mathfrak{B}^2$ gelegenen Curve b^4, welche durch $B_1, \cdots, B_5$ einfach geht und alle Geraden b'', b' zweimal trifft, ausser in den Punkten $B_1, \cdots, B_5$, wie durch Projection aus einem Centrum, das auf $\mathfrak{B}^2$ liegt, gefunden werden kann, in $7 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 4$ Punkten, offenbar den vier weiteren Begegnungspunkten der Curve 7. Ordnung mit $(\mathfrak{B}^2)'$. Sei B einer von diesen Punkten, so liegt sein correspondirender in Bezug auf $(\mathsf{A})^6\,(\mathsf{B})^6$ auf a^4 und damit auch auf $(\mathfrak{A}^2)'$; weil B auf $(\mathfrak{B}^2)'$ liegt, so hat er auch einen correspondirenden in Bezug auf

$(A')^6 (B')^6$, der auch auf $(\mathfrak{A}^2)'$ liegt. Beide correspondirende können aber nicht verschieden sein; denn da sie nothwendig beide auf der cubischen Raumcurve durch $A_1, \cdots, A_5$ liegen müssen, welche die dem B in Bezug auf $A_1, \cdots, A_5$; $B_1 \cdots, B_5$ correspondirenden Punkte enthält, so können sie nur in dem einzigen sechsten Punkte sich vereinigen, den diese nicht auf $(\mathfrak{A}^2)'$ gelegene Curve mit $(\mathfrak{A}^2)'$ ausser $A_1, \cdots, A_5$ gemein hat. Ist dieser Punkt A, so ist demnach sowohl

$$A(A_1, \cdots, A_6) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_6),$$

als auch

$$A(A_1, \cdots, A_5, A_7) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5, B_7),$$

mithin auch

$$A(A_1, \cdots, A_5, A_6, A_7) \text{ coll. } B(B_1, \cdots, B_5, B_6, B_7).$$

A und B sind folglich Punkte $(A)_7$ $(B)_7$.

Es giebt daher vier Punktenpaare $(A)_7$ $(B)_7$, welche bez. nach den beiden siebenpunktigen Gruppen $A_1, \cdots, A_7$; $B_1, \cdots, B_7$ collineare Bündel senden.

Bildet man ein drittes Gruppenpaar $A_1, \cdots, A_4, A_6, A_7$, $B_1, \cdots, B_4, B_6, B_7$, welches zu den Flächen $(\mathfrak{A}^2)''$, $(\mathfrak{B}^2)''$ führt; so sind die vier Punkte $(A)_7$, bez. $(B)_7$ die vier, welche den Flächen $\mathfrak{A}^2$, $(\mathfrak{A}^2)'$, $(\mathfrak{A}^2)''$, bez. $\mathfrak{B}^2$, $(\mathfrak{B}^2)'$, $(\mathfrak{B}^2)''$ ausser $A_1, \cdots, A_4$, bez. $B_1, \cdots, B_4$ noch gemeinsam sind.

Darmstadt, den 20. December 1875.

Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{a}{J}(\beta_1 x),\quad \overset{a}{J}(\beta_2 x).\quad \overset{a}{J}(\beta_3 x),\quad \cdots\cdots,$$

wo β_1, β_2, β_3, $\cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{a}{J}(\beta) = 0$ vorstellen.

Von L. Schläfli in Bern.

Wenn der Parameter a grösser als -1 ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \overset{a}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+a+1)} = 0$$

alle reell und paarweise entgegengesetzt. Die positiven, nach wachsender Grösse geordnet, seien β_1, β_2, $\cdots$ *). Dann ist in der Reihenform

---

*) Eine solche Wurzel β ist Function des Parameters a, und wenn dieser positiv ist, so zeigt der Ausdruck

$$\frac{\partial\beta}{\partial a} = \frac{2a}{\beta\left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2} \int_0^\beta \left(\overset{a}{J}(t)\right)^2 \frac{dt}{t},$$

der für $a = 0$ zu $1 : \beta\left(\overset{1}{J}(\beta)\right)^2$ wird, dass die Wurzel ununterbrochen wächst, während a von 0 aus wächst. Da für $a = \frac{1}{2}$ die positiven Wurzeln π, 2π, 3π, $\cdots$ sind, und da im Allgemeinen eine sehr grosse Wurzel β annähernd die Gleichung $\cos\left(\beta - (a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right) = 0$ befriedigt, so kann man aus der positiven Beschaffenheit von $\frac{\partial\beta}{\partial a}$ mit Sicherheit schliessen, dass für eine sehr grosse Ordnungszahl n annähernd $\beta_n = (2n + a - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ sei.

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} A_\lambda J^a(\beta_\lambda x)$$

bekanntlich Coefficientenbestimmung möglich; man hat

$$(2) \qquad A_n = \frac{2}{\left(J^{a+1}(\beta_n)\right)^2} \int_0^1 t f(t) J^a(\beta_n t) dt;$$

und es entsteht die Frage, unter welchen Beschränkungen die Function $f(x)$ im Intervalle $0 < x < 1$ willkürlich gegeben werden kann, damit die Reihe (1) convergire.

Hankel hat in einer schon vor sieben Jahren verfassten, aber erst aus seinem Nachlass in diese Annalen (Bd. VIII, S. 471) eingerückten Abhandlung über die Entwicklungsform (1) die Frage gelöst. Seine Untersuchung beschreibt indess einen etwas längern Weg, als die Natur der Sache erfordert. Man kann die Schwierigkeiten, die der so weit als möglich gefasste Begriff der Stetigkeit verursacht, durch ächt analytische Verwandlungen von der Entwicklungsform (1) ab und auf diejenigen Integralausdrücke hinüberwälzen, die in der Behandlung der trigonometrischen Reihe auftreten und schon vielfach untersucht worden sind.

Sollte durch (1) die Function $x^{-a} f(x)$ innerhalb des Einheitskreises (*mod.* $x < 1$) und auf dem Rande selbst mit dem Charakter einer ganzen Function definirt sein, so müsste zuletzt *mod.* $(A_\lambda : A_{\lambda-1})$ stets kleiner als eine positive Zahl r sein, die selbst unterhalb $e^{-\pi}$ läge. Dann wäre $f(1) = 0$. Im Folgenden wird aber nur die Endlichkeit des Werthes von $f(1)$ und diejenige von $x^{-a} f(x)$ in $x = 0$ vorausgesetzt werden, ausserdem, dass $f(x)$ für alle positiven unter 1 befindlichen Argumente mit erträglicher Stetigkeit gegeben sei.

Die auf die n ersten Glieder beschränkte Summe (1) sei mit S_n bezeichnet; n sei eine sehr grosse positive ganze Zahl, die zum Unendlichwerden bestimmt ist, und es sei $A = (2n + a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$. Wenn

$$(3) \qquad T_n(t) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{2 J^a(\beta_\lambda x) J^a(\beta_\lambda t)}{\left(J^{a+1}(\beta_\lambda)\right)^2}$$

gesetzt wird, so ist

$$(4) \qquad S_n = \int_0^1 T_n(t)\, t f(t) dt.$$

Dass die Summenform T_n oscillirt wie $\sum^{\lambda=\infty} \cos(\lambda a+b)$, ist leicht zu sehen. Es handelt sich zunächst darum, sie in ein passendes Integral zu verwandeln; der zugehörige Weg wird im Wesentlichen mit dem von Hankel gebrauchten übereinstimmen.

Man betrachte das Integral

$$Z = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{g(\omega)}{\omega\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\,d\omega,$$

wo der Weg einen kleinen positiven Kreis um eine positive Wurzel β der Gleichung $\overset{a}{J}(\omega) = 0$ beschreibt, aber keine andere Wurzel dieser Gleichung umschliesst; $g(\omega)$ bedeutet irgend eine in diesem Bereiche differentiable Function. Da

$$\overset{a}{J}(\beta+\psi) = -\overset{a+1}{J}(\beta)\psi\left(1-\frac{\psi}{2\beta}+\cdots\right),$$

so ist

$$(\beta+\psi)\left(\overset{a}{J}(\beta+\psi)\right)^2 = \beta\left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2\psi^2(1+0\cdot\psi+\cdots);$$

folglich

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{g(\omega)}{\omega\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\,d\omega = \frac{g'(\beta)}{\beta\left(\overset{a+1}{J}(\beta)\right)^2}, \tag{5}$$

wenn ω einen kleinen positiven Kreis um die Wurzel β beschreibt. Um (5) auf (3) anwenden zu können, muss man also die Function $g(\omega)$ aus der Bedingung

$$g'(\omega) = 2\,\omega\,\overset{a}{J}(x\omega)\,\overset{a}{J}(t\omega)$$

bestimmen. Wie aus dem Beweise der Möglichkeit der Bestimmung der Coefficienten in (1) bekannt ist, ergibt sich aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$g(\omega) = \frac{2\,\omega}{t^2-x^2}\left(\overset{a}{J}(t\omega)\,\frac{\partial}{\partial\omega}\,\overset{a}{J}(x\omega) - \overset{a}{J}(x\omega)\,\frac{\partial}{\partial\omega}\,\overset{a}{J}(t\omega)\right)$$
$$= \frac{2\,\omega}{t^2-x^2}\left(t\overset{a}{J}(x\omega)\,\overset{a+1}{J}(t\omega) - x\overset{a}{J}(t\omega)\,\overset{a+1}{J}(x\omega)\right).$$

(Man überzeugt sich leicht, dass dieser Ausdruck in Bezug auf t auch im Bereiche von $t = x$ den Charakter einer ganzen Function bewahrt.)

Wendet man jetzt (5) auf (3) an, so hat man:

$$(6)\quad T_n(t) = \frac{2}{t^2-x^2}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int\left\{t\overset{a}{J}(x\omega)\overset{a+1}{J}(t\omega) - x\overset{a}{J}(t\omega)\overset{a+1}{J}(x\omega)\right\}\frac{d\omega}{\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2},$$

wenn der Integrationsweg aus vielen kleinen um die Wurzeln β_1, β_2, $\cdots$, β_n beschriebenen positiven Kreisen besteht. Man kann nun diese vielen Wege in einen einzigen vereinigen, der alle die genannten Wurzeln und nur diese umschliesst; er sei Umfang eines Rechtecks, das durch die Realitätslinie symmetrisch getheilt wird; eine Seite falle in die laterale Axe und habe die sehr grosse Länge $2B$ (denn 0 kann ohne Gefahr passirt werden, weil sich hier das Integral wie $\int\omega d\omega$ verhält); die zu ihr parallele Seite schneide die Realitätslinie in $\omega = A = \left(2n+a+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$, (es ist dann ungefähr $A-\beta_n = \beta_{n+1}-A = \frac{\pi}{2}$). Das Integral von iB bis $-iB$ verschwindet, weil der Integrand eine ungerade Function von ω ist. Die Integrale von $A+iB$ bis iB und $-iB$ bis $A-iB$ verschwinden für $B=\infty$, weil sie mit dem Factor

$$\frac{i}{\sqrt{xt}}\,e^{-B(2-x-t)}$$

behaftet sind, wenn anders $1-x$ (wie auch x, t) angebbar positiv ist; denn so lange ist auch $2-x-t$ positiv. Es reicht also hin, wenn man in (6) die Variable ω von $A-iB$ bis $A+iB$ führt und die positive Zahl B unendlich werden lässt. Setzt man daher $\omega = A+i\chi$, wo χ von $-B$ bis B reelle Werthe zu durchlaufen hat, so ist annähernd:

$$\frac{\overset{a}{J}(x\omega)\overset{a+1}{J}(t\omega)}{\left(\overset{a}{J}(\omega)\right)^2}\,d\omega = -\frac{\operatorname{cof}(x\chi+iA(1-x))\,\operatorname{fin}(t\chi+iA(1-t))}{\sqrt{xt}\cdot\operatorname{cof}^2\chi}\,d\chi.$$

Mittelst dieses Näherungswerthes ergiebt sich aus (6) nach einigen Reductionen:

$$T_n(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{xt}}\left\{\frac{\sin[A(t-x)]}{t-x}\int_0^\infty\frac{\operatorname{cof}[(t-x)\chi]}{\operatorname{cof}^2\chi}\,d\chi\right.$$

$$\left. -\frac{\sin[A(2-t-x)]}{t+x}\int_0^\infty\frac{\operatorname{cof}[(t+x)\chi]}{\operatorname{cof}^2\chi}\,d\chi\right\}.$$

Bedeutet p eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist, so ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{cof}(2p\chi)}{\operatorname{cof}^2\chi}\,d\chi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{2p\chi}\,\frac{d\chi}{\operatorname{cof}^2\chi}$$

und geht, wenn man

$$\chi=\tfrac{1}{2}\log\frac{u}{1-u}$$

setzt, in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^p(1-u)^{-p}\,du=\frac{p}{\sin(p\pi)}$$

über. Also ist annähernd:

$$(7)\qquad T_n(t)=\frac{1}{2\sqrt{xt}}\left\{\frac{\sin[A(t-x)]}{\sin\frac{\pi(t-x)}{2}}-\frac{\sin[A(2-t-x)]}{\sin\frac{\pi(2-t-x)}{2}}\right\}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (4), ersetzt resp. $\frac{\pi(t-x)}{2}$ $\frac{\pi(2-t-x)}{2}$ durch φ und lässt

$$m=\frac{2A}{\pi}=2n+a+\tfrac{1}{2}$$

sein, so ergibt sich für ein sehr grosses n in tiefster Näherung:

$$(8)\qquad S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi x}^{\frac{1}{2}\pi(1-x)}\sqrt{1+\frac{2\varphi}{\pi x}}\,f\left(x+\frac{2\varphi}{\pi}\right)\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi(1-x)}^{\frac{1}{2}\pi(2-x)}\sqrt{\frac{2}{x}-1-\frac{2\varphi}{\pi x}}\,f\left(2-x-\frac{2\varphi}{\pi}\right)\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

ein Ausdruck, der nach den gebräuchlichen Regeln für $n=\infty$ in $f(x)$ übergeht. Da die Gleichung (7) auf $T_n(0)$, $T_n(1)$ nicht mehr anwendbar ist, so sind die Grenzen hier nicht streng zu nehmen; es muss erlaubt sein, die Intervalle an beiden Enden zu stutzen, und man muss der Gleichung (4) mit der Voraussetzung zu Hülfe kommen, dass die Integrale

$$\int_0^{\varepsilon}T_n(t)tf(t)dt,\qquad\int_{1-\zeta}^{1}T_n(t)tf(t)\,dt$$

zugleich mit ε, ζ verschwinden.

Der Unterschied von dem bei der trigonometrischen Reihe vorkommenden Näherungsausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\theta}^{\pi-\frac{1}{2}\theta} f(\theta+2\varphi)\,\frac{\sin[(2n+1)\varphi]}{\sin\varphi}\,d\varphi$$

für die Reihe

$$f(\theta) = a_0 + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(a_\lambda \cos\lambda\theta + b_\lambda \sin\lambda\theta)$$

besteht nur darin, dass hier m die Form $2n + a + \frac{1}{2}$ hat und daher im Allgemeinen incommensurabel ist, statt eine ungerade Zahl zu sein.

Bern, 17. Januar 1876.

Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

Von A. Voss in Darmstadt.

In den *Göttinger Nachrichten* vom Febr. 1875 habe ich mich mit der Aufgabe beschäftigt, die Untersuchungen der Geometrie des Raumes principiell analytisch von dem Gesichtspunkte aus auszuführen, dass jedes geometrische Gebilde dabei als ein Plücker'scher Liniencomplex betrachtet wird. Eine ausführlichere Darstellung der daselbst in Kürze angedeuteten Verhältnisse hoffe ich nächstens zu geben. Es ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, an der *Theorie der Flächen zweiten Grades* zu zeigen, wie die liniengeometrische Anschauungsweise fruchtbar gemacht werden kann, und gleichzeitig auf eine Reihe von, wie mir scheint, nicht uninteressanten Beziehungen hinzuweisen, welche dieselbe mit den entsprechenden Betrachtungen der Punkt- und Ebenengeometrie verbinden.

Von einer symbolischen Bezeichnung im Sinne der modernen Algebra, deren Einführung an und für sich keine besonderen Schwierigkeiten entgegenstehen, ist auch hier wie in meinen früheren Arbeiten, Abstand genommen, da von vorn herein kanonische Formen zu Grunde gelegt werden.

Ich habe bereits a. a. O. gezeigt, dass *specielle Complexe*, wie ich sie mit Herrn Klein nenne*), überhaupt durch eine partielle Differentialgleichung:

$$\Sigma\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^2 = \Delta\,\Sigma x_i^2 = \Delta X$$

in Liniencoordinaten x_i charakterisirt werden können. Der erste Theil der folgenden Arbeit ist nun überhaupt der Untersuchung *derjenigen quadratischen Formen von n homogenen Variabeln gewidmet, welche dieser Differentialgleichung Genüge leisten.* Sie scheinen mir, auch abgesehen von dem Umstande, dass sie die Grundlage der folgenden Betrachtungen

*) Math. Annalen V.

über Liniengeometrie bilden, ein rein algebraisches Interesse, namentlich in Rücksicht auf Determinantentheorie zu besitzen.

Für $n = 6$ ergeben sie die Theorie des speciellen Complexes zweiten Grades:

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k ,$$

dessen *Doppelstrahlen* und *reciproke Polaren* in § IV. bestimmt sind. Der Begriff der letzteren insbesondere führt zu dem allgemeineren *conjugirter Polarcomplexe* (wie sie auch von Herrn Pasch (Crelle 75) bereits betrachtet sind) und damit zu dem Begriffe von ∞^9 *Polarsextupeln linearer Complexe* in Bezug auf f, sie begründen zugleich eine allgemeine kanonische Transformation.

Die Betrachtung zweier Complexe f und φ liefert nach § II. eine *reciproke Gleichung sechsten Grades*, $\psi = 0$ zur Bestimmung des ihnen *gemeinsamen Polarsextupels*, wobei es von Interesse ist, dass im Allgemeinen kein anderes als das eigentliche *Polartetraeder* vorhanden ist.

Gleichzeitig sind die *drei liniengeometrischen simultanen Invarianten* der beiden Complexe, sowie ihre Beziehung zu den entsprechenden Invarianten Θ, Φ, Θ' der Punkt- und Ebenengeometrie besprochen, und einige der wichtigsten *simultanen Covarianten* angegeben, unter denen der *tetraedrale Complex*, dessen Singularitätenfläche in dem gemeinsamen Polartetraeder besteht, besonders hervorzuheben ist*).

Die allgemeinen Untersuchungen des § II. ermöglichen dann ferner *eine vollständige Aufzählung aller liniengeometrisch zu unterscheidenden Beziehungen zwischen zwei Flächen zweiten Grades*, wie sie in § VI. nach den Elementartheilern der Discriminante ψ gegeben ist. Ausgeschlossen sind, wie hier von vornherein bemerkt werden mag, die Fälle, in denen etwa einer der speciellen Complexe nicht mehr ein eigentlicher Flächencomplex ist; auch der Fall, wo einer der Complexe eine verschwindende Determinante hat, macht (vgl. § IX.) eine ganz besondere Behandlung nöthig.

Dabei tritt besonders der Begriff der *Involution einer oder mehrerer linearer Complexe mit zwei Flächen zweiten Grades* hervor, sowie das Vorhandensein von Polarsextupeln neben eigentlichen Polartetraedern; die weiteren Fälle sind im Anschluss an bekannte Untersuchungen im § VII. mehr schematisch abgehandelt.

Den Schluss bildet der Hinweis auf metrische Probleme, insbesondere auf *die liniengeometrische Hauptaxentransformation*, welche sich durch ihre völlige Uebereinstimmung mit den bekannten nicht der Liniengeometrie angehörigen Betrachtungen über diesen Gegenstand auszeichnet.

*) In der neuen Auflage von Salmon-Fiedler's Raumgeometrie finden sich bereits gleichzeitig Gleichungen von Flächen zweiten Grades in Punkt- und Liniencoordinaten betrachtet, doch scheint die Stellung des tetraedralen Complexes bisher nicht bemerkt zu sein.

§ I.

Ueber eine Gattung quadratischer Formen.

Es seien r Reihen von je n Grössen a gegeben

$$\begin{matrix} a_1' & a_2' & \cdots & a_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_n^r. \end{matrix}$$

Wird zur Abkürzung der Ausdruck

$$\Sigma a_i^l a_i^m, \quad i = 1 \cdots n$$

durch $(a^l a^m)$ oder noch kürzer durch (lm) bezeichnet*), *so genügt die quadratische Form* F, welche man als abhängig von r Variabelen (ax) ansehen kann,

$$(1) \qquad F = \begin{vmatrix} (1\,1) \cdots (1\,r) & (a'x) \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ (r\,1) \cdots (r\,r) & (a^r x) \\ (a^1 x) \quad\quad (a^r x) & 0 \end{vmatrix}$$

der Identität

$$(2) \qquad \Sigma F_i^2 = -\,\Omega F,$$

wo Ω den Kern der Determinante rechter Hand in (1), F_i aber $\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ bedeutet. Es ergiebt sich die Gleichung (2) auf folgende Art. Bezeichnet man mit δ_s die Unterdeterminanten nach der letzten Verticalreihe von (1), so ist:

$$F_i = (-1)^{r-1}\,\Sigma(a_i^s \delta_s), \quad s = 1 \cdots r,$$

$$\Sigma F_i a_i^k = -\,(a^k x)\,\Omega,$$

mithin

$$\Sigma F_i^2 = \Omega\,\Sigma \delta_s a_i^s x_i = -\,\Omega F, \text{ w. z. b.}$$

Man bemerkt leicht, dass die Form F identisch verschwindet, sobald $r > n$ ist. Für $r = n$ dagegen hat F den Werth $-\,\Omega \Sigma x_i^2$, für $r < n$ kann man endlich durch lineare Transformation die Zahl der unabhängigen Variabeln noch in einer bestimmten Weise beschränken.

Setzt man nämlich:

$$(3) \qquad x_i = \Sigma a_i^s y_s + \Sigma \alpha_i^m z_m,$$

wo die α_i^m beliebige Grössen sind und die Indices s, m von 1 bis r, respective von 1 bis $n - r$ gehen, so ist:

---

*) Dem entsprechend ist also $\Sigma a_i^l b_i^m = (a^l b^m)$ etc. Die Betrachtungen des Textes finden unverändert statt, wenn unter $(a^l a^m)$ die allgemeinere Form $\Sigma a_i^l a_k^m a_{ik}$ verstanden wird, doch ist der Einfachheit halber nur von der kanonischen Form Gebrauch gemacht.

$$(a^k x) = \Sigma a_i^k a_i^s y_s + \Sigma a_i^m a_i^k z_m, \quad k = 1 \cdots r,$$
$$\Sigma x_i y_k a_i^k = \Sigma (a_i^s y_s)^2 + \Sigma (a_i^m z_m)\, a_i^k y_k).$$

Zieht man die mit den y multiplicirten Horizontal- und Verticalreihen des Kerns von (1) von dem Rande ab, so treten in letzterem nur die Grössen z auf, während an Stelle der Null kommt:

$$-\Sigma x_i y_k a_i^k - \Sigma a_i^m a_i^k z_m y_k,$$

welcher Ausdruck mit Hülfe von (3) die Form:

$$-\Sigma x_i^2 - \Sigma (a_i^m z_m)^2$$

annimmt. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\Sigma x_i^2 = X, \quad \Sigma a_i^2 = A \text{ etc.}, \tag{4}$$

so ist

$$F = -\Omega X + F', \tag{5}$$

wo F' nur noch von den $n - r$ Variabelen z abhängt. Wir werden nun später F *in Rücksicht auf die Mannigfaltigkeit oder das Gebiet* (wie wir kürzer sagen werden)

$$X = 0$$

untersuchen, also $X = 0$ der Form F adjungiren. Die Formel (5) zeigt, dass *die Form F mit r Variabelen (ax) in dem Gebiete $X = 0$ äquivalent ist als Form F' von $n - r$ Variabeln.*

Ist demnach $n = 2m$ und $r > m$, so ist F *reducibel* auf $n - r < m$ Variabele. Ist dagegen $r = m$, so ist F *irreducibel*. Für ungerades n aber, $n = 2m + 1$, wird die Form immer einer anderen mit höchstens n Variabelen äquivalent. Der Fall $n = 2m$ ist daher ausgezeichnet durch den irreducibelen $r = m$, welchen er enthält, wogegen bei ungeradem $n = 2m + 1$ die Form F im Gebiete $X = 0$ keine grössere Allgemeinheit besitzt als für die nächst kleinere gerade Zahl $n = 2m$.

Es hängt damit die besondere Rolle zusammen, welche quadratische Formen $n = 2m$ in der Geometrie spielen. Im Folgenden soll immer $n = 2m$ vorausgesetzt werden, obwohl eine grosse Zahl der zu entwickelnden Sätze auch für ungerades n gelten, was auch gelegentlich hervorgehoben werden mag.

Unter Voraussetzung der Adjunction von $X = 0$ kann man immer an Stelle von F eine andere Normalform f einführen, welche der Identität

$$\Sigma f_i^2 = \Delta X \tag{6}$$

genügt.

Es ist dazu nur erforderlich

$$f = F + \lambda X \tag{7}$$

zu setzen, wo $\lambda = \frac{\Omega}{2}$, mithin $\Delta = \frac{\Omega^2}{4}$.

Wir setzen daher im Folgenden voraus, f sei eine quadratische Form von $n = 2m$ Variabelen, welche die Identität (7) befriedigt, so dass:

$$(8) \qquad \begin{cases} f = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \\ \Sigma (a_{ik})^2 = \Delta, \quad k = 1 \cdots n, \\ \Sigma a_{ik} a_{jk} = 0, \end{cases}$$

womit denn auch $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} = 4 (xy) \Delta$ ausfällt.

Von den Eigenschaften solcher Formen, deren Coefficienten *also Coefficienten orthogonaler Substitutionen* sind, sollen im Folgenden die wichtigsten hervorgehoben werden. Sie knüpfen sich an die Betrachtung ihrer Discriminante

$$(9) \qquad | a_{ik} - \varrho | = \Pi \varrho,$$

in welcher die Variabele ϱ nur den Diagonalelementen a_{ii} angehört. Man hat dann sofort:

$$(10) \qquad \Pi (+\varrho) \Pi (-\varrho) = (\Delta - \varrho^2)^n.$$

Die Gleichung $\Pi \varrho = 0$ *kann daher keine anderen Wurzeln haben als* $\varrho = \pm \sqrt{\Delta}$.

Diese Wurzeln werden aber im Allgemeinen auch beide wirklich vorhanden sein.

Man beweist dies so: Wäre

$$\Pi (+\sqrt{\Delta}) = 0, \quad \Pi (-\sqrt{\Delta}) \gtrless 0,$$

so ist das Product derjenigen Determinante, welche entsteht, wenn man die mit beliebigen Grössen $x_k^1, x_k^2 \cdots x_k^{n-1}$, $n-1$-fach geänderte Determinante $\Pi (+\sqrt{\Delta})$ mit der nicht verschwindenden Determinante $\Pi (-\sqrt{\Delta})$ multiplicirt, gleich Null. *Es müssen mithin alle* $n - 1^{te}$ *Unterdeterminanten, d. h. alle* a_{ik} *verschwinden, mit Ausnahme der* a_{ii}, *welche sämmtlich gleich* $\sqrt{\Delta}$ *sind. Die Form* f *ist daher in diesem Falle identisch mit*

$$X \sqrt{\Delta},$$

was nicht angenommen werden kann.

Von diesem speciellen Falle abgesehen, hat $\Pi \varrho = 0$ also immer beide Werthe zu Wurzeln. *Der allgemeinste Fall ist der, dass beide Wurzeln* m*-fach sind, und für dieselben je die* $m - 1$ *ersten Unterdeterminantenreihen sämmtlich verschwinden.*

Auch dies beweist man leicht durch Betrachtung geänderter Determinanten. Versieht man nämlich $\Pi (+\sqrt{\Delta})$ sowie $\Pi (-\sqrt{\Delta})$ mit einem m-fachen Rande und multiplicirt dieselben so, dass eine Determinante $2n^{ten}$ Grades entsteht, so überzeugt man sich, dass im Allgemeinen keiner der Factoren $\Pi (+\sqrt{\Delta})$, $\Pi (-\sqrt{\Delta})$ unter diesen

Umständen noch verschwindet. Die m^{ten} Unterdeterminanten sind daher von Null im Allgemeinen verschieden. Multiplicirt man dagegen eine $m-1$-fach geränderte Determinante $\Pi(+\sqrt{\Delta})$ mit der m-fach geränderten $\Pi(-\sqrt{\Delta})$, so entsteht Null, womit dann gezeigt ist, dass die $m-1$*) Unterdeterminanten und alle früheren sämmtlich verschwinden.

Es ist daher die Form f durch die Discriminante $\Pi\varrho$ *mit den beiden m-fachen Wurzeln* $\pm\sqrt{\Delta}$ *und der Elementartheiler-Charakteristik*

$$(10^a) \qquad [(11\cdots)_m(1\cdots)_m]$$

*ausgezeichnet***).

Man hat also die Identität:

$$(11) \quad \Pi\varrho = \varrho^n - m\Delta\varrho^{n-2} + n\frac{(n-1)}{2}\Delta^2\varrho^{n-4} + \cdots(-1)^n\Delta^m.$$

Die Determinante der Coefficienten von f hat also den Werth $(-1)^m\Delta^m$***). Ferner ergeben sich aus (11) bequeme Formeln zur Bestimmung der Summen von Unterdeterminanten, welche in der Entwicklung von $\Pi\varrho$ nach dem Jacobi'schen Satze auftreten würden. Beispielsweise ist $\Sigma a_{ii} = 0$†). Multiplicirt man ferner die mit den x geränderte Determinante der a_{ik}, d. h. die *adjungirte Form von f:*

$$\psi = \begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ x_k & 0 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante der a_{ik}, so ergiebt sich als Werth des Productes:

$$-\Delta^{n-1}f.$$

Mithin ist

$$(12) \qquad \psi = (-1)^{m-1}\Delta^{m-1}f.$$

Das heisst: *die adjungirte Form* ψ *ist nur um einen constanten Factor von der ursprünglichen verschieden.* Also sind die ersten Unterdeterminanten von $\Pi(0)$ bis auf den Factor $(-1)^m\Delta^{m-1}$ den Coefficienten a_{ik} selbst gleich. Es folgt daraus noch der allgemeinere Satz:

---

*) Für ungerades $n = 2m+1$ ist eine der Wurzeln $\pm\sqrt{\Delta}$ $m+1$-fach, die andere m-fach. Für erstere verschwinden denn auch die m^{ten} Unterdeterminanten, so dass die Charakteristik

$$[(1\cdots 1_{m+1})\ (1\cdots 1_m)].$$

**) Ueber die Bezeichnung vergl. die Arbeit des Herrn Weiler Math. Ann. Bd. VII, p. 145.

***) Durch Quadriren derselben würde man nur die Formel $\Pi_0^2 = \Delta^n$ erhalten. In der That kann Π_0 auch gleich $\pm\Delta^m$ sein, sobald eine andere Wurzelvertheilung stattfindet.

†) Die oben eingeführte Normalform fällt also zusammen mit der von Clebsch benutzten (Math. Ann. II, 1). Vergl. auch meine Arbeit daselbst IX, 61.

Irgend eine Subdeterminante r^{ten} Grades der a_{ik} ist gleich ihrer complementären, multiplicirt mit dem Factor

$$(-1)^m \Delta^{r-m}.$$

Complementäre Subdeterminanten m^{ten} Grades sind also nur durch den Factor $(-1)^m$ verschieden.

Wir gehen nun zu der Gruppe linearer Gleichungen über, welche durch das Verschwinden von $\Pi\varrho$ möglich werden. Für $\Pi\varrho = 0$ bestehen die n Gleichungen:

$$\Sigma a_{ik} a_i = \varrho a_k, \quad i = 1 \cdots n. \tag{13}$$

Sie sagen aus, *dass die lineare Form a_x mit f in Involution liegt.*

In Rücksicht auf das Verschwinden der Unterdeterminanten von Π hat man daher den Satz:

Den beiden Wurzeln $\pm\sqrt{\Delta}$ entsprechend liegen mit f zwei Classen m-gliedriger Gruppen linearer Formen in Involution.

Je zwei zu verschiedenen Classen gehörige Formen a_x, b_x liegen dabei unter sich in Involution, d. h. es verschwindet für sie die Form (ab).

Denn man hat aus:

$$\Sigma a_{ik} a_i = +\sqrt{\Delta} a_k,$$
$$\Sigma a_{ik} b_i = -\sqrt{\Delta} b_k$$

durch Multiplication:

$$\Sigma a_{ik} b_i a_k = +\sqrt{\Delta}(ab) = -\sqrt{\Delta}(ab),$$

d. h.:

$$(ab) = 0.$$

Wir bezeichnen jetzt die beiden m-gliedrigen Gruppen linearer Formen durch:

$$\begin{cases} \Sigma a_x^k \lambda_k, \\ \Sigma \alpha_x^k \lambda_k, \end{cases} \quad k = 1 \cdots m. \tag{14}$$

Sie erlauben, f in eine neue bemerkenswerthe Form zu bringen. Multiplicirt man nämlich die adjungirte Form ψ mit der aus den a, α gebildeten Determinante

$$K = (a' a^2 \cdots a^m \alpha' \cdots \alpha^m), \tag{15}$$

so entsteht:

$$K\psi = (-1)^m (\sqrt{\Delta})^{n-1} \begin{vmatrix} a_1' & \cdots & a_n' & x_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & x_m \\ \alpha_1' & \cdots & \alpha_n' & -x_{m+1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^m & \cdots & \alpha_n^m & -x_n \\ (a'x) & \cdots & (\alpha^m x) & 0 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

so dass f wieder nur um einem Factor von der Determinante (16) verschieden ist.

Diese Umformung setzt natürlich voraus, dass K nicht verschwinde. Um die Bedingungen genauer zu erkennen, unter denen $K = 0$ sein könnte, wollen wir überhaupt zwei Classen von je m Symbolen a, α betrachten, zwischen denen die Relationen der Involution

$$(a\alpha) = 0$$

bestehen. Man erhält dann, wenn

$$K = (a' \cdots a^m\, \alpha' \cdots \alpha^m)$$

gesetzt wird:

$$K^2 = PQ,$$

wo P eine nur aus den (aa) zusammengesetzte Determinante m^{ten} Grades, Q die analog aus den $(\alpha\alpha)$ gebildete vorstellt. Sie mögen durch

$$P = [(aa)],$$
$$Q = [(\alpha\alpha)]$$

bezeichnet werden. Es gilt nun der Satz:

Wenn K verschwindet, so verschwinden gleichzeitig die beiden Determinanten P und Q.

Um das zu beweisen, bezeichne man die Determinanten

$$(a' \cdots a^m u' \cdots u^m),$$
$$(\alpha' \cdots \alpha^m v' \cdots v^m),$$

in denen die u, v ganz willkürliche Symbole bezeichnen, durch S_u, Σ_v. Das Product dieser beiden ist dann wieder gleich dem Producte zweier aus den Grössen (av), (αu) zusammengesetzter Determinanten, so dass:

$$S_u \Sigma_v = [(av)]\,[(\alpha u)].$$

Da ferner

$$S_\alpha = K, \quad \Sigma_\alpha \equiv K,$$

so hat man:

$$\Sigma_v K = [(av)]\,[(\alpha\alpha)],$$
$$S_u K = [(\alpha u)]\,[(aa)],$$

so dass also mit K gleichzeitig $[(\alpha\alpha)]$ und $[(aa)]$ verschwinden.

Kehren wir nun zu dem specielleren Falle zurück, auf den wir vorhin geführt wurden. In demselben kann K niemals verschwinden, so lange die a und α in (14) vollständig die beiden m-gliedrigen Gruppen darstellen, d. h. keine lineare Combination der a (oder α) *unter sich* verschwindet. Um dies zu beweisen, betrachte man die Determinante L, welche aus $\Pi\varrho$ entsteht, wenn man in den m letzten Horizontalreihen ϱ mit dem Minuszeichen versieht. Sie kann für $\varrho = \pm\sqrt{\Delta}$ nicht verschwinden, weil dadurch (vgl. § VI.) eine specielle Beziehung von f zu der Form:

$$x_1^2 + \cdots x_m^2 - (x_{m+1}^2 + \cdots x_n^2)$$

vorausgesetzt sein würde. Dasselbe gilt von allen anderen Determinanten, die aus $\Pi\varrho$ durch den analogen Process m-maliger Zeichenänderung abgeleitet werden können. Nun ist das Quadrat von L für $\varrho = \pm\sqrt{\Delta}$ gleich dem Producte zweier Factoren $M \cdot N$, so dass keiner der Factoren M, N für jene Wurzeln verschwinden kann. Dazu stelle man die Determinante H, deren erste m Reihen die a, deren m letzte dagegen aus den a_{ik}, $i = 1 \cdots m$ gebildet sind, wobei zu den Gliedern a_{rr} noch $-\sqrt{\Delta}$ hinzugefügt ist. Das Quadrat derselben hat den Werth PM, diese Determinante H verschwindet also, so oft $K = 0$ ist, da der vorigen Betrachtung zufolge mit K auch P verschwindet. Multiplicirt man nun H mit L für $\varrho = +\sqrt{\Delta}$, so ergiebt sich eine aus der a gebildete Determinante m Grades, multiplicirt mit einem Factor, welcher, von Zahlenfactoren abgesehen, gleich N ist. Indem man passende Vertauschungen der Determinantenreihen und -Zeichen in L und H vornimmt, erkennt man sonach, *dass das Verschwinden von K das sämmtlicher m-gliedriger Determinanten der a sowohl als der Grössen α nach sich ziehen würde, was der Voraussetzung widerspricht.*

Eine weitere Eigenschaft der involutorischen Gruppen ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Bildet man den Ausdruck

$$\Sigma a_{ik} y_k = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_i} \text{ für } y_k = x_k + \lambda f_k,$$

welcher kurz durch $[f_i]_\lambda$ hezeichnet werden möge, so ergiebt sich:

$$[f_i]_\lambda = \Sigma\, a_{ik}(x_k + \lambda a_{kl} x_l] = f_i + \lambda \Delta x_i, \tag{18}$$

mithin:

$$\begin{cases} [f]_\lambda = \Sigma (x_i + \lambda f_i)\,(f_i + \lambda \Delta x_i) = f(1 + \lambda^2 \Delta) + 2\lambda \Delta X, \\ \Sigma [f_i^2]_\lambda = \Delta\,[X(1 + \lambda^2 \Delta) + 2\lambda f]. \end{cases} \tag{19}$$

Insbesondere ist noch:

$$\begin{cases} [f_i]_\infty = \Delta x_i, \\ [f]_\infty = f\Delta, \\ \Sigma [f_i^2]_\infty = \Delta^2 X. \end{cases} \tag{20}$$

Ordnet man demnach jedem *Werthsysteme x_i das System f_i als conjugirtes zu*, so zeigt die erste der Formeln (20), *dass diese Zuordnung eine reciproke ist.* Jedem Werth der linearen Reihe $x_i + \lambda f_i$ ist nach (18) ein anderer Werth derselben zugeordnet. *Gehört das System der x gleichzeitig den Gebieten $f = 0$, $X = 0$ an, so ist dasselbe der Fall mit der ganzen linearen Reihe $x_i + \lambda f_i$.*

Man erhält daher *sich selbst conjugirte Werthe*, indem man setzt

$$[f_i]_\lambda = f_i + \lambda \Delta x_i = \varrho\,(x_i + \lambda f_i)$$

woraus $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\varrho = \pm\sqrt{\Delta}$. Das heisst:

In jeder linearen Reihe conjugirter Werthe befinden sich zwei sich selbst conjugirte, für welche

$$f_i = \pm\sqrt{\Delta}\, x_i. \tag{21}$$

Die sich selbst conjugirten Werthsysteme sind also nichts anderes als die Coefficienten der involutorischen Gruppen. Die Gleichungen (21) haben daher zu Auflösungen die folgenden:

$$\begin{cases} x_i = \Sigma a_i^k \lambda^k, \\ x_i = \Sigma \alpha_i^k \lambda^k. \end{cases} \tag{22}$$

Und sich selbst conjugirte Werthsysteme, welche dem Gebiete $X=0$ (und somit auch $f=0$) angehören, sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\Sigma (a_i^k \lambda_k)^2 = 0, \quad \Sigma (\alpha_i^k \mu_k)^2 = 0,$$

welche, in Bezug auf die λ, μ quadratischen, Formen nothwendig *irreducibel* sind, da die Determinanten derselben, wie vorhin gezeigt, nicht verschwinden können.

Die sämmtlichen vorausgehenden Betrachtungen beziehen sich nur auf den Fall, dass beide Wurzeln $\pm\sqrt{\Delta}$ in gleicher Anzahl vorhanden sind, was durch die Voraussetzung begründet wurde, dass die m^{ten} Unterdeterminanten von $\Pi(\sqrt{\Delta})$ nicht verschwinden. Es können aber für eine der Wurzeln auch höhere Unterdeterminanten verschwinden.

Formen dieser Art lassen sich leicht aus f selbst mit Hülfe der involutorischen Gruppen ableiten.

Aus den Coefficienten a_i^k, α_i^k lassen sich nämlich durch lineare Combination zwei neue Systeme von je m Grössenreihen b_i^k, β_i^k bilden, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass *je zwei* verschiedene der linearen Formen b_x, β_x unter sich in Involution liegen.

In der That, setzt man:

$$\begin{aligned} b_i^k &= \Sigma \lambda_{kr} a_i^r, \\ \beta_i^k &= \Sigma \mu_{kr} \alpha_i^r, \end{aligned} \qquad k = 1 \cdots m,$$

so wird man die m^2 Factoren λ, μ so bestimmen können, dass die $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen

$$(b^j b^i) = 0, \quad (\beta^j \beta^i) = 0, \quad (i \gtrless j), \tag{23}$$

noch zu den bereits erfüllten $(b^m \beta^n) = 0$ hinzutreten.

Jede Function

$$F = f - 2\sqrt{\Delta}\, \Sigma \frac{(b_x^r)^2}{B_r} + 2\sqrt{\Delta}\, \Sigma \frac{(\beta_x^s)^2}{B_s}, \tag{24}$$

in welcher die Summenzeichen sich auf irgend welche aus den Formen

$b_x^1 b_x^2 \cdots b_x^m$ respective $\beta_x^1 \beta_x^2 \cdots \beta_x^m$ beziehen, *besitzt dann wieder die Eigenschaft, der Gleichung*

$$\Sigma F_i^2 = \Delta X \tag{25}$$

zu genügen.

Es werde nun die Form

$$\Phi = f - 2\sqrt{\Delta}\ \Sigma \frac{(b_x^r)^2}{B_r}$$

betrachtet, in welcher die Summe p Glieder enthalten möge. Man findet zunächst leicht, *dass die Determinante von* $\Phi - \varrho X$ *gleich* $(\varrho+\sqrt{\Delta})^{\frac{m}{2}+p}\ (\varrho-\sqrt{\Delta})^{m-p}$ *ist*, also die $m+p$-fache Wurzel $\varrho=-\sqrt{\Delta}$, die $m-p$-fache $\varrho=\sqrt{\Delta}$ hat. Versieht man die genannte Determinante mit einem l-fachen Rande, so ergiebt sich für $\varrho=-\sqrt{\Delta}$, dass diese geränderte Determinante verschwindet, so lange

$$n - l + p \geq m + 1.$$

Es verschwinden sonach für $\varrho=-\sqrt{\Delta}$ *noch die* $l=m+p-1^{\text{ten}}$ *Unterdeterminanten, ähnlich für* $\varrho=\sqrt{\Delta}$ *noch die* $l=m-p-1^{\text{ten}}$.

Setzt man daher $p=m$, so werden noch die $2m-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $\Phi-\varrho X$ für $\varrho=-\sqrt{\Delta}$ verschwinden müssen. *Dies bedingt aber das identische Verschwinden von* $\Phi+\sqrt{\Delta}X$, so dass

$$f - 2\sqrt{\Delta}\ \sum_m \frac{(b_x^r)^2}{B_r} + \sqrt{\Delta}X = 0. \tag{26}$$

Ebenso ist

$$f + 2\sqrt{\Delta}\ \sum_m \frac{(\beta_x^s)^2}{B_s} - \sqrt{\Delta}X = 0. \tag{27}$$

Aus (26) und (27) ergiebt sich die interessante Transformation:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{f}{\sqrt{\Delta}} &= \sum_m \frac{(b_x^r)^2}{B_r} - \sum_m \frac{(\beta_x^r)^2}{B_r}, \\ X &= \sum_m \frac{(b_x^r)^2}{B_r} + \sum_m \frac{(\beta_x^r)^2}{B_r}, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

oder, wenn man setzt

$$b_x^r = y_r\sqrt{B_r}, \qquad \beta_x^r = \eta_r\sqrt{B_r}, \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned} f &= \sqrt{\Delta}\ \Sigma(y_r^2 - \eta_r^2), \\ X &= \Sigma(y_r^2 + \eta_r^2). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Aus den vorigen Betrachtungen erhellt sonach, *wie* f *im allgemeinen Falle in eine Summe von gleichviel positiven und negativen Quadraten transformirt werden kann.* Gleichzeitig geht aus ihnen hervor, dass sämmtliche Charakteristiken, welche sich aus (10^a) durch

Ausdehnung der einen und entsprechende Zusammenziehung der anderen Gruppe ableiten lassen, wirklich vorhanden sind.

Es mag hier endlich noch kurz der Fall $\Delta = 0$ betrachtet werden. *Die Wurzeln von* $\Pi\varrho = 0$ *sind dann sämmtlich gleich Null.* Durch Quadriren geänderter Determinanten ergiebt sich dann leicht, *dass sämmtliche Unterdeterminanten bis zum* $m-1^{\text{ten}}$ *Grade inclusive den Factor* ϱ *und zwar die vom* k^{ten} *noch in der Potenz* $n-2k$ *enthalten. Die Charakteristik von* f *ist daher im Allgemeinen:*

$$[(2 \cdots 2)]. \tag{31}$$

Es existirt hier *eine* m-gliedrige Gruppe linearer Formen, die mit f in Involution liegen; je zwei Formen dieser Art liegen noch unter sich in Involution. Aus (19), (20) hat man noch:

$$[f_i]_\lambda = f_i\,, \quad [f]_\lambda = f\,,$$
$$[f_i]_\infty = 0\,, \quad [f]_\infty = 0\,.$$

Jedem Werthe x entspricht also auch hier noch ein conjugirter. Aber die Zuordnung ist keine reciproke, da derselbe conjugirte zu allen Werthen der linearen Reihe $x_i + \lambda f_i$ gehört.

An die Charakteristik (31) schliessen sich endlich alle diejenigen an, welche durch Auflösung der Elementartheiler 2 in die Gruppe 11 aus derselben hervorgehen.

§ II.

Das simultane System von f und φ.

Es seien zwei quadratische Formen von gleicher Variabelenzahl der im vorigen § betrachteten Gattung gegeben.

$$\begin{cases} f = \Sigma a_{ik} x_i x_k\,, & \Sigma f_i^2 = \Delta X\,, \\ \varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k\,, & \Sigma \varphi_i^2 = \Delta' X\,, \end{cases} \tag{1}$$

für welche Δ, Δ' nicht verschwinden.

Es soll nun im Folgenden die Discriminante

$$\Psi\varrho = |\, a_{ik} - \varrho b_{ik} \,| \tag{2}$$

betrachtet werden.

Es ist eine Fundamentaleigenschaft von $\Psi\varrho = 0$, *nur reciproke Wurzeln zu haben.*

Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$B_{ik} = \Sigma b_{ir} a_{kr}\,, \quad r = 1 \cdots n\,, \tag{3}$$

so ist

$$\begin{cases} (-1)^m \Delta^m \Psi = |\, \Delta - \varrho B_{ik} \,|\,, \\ (-1)^m \Delta'^m \Psi = |\, B_{ik} - \varrho \Delta' \,|\,, \end{cases} \tag{4}$$

wo wieder die Grössen Δ, Δ' nur in den Hauptdiagonalelementen der Determinanten rechter Hand stehen. Die Form der Gleichungen (4) giebt zu erkennen, dass sobald r eine Wurzel von $\Psi=0$ ist, dasselbe auch von $\varrho = \frac{1}{r}\frac{\Delta}{\Delta'}$ gelten muss, so dass also die n Wurzeln in m *Paare reciproker*

$$r\varrho = \frac{\Delta}{\Delta'}$$

zerfallen.

Man kann dies Theorem ebenfalls beweisen vermöge der Form, in welcher sich die Determinante Ψ entwickeln lässt nach Potenzen von ϱ. Wir wollen eine solche Entwickelung an der allgemeineren Determinante:

$$|\, a_{ik} + \varrho\, b_{ik} + \mu \,|$$

vornehmen (die Grössen μ befinden sich nur in der Hauptdiagonale). Zunächst ist der Coefficient von ϱ^0 gleich:

$$|\, a_{ik} + \mu \,| = (\mu^2 - \Delta)^m.$$

Für den Coefficienten von ϱ erhält man:

$$(-1)^{n-1}\, \Sigma (b_{ik}\, a_{ik})\, (\mu^2 - \Delta)^{n-1},$$

ebenso für den von ϱ^2:

$$\sum_{kl} \begin{vmatrix} \Sigma\, b_{ik}\, a_{ik} - \mu\, b_{kk} & \Sigma\, b_{ik} a_{il} - \mu\, b_{kl} \\ \Sigma\, b_{il}\, a_{ik} - \mu\, b_{kl} & \Sigma\, b_{il}\, a_{il} - \mu\, b_{ll} \end{vmatrix} (\mu^2 - \Delta)^{m-2}\, (-1)^{n-2}$$

und so weiter, so dass jede Potenz von ϱ mit einem Coefficienten multiplicirt ist, welcher eine Determinante von Ausdrücken der Form:

$$\Sigma\, b_{ik} a_{il} - \mu\, b_{kl}, \quad i = 1 \cdots n$$

ist. Man erhält diese Entwickelungscofficienten leicht, indem man die einzelnen Glieder, welche als Coefficienten der Potenzen von ϱ auftreten, durch Multiplication mit $|\, a_{ik} - \mu \,| = (\mu^2 - \Delta)^m$ in geeigneter Weise umformt. Durch successives Fortschreiten auf diesem Wege würde sich sogar die Determinante der Form

$$\Sigma\, (a_{ik} + \mu\, b_{ik} + \nu\, c_{ik} + \cdots)\, x_i x_k$$

in mannigfacher Weise entwickeln lassen.

Insbesondere hat man für $\mu = 0$

$$(4)\quad \Psi = (-1)^m [\Delta^m - \varrho A_1 \Delta^{m-1} + \varrho^2 A_2 \Delta^{m-2} - \cdots - \varrho^{n-1} A_1 \Delta'^{m-1} + \varrho^n \Delta'^n],$$

also, gleich Null gesetzt, eine reciproke Gleichung n^{ten} Grades, wobei

$$(5)\quad \begin{cases} A_1 = \Sigma\, a_{ik}\, b_{ik}, \\ A_2 = \Sigma \begin{vmatrix} \Sigma\, b_{ik}\, a_{ik} & \Sigma\, b_{ik}\, a_{il} \\ \Sigma\, b_{ik}\, a_{il} & \Sigma\, b_{il}\, a_{il} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

A_3 gleich einer analogen dreigliedrigen Determinante

$$A_3 = \Sigma \begin{vmatrix} \Sigma b_{ik} a_{ik} & \Sigma b_{ik} a_{il} & \Sigma b_{ik} a_{im} \\ \Sigma b_{il} a_{ik} & \Sigma b_{il} a_{il} & \Sigma b_{il} a_{im} \\ \Sigma b_{im} a_{ik} & \Sigma b_{im} a_{il} & \Sigma b_{im} a_{im} \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Bezeichnet man die Wurzeln von Ψ durch:

$$r_1, \varrho_1;\ r_2, \varrho_2;\ \cdots\ r_m, \varrho_m, \tag{6}$$

so ist

$$r_i \varrho_i = \frac{\Delta}{\Delta'}. \tag{7}$$

Es existiren also denselben entsprechend im Allgemeinen n verschiedene Systeme der Variabeln x, welche in zwei Gruppen x, ξ zerfallen, nämlich:

$$\begin{cases} x_1' \cdots x_n', & \xi_1' \cdots \xi_n', \\ x_1^m \cdots x_n^m, & \xi_1^m \cdots \xi_n^m, \end{cases} \tag{8}$$

welche Lösungen der Gleichungen:

$$\Sigma a_{mk} x_k = \varrho\, \Sigma b_{mk} x_k \tag{9}$$

sind. Zwischen den Werthen (8) besteht eine Reihe interessanter Beziehungen.

Es ist nämlich zuerst:

$$\begin{cases} \Sigma (x_k^i)^2 = 0, \quad \Sigma (\xi_k^i)^2 = 0, \\ \Sigma x_k^i x_k^l = 0, \quad \Sigma \xi_k^i \xi_k^l = 0. \\ \Sigma x_k^i \xi_k^l = 0, \end{cases} \tag{10}$$

wobei auf k zu summiren ist und in der letzten Gleichung i, l verschieden sein müssen.

Aus den Gleichungen

$$\Sigma a_{mk} x_k^i = r_i\, \Sigma b_{mk} x_k^i \tag{11}$$

folgt nämlich durch Multiplication mit a_{ml}, b_{ml} und nachfolgende Summation über i

$$\begin{cases} \Delta x_l^i = \Sigma b_{nk}\, a_{nl} x_k^i r_i, \\ \Delta' r_i x_l^i = \Sigma b_{nl}\, a_{nk} x_k^i. \end{cases} \tag{12}$$

Da ferner

$$\Delta\, \Sigma (x_k^i)^2 = r_i^2 \Delta'\, \Sigma (x_k^i)^2,$$

so ist $\Sigma (x_k^i)^2 = 0$, falls die Gleichung $r_i^2 = \frac{\Delta}{\Delta'}$ nicht besteht. Aus demselben Grunde ist $\Sigma (\xi_k^i)^2 = 0$. Ferner ist aus (12)

$$\Delta\, \Sigma x_l^i x_l^j = r_i \Sigma b_{mk}\, a_{ml} x_k^i x_l^j,$$
$$r_i \Delta'\, \Sigma x_l^i x_l^j = \Sigma b_{ml}\, a_{mk} x_k^i x_l^j,$$

woraus:

$$\Sigma x_i^i x_i^j \left[\frac{\Delta}{r_i} - \Delta' r_i\right] = 0\,,$$

d. h.: $\Sigma x_i^i x_i^j = 0$. Zugleich ergiebt sich:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Sigma b_{mk} a_{ml} x_k^i x_l^j = 0\,, \\ \Sigma b_{mk} a_{ml} x_k^j x_l^i = 0\,, \end{cases}$$

Setzt man ferner die rechte Seite von (11) gleich z_i, so ist

$$\Sigma z_m a_{ml} = \frac{\Delta}{r_i \Delta'} \cdot \Sigma z_m b_{ml}\,,$$

also

$$z_k^i = \xi_k^i\,,$$

woraus die weiteren Gleichungen (10) folgen. Endlich hat man noch:

$$(14)\qquad \begin{cases} \Delta x_k^i = \Sigma a_{kl} \xi_l^i\,, \\ r_i \Delta' x_k^i = \Sigma b_{kl} \xi_l^i\,. \end{cases}$$

Im Allgemeinen existiren also n Werthsysteme, welche die nämlichen Conjugirten in Bezug auf die beiden Formen f und φ haben. Sie gehören sämmtlich dem Gebiete $X=0$ an und je zwei derselben, mit Ausnahme der conjugirten Paare liegen unter sich in Involution.

Aber auch die conjugirten Paare $x_i\ \xi_i$ haben eine Eigenschaft, die hier nicht unerwähnt bleiben soll. Da nämlich:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \xi_i\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = x_i \Delta\,,$$

so ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (x_i + \mu \xi_i)} = \xi_i + \mu x_i \Delta\,.$$

Setzt man daher $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, so hat man durch:

$$\xi_i \pm \sqrt{\Delta}\, x_i$$

Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho x_i\,.$$

Ebenso ist

$$\frac{r_i}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \xi_i\,, \quad \frac{1}{2 r_i \Delta'}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = x_i\,,$$

woraus Lösungen von $\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varrho x_i$ hervorgehen. Während also die lineare Reihe $x_k^i + \lambda \xi_k^i$ immer dem Gebiete $X = 0$ angehört, *finden sich in der Reihe $x_k^i + \lambda \xi_k^i$ je zwei Werthsysteme, welche zu verschiedenen Classen der mit f und φ involutorischen Gruppen gehören.*

Die Werthe x, ξ ergeben nun in der bekannten Weise die *gleichzeitige kanonische Transformation der drei Formen*

$$X,\ f,\ \varphi.$$

Es wird dabei gestattet sein anzunehmen, dass:

$$\Sigma x_k^r \xi_k^r = 1.$$

Setzt man dann:

$$x_i = \sqrt{\Delta}\,\Sigma x_i^k z_k + \Sigma \xi_i^k \zeta_k, \tag{14}$$

so ergiebt die Multiplication mit x_i^l, ξ_i^l nach Summation über i:

$$\zeta_l = \Sigma x_i x_i^l,$$

$$\sqrt{\Delta}\, z_l = \Sigma x_i \xi_i^l;$$

ferner folgt aus (14) unter Berücksichtigung von (13):

$$\begin{cases} \Sigma a_{il} x_i = \sqrt{\Delta}\,\Sigma z_k \xi_l^k + \Delta\,\Sigma \xi_k x_l^k, \\ \Sigma b_{il} x_i = \sqrt{\Delta}\,\Sigma \dfrac{\xi_l^k}{r_k} z_k + \Delta' \Sigma x_l^k \xi_k r_k. \end{cases} \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (14), (15) entsteht endlich:

$$\begin{cases} X \equiv \Sigma z_i \zeta_i, \\ f \equiv \Sigma z_i^2 + \zeta_i^2, \\ \varphi \equiv \Sigma \dfrac{z_i^2}{r_i} + \dfrac{\zeta_i^2}{\varrho_i}, \end{cases} \qquad i = 1 \cdots m. \tag{16}$$

Gleichzeitig transformiren sich die Formen:

$$\begin{cases} R = \Sigma \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \\ S = \Sigma b_{ik} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}, \\ \Sigma = \Sigma c_{ik} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \end{cases} \tag{16*}$$

in:

$$R \equiv \Sigma \zeta_k z_k \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{\varrho_k}\right),$$

$$S \equiv \Sigma z_k^2 r_k + \zeta_k^2 \varrho_k,$$

$$\Sigma \equiv \Sigma \left(\frac{z_k}{r_k}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_k}{\varrho_k}\right)^2.$$

Unter der grossen Zahl specieller Fälle, welche durch das Auftreten gleicher Wurzeln von Ψ hervorgerufen werden können, soll hier nur ein einziger betrachtet werden, welcher besondere Beachtung verdient.

Sollen überhaupt zwei Wurzeln und nur zwei von $\Psi = 0$ einander gleich werden, so ist dies nur möglich, wenn $\varrho = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$. In allen anderen Fällen würden sofort zwei Paare gleicher Wurzeln auftreten. Dabei findet nun der interessante Satz statt:

Sobald $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ eine Wurzel von $\Psi = 0$ ist, verschwinden für dieselbe die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten der Determinante Ψ.

Den Beweis dieses Satzes kann man in verschiedener Art führen, von denen folgende nicht unelegant sein dürfte.

Unter der Voraussetzung, dass $+\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ eine Wurzel von $\Psi = 0$ sei, bilde man das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{ik} - \varrho b_{ik} & u_i \\ u_k & 0 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{ik} + \varrho b_{ik} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

für $\varrho = +\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$, wo die u beliebige Grössen vorstellen. Es entsteht dann:

$$\begin{vmatrix} B_{ik} & u_i \\ \Sigma u_m (a_{mk} + \varrho b_{mk}) & 0 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

deren von den B_{ik} gebildeter Kern eine *schiefe Determinante* ist, da:

$$B_{ik} = \Sigma a_{mk} b_{mi} - a_{mi} b_{mk}.$$

Nun sind aber Lösungen der Gleichungen

$$\Sigma a_{im} x_m = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\, \Sigma (b_{im} x_m) \tag{18}$$

vorhanden. Bezeichnet man durch ξ ein System derselben, so folgt aus (18):

$$\Sigma a_{im} b_{in} \xi_m = \xi_n \sqrt{\Delta\Delta'},$$
$$\Sigma a_{in} b_{im} \xi_m = \xi_n \sqrt{\Delta\Delta'},$$

mithin

$$\Sigma B_{ik} \xi_k = 0.$$

Es verschwindet mithin die schiefe Determinante gerader Ordnung der B_{ik}. Dann verschwinden aber auch ihre sämmtlichen Unterdeterminanten erster Ordnung, womit denn das identische Verschwinden der in den u quadratischen Form (17) nachgewiesen ist.

Man kann dasselbe auch folgendermassen einsehen. Setzt man:

$$f_i{}_x = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\, \varphi_i{}_x = \Xi_i,$$

so ist

$$f_{i_{\Xi}} = \Delta X_i ,$$

$$\varphi_{i_{\Xi}} = \sqrt{\Delta\Delta'}\, X_i ,$$

mithin auch

$$f_{i_{\Xi}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\, \varphi_{i_{\Xi}} .$$

Nun kann im Allgemeinen nicht $X_i \equiv \Xi_i$ sein. Denn wenn nur eine einzige Auflösung der Gleichungen (9) existirte, so müssten, da die Wurzel $\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ nothwendig eine Doppelwurzel ist, gleichzeitig f, φ und X verschwinden, es würde mithin ein dem Gebiete $X = 0$ angehöriges Werthsystem existiren, welches gleichzeitig mit f und φ in Involution liegt, was offenbar ein viel speciellerer Fall ist. Vgl. übrigens § VII.

Demnach existiren im Allgemeinen zwei *verschiedene* Lösungen der nämlichen linearen Gleichungen (9), womit zugleich das Verschwinden der Unterdeterminanten folgt. Daher ist nun weiter

$$f_{i_{X+\mu\Xi}} = f_{i_X} + \mu f_{i_{\Xi}} = \Xi_i + \mu\Delta X_i ,$$

$$\varphi_{i_{X+\mu\Xi}} = \varphi_{i_X} + \mu\varphi_{i_{\Xi}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\,[\Xi_i + \mu\Delta X_i] .$$

Setzt man jetzt:

$$\Xi_i + \mu\Delta X_i = \varrho(X_i + \mu\Xi_i) ,$$

d. h.:

$$\mu^2 = \frac{1}{\Delta} , \quad \varrho = \frac{1}{\mu} ,$$

so ergiebt sich:

Unter der Voraussetzung, dass $\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ *eine Wurzel von* $\Psi = 0$ *ist, existiren zwei lineare Formen:*

(19)
$$\begin{cases} \Sigma x_i \left(X_i + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\Xi_i\right), \\ \Sigma x_i \left(X_i - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,\Xi_i\right), \end{cases}$$

welche mit den beiden quadratischen Formen f *und* φ *gleichzeitig in Involution liegen. Dieselben gehören verschiedenen Classen an*, der Art, dass, wenn man die Coefficienten von (19) durch a, b bezeichnet:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a_i} = +\sqrt{\Delta}\, a_i , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = +\sqrt{\Delta'}\, a_i ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial b_i} = -\sqrt{\Delta}\, b_i , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = -\sqrt{\Delta'}\, b_i .$$

Wenn nun auch $-\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ eine Wurzel von $\Psi = 0$ ist, so existirt ein zweites Werthsystem X_i', für welches ganz ebenso:

$$f_{i_{\Xi'}} = \Delta X_i',$$
$$\varphi_{i_{\Xi'}} = -\sqrt{\Delta\Delta'}\, X_i',$$

also

$$f_{i_{\Xi'}} = -\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\, \varphi_{i_{\Xi'}}$$

ist.

Daher ist denn wieder

$$f_{i_{X'+\mu\Xi'}} = \Xi_i' + \mu\Delta X_i',$$
$$\varphi_{i_{X'+\mu\Xi'}} = -\sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}}\,(\Xi_i' + \mu\Delta X_i').$$

Man hat daher unter Berücksichtigung von (19) und der Gleichungen:

$$f_{i_{X_i' \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i'}} = \pm\sqrt{\Delta}\left(X_i' \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i'\right),$$
$$\varphi_{i_{X_i' \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i'}} = \mp\sqrt{\Delta'}\left(X_i' \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i'\right),$$

wenn zur Abkürzung

$$X_i + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i = a_i, \quad X_i' + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i' = \alpha_i,$$
$$X_i - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i = b_i, \quad X_i' - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Xi_i' = \beta_i$$

gesetzt wird:

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a_i} = +\sqrt{\Delta}\, a_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = +\sqrt{\Delta'}\, a_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = +\sqrt{\Delta}\,\alpha_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = -\sqrt{\Delta'}\,\alpha_i, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial b_i} = -\sqrt{\Delta}\, b_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = -\sqrt{\Delta'}\, b_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \beta_i} = -\sqrt{\Delta}\,\beta_i, & \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} = +\sqrt{\Delta'}\,\beta_i. \end{cases}$$

Dabei ist dann:

$$(ab) = 0, \quad (b\alpha) = 0, \quad (a\beta) = 0, \quad (\alpha\beta) = 0.$$

Man hat weiter für jedes λ:

$$(21)\quad \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a_i + \lambda\alpha_i} = \sqrt{\Delta}\,(a_i + \lambda\alpha_i), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial b_i + \lambda\beta_i} = -\sqrt{\Delta}\,(b_i + \lambda\beta_i), \end{cases} & \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i + \lambda\alpha_i} = \sqrt{\Delta'}\,(a_i - \lambda\alpha_i), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial b_i + \lambda\beta_i} = -\sqrt{\Delta'}\,(b_i - \lambda\beta_i), \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i + \lambda\beta_i} = \sqrt{\Delta'}\,(a_i + \lambda\beta_i), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i + \lambda b_i} = -\sqrt{\Delta'}\,(\alpha_i + \lambda b_i), \end{cases} & \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a_i + \lambda\beta_i} = +\sqrt{\Delta}\,(a_i - \lambda\beta_i), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i + \lambda b_i} = +\sqrt{\Delta}\,(\alpha_i - \lambda b_i). \end{cases} \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (20), (21) geht hervor:

Es existiren zwei lineare Reihen $a_i + \lambda\alpha_i$, $b_i + \lambda\beta_i$ *von sich selbst conjugirten Werthsystemen in Bezug auf* f, *deren Elemente paarweise in Bezug auf* φ *conjugirt sind, und umgekehrt zwei ähnliche* $a_i + \lambda b_i$, $\alpha_i + \lambda\beta_i$ *in Bezug auf* φ. *In jeder Reihe finden sich zwei dem Gebiete* $X = 0$ *angehörige Elemente, welche untereinander conjugirt in Bezug auf die eine Form, sich selbst conjugirt in Bezug auf die andere sind.*

Endlich liegen mit f *und* φ *in Involution vier lineare Formen* a_x b_x α_x β_x *und zwar in der folgenden Gruppirung:*

mit f		mit φ	
in Classe $+\sqrt{\Delta}$,	in Classe $-\sqrt{\Delta}$	in Classe $+\sqrt{\Delta'}$,	in Classe $-\sqrt{\Delta'}$
a_x	—	a_x	—
—	b_x	—	b_x
α_x	—	—	α_x
—	β_x	β_x	—

Die Untersuchung der weiteren speciellen Fälle wird mittelst der folgenden Bemerkungen sehr erleichtert.

Verschwinden die $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von Ψ für eine Wurzel ϱ, so giebt es eine k-gliedrige Gruppe

$$z_i = \Sigma\varepsilon_i^k\lambda_k\,,$$

welche die Gleichungen (9) befriedigt. Da noch immer:

$$(\Delta - \varrho^2\Delta')\,\Sigma z_i^2 = 0\,,$$

so folgt:

Findet das Verschwinden der $k-1^{\text{ten}}$ *Unterdeterminanten für eine Wurzel statt, welche von* $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ *verschieden ist, so gehört die ganze Gruppe* z_i *dem Gebiete* $X = 0$ *an.*

Setzt man ferner:

$$\xi_i = \Sigma a_{ik}z_k = \varrho\,\Sigma b_{ik}z_k = \Sigma\lambda_k\xi_i^k\,,$$

so ist

$$\Sigma a_{ik}\xi_k = \Delta\,\Sigma b_{ik}\xi_k = \varrho\Delta'\,,$$

mithin:

$$\Sigma a_{ik}\xi_k = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\Delta}{\Delta'}\,\Sigma b_{ik}\xi_k = \Delta\,\Sigma\lambda_k z_i^k\,.$$

Hieraus folgt:

Findet das Verschwinden der $k-1^{\text{ten}}$ *Unterdeterminanten für eine Wurzel* ϱ, *welche nicht* $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ *ist, statt, so findet es auch statt für die reciproke Wurzel, und zwar werden die Potenzen, in welchen die Wurzelfactoren in den Unterdeterminanten auftreten, in beiden Fällen*

die nämlichen sein; die Elementartheilergruppe ist für reciproke Wurzeln die nämliche.

Den Beweis des letzteren Zusatzes, welcher für die vollständige Untersuchung der speciellen Fälle besonders wichtig erscheint, kann man, obwohl er in den vorigen Bemerkungen schon implicite enthalten ist, etwa in folgender Weise führen.

Wenn die p^{ten} Unterdeterminanten von $\Psi\varrho$ sämmtlich den Factor $(\varrho-\varrho_1)^q$ haben, so wird die horizontal und vertical mit ganz beliebigen Grössen $u\ v\ w\ \cdots\ U\ V\ W\cdots$ p-fach geränderte Determinante der $a_{ik}-\varrho b_{ik}$, welche durch $\Pi\varrho$ bezeichnet werden möge, die folgende Gleichung befriedigen:

$$\Pi\varrho = (\varrho-\varrho_1)^q\,\pi\,(u\ v\ w\cdots U\ V\ W\cdots),$$

wo unter π, wie auch im Folgenden unter π', ein die eingeklammerten Grössen enthaltender Ausdruck verstanden ist.

Multiplicirt man $\Pi\varrho$ mit der Determinante der b_{ik}, so entsteht:

$$(-1)^m\,\Pi\varrho\,\Delta'^m = \Omega\varrho,$$

$\Omega\varrho$ ist dabei wieder eine geränderte Determinante, die verticalen Ränder sind ungeändert geblieben, die Grössen $U_k\ V_k\ W_k$ in den horizontalen je in $\Sigma U_i b_{ki}$, $\Sigma V_i b_{ki}$, $\cdots$ verwandelt, der Kern wird gebildet aus der Determinante:

$$|\,B_{ki}-\varrho\Delta'\,|,$$

wo die B_{ik} definirt sind durch die Gleichungen (3).

Setzt man nun:

$$\Sigma U_i b_{ki} = u'_k, \qquad u_k = \Sigma a_{ki} V'_i,$$
$$\Sigma V_i b_{ki} = v'_k \text{ etc.} \cdots, \qquad v_k = \Sigma a_{ki} V'_i \text{ etc.} \cdots,$$

so sind auch die $u'\ v'\cdots U'\ V'\ \cdots$ als ganz willkürliche Grössen zu betrachten, da die Determinanten der a_{ik}, b_{ik} nicht verschwinden, überdies ist:

$$U_j = \Sigma u'_k b_{jk}, \qquad U'_j = \Sigma u_k a_{jk},$$
$$V_j = \Sigma v'_k b_{jk}\cdots, \qquad V'_j = \Sigma v_k a_{jk} \text{ etc.}$$

Demnach ist:

$$\Omega\varrho = (\varrho-\varrho_1)^q\,\pi'\,(u'\ v'\ w'\cdots U'\ V'\ W'\cdots).$$

Setzt man jetzt:

$$\varrho = \frac{\Delta}{\Delta'\mu},$$

so verwandelt sich $\Omega\varrho$ in $(\Omega'\mu)\dfrac{(-1)^{n-p}}{\mu^{n-p}}\cdot$ $\Omega'\mu$ ist dabei eine Determinante, welche horizontal mit den $\Sigma a_{ik} U'_i$, $\Sigma a_{ik} V'_i$, $\cdots$, vertical mit den $u'\ v'\ w'$ gerändert ist, während der Kern aus der Determinante:

$$|\,\Delta-\mu B_{ik}\,|$$

besteht. Demnach ist $\Omega'\mu$ gleich dem Producte von $\Pi\mu$ mit der Determinante der a_{ik}; oder:

$$\Omega\varrho = \Pi\mu \frac{(-1)^{n-p}(-1)^m\Delta^m}{\mu^{n-p}}.$$

Hieraus ergiebt sich dann:

$$\Pi\mu = \frac{\mu^{n-(p+q)}}{(-1)^{n-(p+q)}}\left(\mu - \frac{\Delta}{\Delta'\varrho_1}\right)^q \frac{\Delta'^m}{\Delta^m}\,\pi'(u'\,v'\,w'\cdots U'\,V'\,W')\,\varrho_1^q,$$

womit der angegebene Satz bewiesen ist, da $\Pi\mu = (\mu - \varrho_2)^q\,\pi''$.

Sich selbst in Bezug auf f und φ conjugirte Werthsysteme können aber nur vermöge einer Wurzel $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ auftreten.

Man kann, auf diese Bemerkungen gestützt, Tabellen für die möglichen Charakteristiken der Elementartheiler von Ψ anlegen. Man wird auf diesem Wege indess eine grössere Zahl von Combinationen erhalten als wirklich möglich sind, deren Reduction noch weiterer directer Betrachtungen bedarf.

§ III.

Geometrische Deutung.

Die Betrachtungen der beiden vorigen § würden sich nun sehr leicht im Sinne einer Theorie von Flächen zweiten Grades in einem Raume von $n-1$ Dimensionen deuten lassen. Indem wir von dem Falle $n=2$, welcher zu keinen besonderen Bemerkungen Veranlassung giebt, absehen, hat man zunächst für $n=4$ *Flächen zweiten Grades im Punkt- oder Ebenenraum.*

Aus den Untersuchungen der §§ I. und II. folgt, dass jedem Punkte x in Bezug auf $X=0$ x selbst, in Bezug auf $f=0$ sein conjugirter entspricht. Aber es giebt zwei gerade Linien, deren Punkte in Bezug auf f und X gleichzeitig sich selbst entsprechen; es sind die beiden Diagonalen eines von Erzeugenden von f und X gebildeten Vierseits, in welchem f und X sich schneiden, d. h. die gemeinsamen conjugirten Polaren von f und X. Der in Bezug auf f conjugirte Punkt eines auf $X=0$ gelegenen Punktes liegt wieder auf X, die Verbindungslinie solcher conjugirter Paare schneidet f in einem zu ihnen harmonischen Paare. Den Punkten von $f-kX=0$ entsprechen analog Punkte der nämlichen Fläche, deren Verbindungslinien mit den ersten f in constantem Doppelverhältniss schneiden.

Für eine zweite Fläche $\varphi=0$ existiren nun zwei Punktepaare aa', bb', welche sich in Bezug auf beide Flächen f und φ als conjugirte verhalten; sie bilden wieder Ecken eines Vierseits von Erzeugenden auf der Fläche X. Die Verbindungslinien (aa'), (bb') schneiden beide Flächen f und φ in Punktepaaren, welche zu aa' resp. bb'

harmonisch liegen, gleichzeitig aber nach § II. (19) die conjugirten Polaren, welche f und X resp. φ und X gemeinsam sind. Demnach hat man den folgenden Satz, welcher sich freilich auch leicht geometrisch beweisen lässt:

Die beiden Geraden, welche zwei Systeme conjugirter Polaren in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung $X = 0$ schneiden, sind selbst conjugirte Polaren dieser Fläche und schneiden dieselbe in Punkten eines Vierseites von Erzeugenden.

§ IV.

Anwendung auf Liniengeometrie.

Es werde nun $n = 6$ vorausgesetzt. Dann ist $f = 0$ *ein Complex zweiten Grades* und zwar nach § II. (18) ein *specieller*, d. h. alle Geraden, deren Coordinaten die Gleichung $f = 0$ befriedigen, sind Tangenten einer Fläche zweiten Grades, wie denn ja auch unmittelbar aus den genannten Gleichungen hervorgeht, dass im allgemeinen Falle (vgl. die folg. Anm.) sämmtliche Complexgerade sich in ∞^2 lineare Büschel anordnen, deren Ebenen und Mittelpunkte die nämliche irreducibele Fläche zweiten Grades erzeugen. Ferner liegen mit f zwei Classen dreigliedriger Gruppen linearer Complexe in Involution*), von denen je zwei verschiedenen Classen angehörende unter sich in Involution stehen. Es sind dies die beiden Gruppen, *deren specielle lineare*

---

*) Die entsprechenden Untersuchungen für Complexe n^{ten} Grades vgl. *Göttinger Nachrichten* Febr. 1875. Erst nachher habe ich bemerkt, dass Herr Pasch, von Betrachtungen ausgehend, die von diesen Untersuchungen ganz verschieden sind, bereits (*Crelle* 75) analoge Formeln für die conjugirte Polare eines speciellen Complexes zweiten Grades gegeben hat. Implicite findet sich diese Bestimmung auch schon bei Plücker, Neue Geometrie p. 294 ff. ff.

Zu den speciellen Complexen gehören nach I.:

1) $[(1\,1\,1)\,(1\,1\,1)]$ 2) $[(1\,1\,1\,1)\,(1\,1)]$ 3) $[(1\,1\,1\,1\,1)\,1]$

mit nicht verschwindender, und

4) $[(2\,2\,2)]$ 5) $[(2\,2\,1\,1)]$ 6) $[2\,1\,1\,1\,1]$

mit verschwindender Determinante. 2) ist der Complex $f = a_x b_x - \frac{(ab)}{2} X = 0$, wenn $A = 0$, $B = 0$. Die conjugirte Polare einer Geraden z ist hier diejenige, welche in der aus den Geraden a, b, z gebildeten Regelschaar zu a, b, z harmonisch liegt. 3) ist der doppeltzählende lineare Complex $f = a_x^2 - \frac{1}{2} AX$, die conjugirte Polare ist hier identisch mit der Polare in Bezug auf den linearen Complex.

Für die *Kegelcomplexe* [4) der allgemeine Fall, 5) und 6) die aus 2) und 3) abgeleiteten, wenn $(ab) = 0$ resp. $A = 0$], vgl. auch § IX., geht die conjugirte Polare immer durch die Spitze des Kegels (Ebene des Kegelschnittes).

Complexe die beiden Schaaren der Erzeugenden von f darstellen. Die Coordinaten einer Erzeugenden sind

$$z_i = f_i \pm \sqrt{\Delta}\, x_i, \tag{1}$$

sobald unter x eine Complexgerade verstanden wird. Sie sind die *Doppelstrahlen* des Complexes zweiten Grades. Ist dagegen x eine beliebige Gerade des Raumes, so geben die Gleichungen

$$z_i = f_i \tag{2}$$

die Coordinaten ihrer *conjugirten Polare*. Allgemein ordnen die Gleichungen (2) jedem linearen Complexe x einen conjugirten zu. Unter den linearen Complexen, welche dem aus zwei conjugirten gebildeten linearen Büschel angehören, befinden sich immer zwei in verschiedenen Classen befindliche, welche mit der Fläche in Involution liegen.

Um ein *Polartetraeder* von f zu construiren, kann man die Gerade x beliebig wählen. Damit ist ihre conjugirte Polare x' gegeben. Eine zweite Gerade y, welche x und x' schneidet, liefert mit ihrer conjugirten y' dann ein Vierseit, dessen beide Diagonalen die noch fehlenden Kanten $z\, z'$ des Polartetraeders bilden.

Es führt das aber zu dem allgemeineren Begriffe von sechs linearen Complexen $x\, x'\, y\, y'\, z\, z'$, welche, zu zwei und zwei conjugirt, unter sich in Involution liegen, sobald sie nicht conjugirt sind. Solche Complexe bilden ein *Polarsextupel* von f, es giebt deren ∞^9.

Die Einführung der Polarsextupel führt nun zu der *allgemeinsten kanonischen Transformation eines Complexes f.*

Es seien nämlich:

$$x\, x'\, y\, y'\, z\, z'$$

die Complexe eines Sextupels, so dass

$$x_i' = \frac{\sigma}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{\sigma}{2}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{\sigma}{2}\frac{\partial f}{\partial z_i}.$$

Dann ist:

$$(xy) = 0, \qquad (yz) = 0, \qquad (zx) = 0,$$
$$(xy') = (x'y) = 0, \quad (xz') = (x'z) = 0, \quad (yz') = (y'z) = 0,$$

während die Summen der Quadrate der $x_i, y_i, z_i, \cdots$ gleich eins gesetzt werden können, wenn

$$\sigma^2\Delta = 1.$$

Endlich ist:

$$(xx') = \sigma f_x,$$
$$(yy') = \sigma f_y,$$
$$(zz') = \sigma f_z, \qquad f_x = \Sigma a_{ik} x_i x_k \text{ etc.}$$

Benutzt man nun zur Transformation der Variabelen X_i in ξ_i die Substitution:

(3) $$X_i = x_i\xi_1 + x_i'\xi_2 + y_i\xi_3 + y_i'\xi_4 + z_i\xi_5 + z_i'\xi_6 ,$$

so ist:

(4) $$X = \Xi + 2\sigma\,[f_x\xi_1\xi_2 + f_y\xi_3\xi_4 + f_z\xi_5\xi_6] ,$$

während aus:

$$\Sigma X_i a_{ik} = \frac{\xi_1 x_k' + \xi_3 y_k' + \xi_5 z_k'}{\sigma} + \Delta\sigma\,[\xi_2 x_k + \xi_4 y_k + \xi_6 z_k]$$

folgt:

(5) $$f = f_x[\xi_1^2 + \xi_2^2] + f_y[\xi_3^2 + \xi_4^2] + f_z[\xi_5^2 + \xi_6^2] + \frac{2}{\sigma}\,[\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \xi_5\xi_6].$$

Die Transformation auf ein Polartetraeder liefert dagegen:

(6) $$\begin{cases} X \equiv \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \xi_5\xi_6 , \\ f \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2 , \end{cases}$$

welche Gleichungen mit der kanonischen Form, die in § II. gegeben wurde, zu vergleichen sind.

§ V.

Das simultane System zweier speciellen Complexe zweiten Grades.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung zweier Flächen $f=0$, $\varphi=0$, so ist ersichtlich, dass die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ § II. sich auf ihr *gemeinsames Polarsextupel* beziehen. Im Allgemeinen *existirt nur ein einziges Polarsextupel und zwar in der speciellen Gestalt des Polartetraeders.* In der That erhalten wir drei Paare gerader Linien, welche sich mit Ausnahme der ein Paar bildenden gegenseitig schneiden, d. h. Kanten eines Tetraeders conjugirter Polaren bilden.

Der Complex zweiten Grades:

(1) $$R = \Sigma a_{ik}b_{ik}x_i x_l = 0 ,$$

welcher nach § II. (13) sämmtliche Tetraederkanten enthält, hat demnach die Ecken und Seitenflächen desselben zu Ausnahmepunkten und Ebenen. Er ist also ein *tetraedraler Complex.*

Da nun die Gleichung (1) in der Form:

$$R = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

geschrieben werden kann, so hat man den Satz:

*Alle Geraden, deren conjugirte Polaren in Bezug auf zwei Flächen zweiten Grades sich schneiden, treffen ihr gemeinsames Polartetraeder in Punkten eines constanten Doppelverhältnisses**).

---

*) Es ist leicht, diesen Satz, den ich anderswo noch nicht bemerkt habe, auch analytisch zu verificiren. Der Werth des Doppelverhältnisses ergiebt sich sehr leicht aus der unter (2) gegebenen kanonischen Form von R.

Für die Tangenten der gemeinsamen Raumcurve vierter Ordnung oder die Erzeugenden der umhüllenden Developpabelen vierter Classe der beiden Flächen findet daher ebenfalls Unveränderlichkeit dieses Doppelverhältnisses statt, ein Satz, den man geometrisch als eine unmittelbare Folge aus dem Begriff eines Flächenbüschels zweiter Ordnung leicht erkennt.

Der tetraedrale Complex R ist das einfachste Beispiel einer *simultanen Covariante*. Man kann leicht die Gleichungen anderer Covarianten angeben, z. B. derjenigen S und Σ, welche von den conjugirten Polaren der Tangenten der einen Fläche in Bezug auf die andere gebildet werden. Dieselben sind bereits unter § II. (16^a) gegeben.

Wir geben endlich noch die kanonischen Formen an, welche nach § II. durch Transformation auf das gemeinsame Polartetraeder entstehen:

$$(3)\quad \begin{cases} X = z_1z_2 + z_3z_4 + z_5z_6\,, \\ f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2\,, \\ \varphi = \frac{z_1^2}{\varrho_1} + \frac{z_2^2}{\varrho_2} + \frac{z_3^2}{\varrho_3} + \frac{z_4^2}{\varrho_4} + \frac{z_5^2}{\varrho_5} + \frac{z_6^2}{\varrho_6}\,, \\ R \equiv z_1z_2(\varrho_1+\varrho_2) + z_3z_4(\varrho_3+\varrho_4) + z_5z_6(\varrho_5+\varrho_6)\,, \\ S \equiv z_1^2\varrho_1 + z_2^2\varrho_2 + z_3^2\varrho_3 + z_4^2\varrho_4 + z_5^2\varrho_5 + z_6^2\varrho_6\,, \\ \Sigma \equiv \frac{z_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{z_2^2}{\varrho_2^2} + \frac{z_3^2}{\varrho_3^2} + \frac{z_4^2}{\varrho_4^2} + \frac{z_5^2}{\varrho_5^2} + \frac{z_6^2}{\varrho_6^2}\,. \end{cases}$$

Die Coefficienten $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_3\varrho_1$, $\varrho_5\varrho_6$ sind die conjugirten Wurzeln der Gleichung sechsten Grades:

$$(3)\quad \Delta^3 - \varrho A_1\Delta^2 + \varrho^2 A_2\Delta - \varrho^3 A_3 + \varrho^4 A_2\Delta' - \varrho^5 A_1\Delta'^2 + \varrho^6\Delta'^3 = 0,$$

so dass:

$$\varrho_1\varrho_2 = \varrho_3\varrho_4 = \varrho_5\varrho_6 = \frac{\Delta}{\Delta'}\,.$$

Die Gleichung (3) enthält neben Δ, Δ' noch drei *simultane Invarianten* A_1, A_2, A_3. Wir verwandeln nun (3) durch die Substitution:

$$(4)\qquad z = \varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\Delta}{\Delta'}$$

in die cubische Gleichung:

$$(5)\quad \Delta'^3 z^3 - A_1 z^2\Delta'^2 + z(\Delta' A_2 - 3\Delta^2\Delta') - A_3 + 2A_1\Delta\Delta' = 0.$$

Diese cubische Gleichung ist nun offenbar eine *Resolvente der biquadratischen Gleichung, auf welche das Problem des gemeinsamen Polartetraeders in Punkt- oder Ebenencoordinaten führt.* Um die Abhängigkeit, in welcher die Gleichungen sechsten und vierten Grades stehen, genauer kennen zu lernen, werden wir die Transformation kanonischer Formen in Punkt- oder Ebenencoordinaten in Plücker'sche Liniencoordinaten betrachten.

Ist:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \tag{6}$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, so geht dieselbe durch Einführung der Plücker'schen Coordinaten:

$$p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad p_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1, \quad p_5 = x_1 y_4 - x_4 y_1,$$
$$p_4 = x_3 y_4 - x_4 y_3, \quad p_3 = x_4 y_2 - x_2 y_4, \quad p_6 = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

wobei

$$\Pi = p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_5 p_6 = 0,$$

über in

$$a_1 a_3 p_2^2 + a_1 a_2 p_4^2 + a_2 a_3 p_5^2 + a_4 a_3 p_4^2 + a_1 a_4 p_6^2 + a_2 a_4 p_3^2 = 0. \tag{7}$$

Dabei ist dann, wie man unmittelbar sieht, $\Delta = a_1 a_2 a_3 a_4$, also *gleich der Determinante der Form* (6).

Bildet man ferner, von der durch $\sqrt{\Delta}$ dividirten adjungirten Form von (6) ausgehend:

$$\sqrt{\Delta}\left[\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} + \frac{u_4^2}{a_4}\right] = 0, \tag{8}$$

wieder die Gleichung des Complexes zweiten Grades, so erhält man die nämliche Gleichung (2), so dass dieselbe gleichzeitig auf die beiden Formen (6) und (8) bezogen werden kann.

Betrachtet man ferner zwei Formen:

$$(a_x)^2 = 0, \quad (b_x)^2 = 0,$$

so sind die biquadratischen Gleichungen, auf welche die Frage nach dem gemeinsamen Polartetraeder führt:

$$\begin{cases} \Delta + \varrho\Theta + \varrho^2\Phi + \varrho^3\Theta' + \varrho^4\Delta' = 0, \\ \Delta + \varrho\Theta'\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}} + \varrho^2\Phi + \varrho^3\Theta\sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}} + \Delta'\varrho^4 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Bezeichnet man nun die Resolvente der biquadratischen Gleichung:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0$$

in der Form

$$a_4^3 z^3 - a_4^2 a_2 z^2 + (a_1 a_3 - 4 a_0 a_4) a_4 z - (a_4 a_1^2 - 4 a_0 a_4 a_2 + a_0 a_3^2) = 0$$

als Euler'sche Resolvente, so hat man den Satz:

Die Euler'schen Resolventen der beiden Gleichungen (9) *sind identisch.*

Man erhält in der That beidemale die cubische Gleichung:

$$\Delta'^3 z^3 - \Delta'^2 \Phi z^2 + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta')\Delta' z - [\Delta'\Theta^2 - 4\Phi\Delta\Delta' + \Delta\Theta'^2] = 0.$$

Bildet man jetzt auch die Gleichung in Linienconrdinaten für die Form $(b_x)^2 = 0$ und dann die Discriminante Ψ, so zeigt eine directe Vergleichung, dass die Coefficienten A_1, A_2, A_3 die folgenden Werthe haben:

$$(10)\qquad \begin{cases} A_1 = \Phi, \\ A_2 = \Theta\Theta_1' - \Delta\Delta', \\ A_3 = \Theta^2\Delta' - 2\Phi\Delta\Delta' + \Theta'^2\Delta. \end{cases}$$

Dieselben beweisen den Satz:

Die Resolvente der bicubischen Gleichung (3), *wie sie in* (5) *vorliegt, ist identisch mit der Euler'schen Resolvente der Gleichungen* (9). Denn von der Identität beider ausgehend, würde man gerade die Formeln (10) erhalten.

Damit ist der Zusammenhang aufgedeckt, in welchem die liniengeometrischen Invarianten $\Delta\ \Delta'\ A_1\ A_2\ A_3$ zu den früheren Invarianten stehen.

Dass Δ, Δ' nicht wesentlich von den gleichnamigen Punktinvarianten verschieden sind, mag man schon aus dem Umstande entnehmen, dass ihr Verschwinden in beiden Fällen dasselbe, nämlich Degeneration der Fläche in einen Kegel oder Kegelschnitt bedeutet, ihre Grade sind ausserdem in beiden Fällen dieselben. Ferner wird die Eigenschaft, *dass Polartetraeder der einen Fläche existiren, deren Kanten Tangenten der anderen sind, durch* $A_1 = 0$ *ausgedrückt**). Dabei mag auf die interessante Analogie aufmerksam gemacht werden, in welcher die Invarianten Θ und Φ stehen. Θ ist bekanntlich die Summe der Producte der Coefficienten von f in die der adjungirten Form von φ. *Die Invariante* Φ, *welche in der Punktgeometrie eine complicirtere Bildung hat, befolgt nun auf liniengeometrischem Standpunkte genau dasselbe Bildungsgesetz***). Damit dies klar hervortrete, hat man A_1 vermöge der Identität der Form φ und ihrer adjungirten sich passend umgeformt zu denken***).

Die Werthe der Θ, Θ' sind übrigens nicht eindeutig bestimmt durch die Formeln (10). Es beruht das auf dem Umstande, dass in der That diese Formeln sich sowohl auf die Darstellung der Fläche in Punkt- als auch in Ebenencoordinaten, also gleichzeitig auf die beiden Gleichungen (9) beziehen müssen.

Die gleichzeitige Betrachtung der liniengeometrischen Invarianten neben den bisher bekannten leitet nun zu weiteren Covarianten-Complexen. Unter ihnen ist besonders hervorzuheben die (nicht in sich dualistische) Covariante ψ, für welche:

---

*) Auch dies lässt sich auf dieselbe Weise, wie man das Verschwinden der Invarianten Θ, Θ' zu deuten pflegt, an den liniengeometrischen Formen darthun.

**) Man vgl. hiermit den Ausdruck für Φ, welchen nach Salmon-Fiedler's Raumgeometrie I, p. 236, 2. Auflage Cathcart gegeben hat.

***) Das gleichzeitige Verschwinden von $A_1 A_2$ führt das Verschwinden der Determinante der Covarianten mit sich, welche in Punktcoordinaten mit T, T' bezeichnet werden. Vgl. Salmon-Fiedler p. 259.

(11) $$F = f + \lambda\psi + \lambda^2\varphi = 0$$

für jedes λ einen speciellen Complex zweiten Grades darstellt.

Man hat dann zu setzen:

(12) $$\psi = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 + a_4 z_4^2 + a_5 z_5^2 + a_6 z_6^2,$$

wo:

$$a_1 = \left(\varrho_2 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}, \quad a_2 = \left(\varrho_1 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

$$a_3 = \left(\varrho_4 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_4 - \varrho_3}, \quad a_4 = \left(\varrho_3 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_3 - \varrho_4},$$

$$a_5 = \left(\varrho_6 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_6 - \varrho_5}, \quad a_6 = \left(\varrho_5 \frac{\Theta}{\Delta} - \frac{\Theta'}{\Delta'}\right) \frac{1}{\varrho_5 - \varrho_6}.$$

Dass F in der That einen speciellen Complex und zwar in der Normalform darstellt, ergiebt sich aus der Formel:

(13) $$\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial F}{\partial z_2} + \frac{\partial F}{\partial z_3}\frac{\partial F}{\partial z_4} + \frac{\partial F}{\partial z_5}\frac{\partial F}{\partial z_6}$$
$$= 4\,(z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6)\,[\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta'].$$

Zum Beweise derselben hat man zu beachten, dass aus den Eigenschaften der Wurzeln von (3) sich leicht die Gleichungen:

(14) $$\begin{cases} 3\frac{\Delta}{\Delta'} + (\varrho_1+\varrho_2)\left[\frac{A_1}{\Delta'} - (\varrho_1+\varrho_2)\right] + (\varrho_3+\varrho_4)(\varrho_5+\varrho_6) = \frac{A_2}{\Delta'^2}, \\ 2\frac{\Delta A_1}{\Delta'^2} + (\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_3+\varrho_4)(\varrho_5+\varrho_6) = \frac{A_3}{\Delta'^3}, \\ \Delta'(\varrho_1+\varrho_2) + \frac{(\varrho_1+\varrho_2)\Delta'(A_2+\Delta\Delta') - 2\Phi A\Delta' - A_3}{(\varrho_1-\varrho_2)^2\Delta'^2} = \Phi, \end{cases}$$

sowie die analogen ergeben, welche man durch Vertauschung von $\varrho_1\varrho_2$ mit $\varrho_3\varrho_4$ oder $\varrho_5\varrho_6$ erhält.

Den zweifachen Werthen der Invarianten Θ, Θ' entsprechend erhält man so zwei Covarianten ψ. *Es sind diejenigen, deren Gerade die beiden Flächen f und φ in harmonischen Punktpaaren schneiden, respective harmonische Tangentenebenenpaare mit ihnen bestimmen.* Beiläufig folgt aus der Gleichung (13):

$$a_1 a_2 + \varrho_1 + \varrho_2 = \Phi,$$
$$a_3 a_4 + \varrho_3 + \varrho_4 = \Phi,$$
$$a_5 a_6 + \varrho_5 + \varrho_6 = \Phi,$$

d. h.: *Die singulären Linien der Complexe $\psi = 0$ werden durch den tetraedralen Complex R ausgeschnitten.*

Die Gleichung (11) stellt das Büschel von Flächen zweiten Grades vor, welches die nämliche Durchschnittscurve resp. die nämliche umhüllende Developpabele besitzt wie f und φ. Auf eine weitere Behandlung derselben, z. B. für confocale Flächen zweiten Grades, soll

hier nicht eingegangen werden. Es sei nur noch darauf hingewiesen, wie durch den Umstand, dass in (13) ausschliesslich Invarianten vorkommen, *das allgemeine Problem erledigt ist, die fundamentalen Covarianten ψ aus den allgemeinen Formen f und φ abzuleiten*, wozu man ohne Einführung der liniengeometrisch-irrationalen Invarianten Θ, Θ' nur schwierig gelangen dürfte*).

Endlich sei noch bemerkt, dass die Gleichung:

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta' = 0, \tag{15}$$

wie es sein muss, die vier Kegel resp. Kegelschnitte bestimmt, welche in dem Büschel (13) vorkommen. Denn das Verschwinden von (15) ist wegen (13) die Bedingung, unter welcher der Complex (11) einen Kegel resp. Kegelschnitt darstellt.

§ VI.

Specielle Fälle.

Die Untersuchungen des § II. gestatten, die sämmtlichen denkbaren speciellen Fälle a priori hinzuschreiben, welche die Discriminante Ψ darbieten kann. Indem wir dies für $n = 6$ in der folgenden Tabelle ausführen, sollen die Elementartheilergruppen, welche einer Wurzel $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ entsprechen, durch einen übergesetzten Strich hervorgehoben werden**). Links daneben gesetzt sind zur Vergleichung die Elementartheilercharakteristiken der entsprechenden Discriminante in Punkt- oder Ebenencoordinaten.

Erste Gruppe.

Keine der Wurzeln hat den Werth $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$. Wir erhalten 6 Fälle:

(1)	[1111]	[111111]	1
(2)	[211]	[2211]	2
(3)	[(11)11]	[(11)(11)11]	3
(4)	[31]	[33]	4
(5)	[(21)1]	[(21)(21)]	5
(6)	[(111)1]	[(111)(111)]	6

*) Die Untersuchung über die zugehörigen Formen von $a_{ik} - \varrho b_{ik}$ kann mit Hülfe der in § I. und II. entwickelten Betrachtungen leicht geführt werden. Hier treten namentlich die mit S, Σ bezeichneten Covarianten und einige andere auf; um nicht zu weitläufig zu werden, sind diese Verhältnisse hier übergangen.

**) Eine mehr als eingliedrige Elementartheilergruppe bezieht sich im Allgemeinen auf die Existenz einer linearen Reihe (Büschel) conjugirter Polarcomplexe. Dieselben sind sämmtlich speciell, wenn die betreffende Wurzel von $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ verschieden ist, im anderen Falle allgemein. Ueber die Discriminante des Polartetraeders vergleiche die Arbeit des Herrn Lüroth (Schlömilch's Zeitschr. f. Math. VIII, 1868), der Fall (12) ist dort nicht angegeben.

Zweite Gruppe.

Die Wurzeln $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ sind höchstens als Doppelwurzeln vorhanden, 4 Fälle:

$[(\overline{11})\,11\;\;11\,]$	7
$[(\overline{11})\;2\;\;2\;]$	8
$[\,\overline{11}\,(11)(11)]$	9
$[\,\overline{11}\;\overline{11}\;\;11\,]$	10

Dritte Gruppe.

Eine der Wurzeln $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ ist vierfach, 8 Fälle:

(7)	$[22]$	$[(\overline{31})\,11]$	11
		$[(\overline{31})\,(\overline{11})]$	12
(8)	$[2\,(11)]$	$[(\overline{22})\,11]$	13
		$[(\overline{22})\,(\overline{11})]$	14
		$[(\overline{211})\,11]$	15
		$[(\overline{211})\,(\overline{11})]$	16
(9)	$[(11)\,(11)]$	$[(\overline{1111})\,11]$	17
		$[(\overline{1111})\,(\overline{11})]$	18

Vierte Gruppe.

Eine der Wurzeln $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ ist sechsfach.

(10)	$[4]$	$[(\overline{51})]$	19
		$[(\overline{42})]$	23
		$[(\overline{411})]$	24
(11)	$[(31)]$	$[(\overline{33})]$	20
		$[(\overline{321})]$	25
(12)	$[(22)]$	$[(\overline{3111})]$	21
		$[(\overline{222})]$	26
(13)	$[(211)]$	$[(\overline{2211})]$	22

Die beiden letzten Fälle $[\overline{2111}]$ $[\overline{111111}]$ können von vornherein ausgeschlossen werden, der erste würde $\varrho\varphi = f + \lambda a_x^2$, der zweite $\varrho\varphi = f$ bedingen. Aber auch die Fälle 23, 24, 25, 26 treten in Wirklichkeit nicht auf; die übrigen wird man im Folgenden angegeben finden.

Es werde zunächst der Fall betrachtet, wo eine der Wurzeln der Gleichung § V. (3) gleich $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ ist. Die erforderliche Bedingung ist:

(1) $$(2A_1\Delta\Delta' + A_3) = 2\sqrt{\Delta\Delta'}(A_2 + \Delta\Delta'),$$

oder

(2) $$[\Theta\sqrt{\Delta'} - \Theta'\sqrt{\Delta}]^2 = 0.$$

Nach den allgemeinen Untersuchungen des § II. existirt dann ein Büschel linearer Complexe, deren Coefficienten x, z die Gleichungen

(3) $$\Sigma a_{ik}x_k = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}\,\Sigma b_{ik}x_k = z_i$$

befriedigen. *Unter ihnen befinden sich zwei, welche mit f und φ gleichzeitig in Involution liegen.*

Sie bilden mit den, den 4 anderen Wurzeln entsprechenden, Geraden ein Büschel von linearen Polarsextupeln. Die Directricen der linearen Congruenz sind die beiden Kanten des eigentlichen Polartetraeders, die Charakteristik:

(7) $$[\overline{(11)}\,11\,11].$$

Es können aber auch $+\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ und $-\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ beide Wurzeln der Gleichung sechsten Grades sein. Dazu ist erforderlich:

$$A_3 + 2A_1\Delta\Delta' = 0, \quad A_2 + \Delta\Delta' = 0$$

oder

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta = 0,$$

während die Gleichung 6ten Gerades übergeht in

$$(\Delta - \varrho^2\Delta')^2\left[\Delta + \Delta'\varrho^2 + \frac{A_3\varrho}{2\Delta\Delta'}\right] = 0,$$

so dass die beiden letzten Wurzeln gegeben sind durch:

$$\varrho = -\frac{A_3}{4\Delta\Delta'^2} \pm \sqrt{\frac{A_3^2}{16\Delta^2\Delta'^4} - \frac{\Delta}{\Delta'}}.$$

Diesen letzteren beiden entsprechend existiren zwei einfache conjugirte Polaren (Kanten des Polartetraeders), ausserdem aber zwei Büschel von linearen Polarcomplexen, *demgemäss eine Doppelschaar von Polarsextupeln.* Auch hier liefern die Directricen der linearen Congruenzen die übrigen Kanten des Polartetraeders; die Charakteristik ist:

(10) $$[\overline{(11)}\,\overline{(11)}\,11].$$

Liniengeometrisch ist dieser Fall ausgezeichnet durch die Existenz von vier linearen Complexen, welche mit f und φ gleichzeitig in Involution liegen, wie dies in § II. (19) nachgewiesen ist. Und ferner folgt aus den dort angeführten Entwicklungen: *Für jede Fläche existirt ein Polartetraeder, von welchem vier Kanten Erzeugende der anderen Fläche sind. Die beiden einfachen Wurzeln entsprechen demnach zwei geraden Linien, welche beide Flächen in Vierseiten von Erzeugenden schneiden. Jedes*

Vierseit bildet sammt seinen Diagonalen ein Polartetraeder derjenigen Fläche, der es nicht angehört.

Um diesen Fall an einem Beispiel zu erläutern, betrachte man die beiden Complexe:

$$\varphi = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = 0,$$
$$f = \alpha p_1^2 - \alpha p_2^2 - \alpha p_3^2 + \alpha p_4^2 - \alpha^2 p_5^2 - p_6^2 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades sind, da $\frac{\Delta}{\Delta'} = \alpha^2$:

$$\varrho = +\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}, \quad \varrho = -\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}, \quad \varrho = -1, \quad \varrho = -\alpha^2.$$

Den Doppelwurzeln entsprechen als Lösungen der Gleichungen:

für $\varrho = +\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$

$$p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_5 = 0, \quad p_6 = 0,$$

für $\varrho = -\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$

$$p_1 = 0, \quad p_4 = 0, \quad p_5 = 0, \quad p_6 = 0,$$

d. h. zwei lineare Congruenzen, deren Directricen vier Kanten des f und φ gemeinsamen Polartetraeders bilden. Die Gleichungen der vier linearen Complexe, welche mit f und φ in Involution liegen, sind

$$p_1 + p_4 = 0, \quad p_1 - p_4 = 0, \quad p_2 + p_3 = 0, \quad p_2 - p_3 = 0.$$

Der Begriff der Involution eines linearen Complexes mit zwei Flächen zweiten Grades, zu welchem die bisher besprochenen Fälle geführt haben, soll nun in dem Folgenden noch genauer untersucht und seinem geometrischen Inhalte nach dargelegt werden.

Liegt ein linearer Complex mit einem speciellen Complexe zweiten Grades in Involution, so *enthält derselbe alle Erzeugenden der einen Art.* Aber man beweist leicht, dass *demselben auch noch zwei Erzeugende der anderen Art angehören, dass mithin das Strahlensystem, welches durch die beiden Complexe bestimmt ist, aus den Tangentenbüscheln längs zwei Erzeugenden der anderen Art besteht.*

Bezeichnet man nämlich die dreigliedrige Gruppe der involutorischen Complexe des Complexes zweiten Grades durch:

$$C_1 = a_x\lambda + b_x\mu + c_x\nu,$$

so giebt $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ die Erzeugenden erster Art, während die speciellen Complexe von C_1 die Geraden der anderen Schaar zu Axen haben. Damit nun z. B. der Complex $a_x = 0$ eine der letzteren enthalte, ist zu setzen:

$$\Sigma[a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu]^2 = 0,$$
$$A\lambda + (ab)\mu + (ac)\nu = 0,$$

so dass sich eine quadratische Gleichung für die $\lambda\,\mu\,\nu$ ergiebt, deren Determinante nach § I. (15) nicht verschwindet.

Liegt nun der lineare Complex $C_1 = a_x$ mit f und φ in Involution, so werden die correspondirenden Schaaren von Erzeugenden gegeben sein durch:

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0 \text{ für } f,$$
$$a_x = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \gamma_x = 0 \text{ für } \varphi.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber unmittelbar, *dass noch ein zweiter Complex existirt, welcher ebenfalls mit beiden Flächen in Involution liegt, dem dann die beiden anderen Schaaren angehören.*

Die Coefficienten desselben sind nämlich durch das System der z gegeben, welches die Gleichungen:

$$a_z = 0, \quad b_z = 0, \quad c_z = 0, \quad \beta_z = 0, \quad \gamma_z = 0$$

befriedigt. Bezeichnet man diesen Complex durch C_2, so finden sich also auf jeder Fläche zwei Erzeugende der zweiten Art, welche C_1, und zwei der ersten Art, welche C_2 angehören. Die beiden Geraden, welche die vier C_1 angehörigen Geraden schneiden, sind conjugirte Polaren in Bezug auf C_1. Daraus folgt dann ohne Weiteres: *Diese beiden letzteren Geraden schneiden beide Flächen in je einem Vierseit von Erzeugenden.* Dasselbe gilt von dem Geradenpaare, welches analog zu C_2 gehört, womit eine bemerkenswerthe Gruppirung von Vierseiten auf beiden Flächen gegeben ist.

Man bezeichne ferner durch $C_k\psi$ die Schaar der Erzeugenden einer Fläche ψ, welche dem linearen Complexe C_k angehört. Man betrachte nun $C_1 f$ und irgend zwei der anderen Art, welche conjugirte Polaren in Bezug auf C_1 sind. *Sie werden offenbar gleichzeitig von zwei Erzeugenden der Schaar $C_1\varphi$ geschnitten,* denn alle Complexgeraden, welche die eine von zwei conjugirten Polaren des Complexes treffen, treffen auch die andere. Das liefert den folgenden Satz:

In die Raumcurve vierter Ordnung, welche den Schnitt der beiden Flächen bildet, lassen sich zwei einfach unendliche Schaaren von windschiefen Vierseiten einschreiben, deren Gegenseiten aus je zwei Erzeugenden der einen und der anderen Fläche bestehen). Die nämlichen Vierseite beziehen sich gleichzeitig im dualistischen Sinne auf die umhüllende Developpabele.*

Ist C_1 ein *specieller* Complex, so ist seine Axe eine *beiden Flächen gemeinsame Erzeugende.* Der Complex C_2 ist dann im Allgemeinen

*) Auf diesen Satz wurde ich zuerst durch Herrn Sturm aufmerksam. Zu einer Reihe weiterer Sätze gelangt man, wenn man die Raumcurve von verschiedenen Punkten aus auf eine beliebige Ebene projicirt. Es sei noch bemerkt, dass die Gleichung der Raumcurve resp. der Developpabelen durch die drei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $R = 0$ vorgestellt werden.

noch nicht speciell, er enthält von den Schaaren $C_1 f$, $C_1 \varphi$ zwei Geradenpaare x', x''; ξ', ξ'', bestimmt durch:

$$z_x = 0, \quad a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0, \quad X = 0,$$
$$z_\xi = 0, \quad a_\xi = 0, \quad \beta_\xi = 0, \quad \gamma_\xi = 0, \quad \Xi = 0.$$

Keines dieser Geradenpaare kann coincidiren, dagegen existirt nur eine einzige Gerade, welche beide Paare trifft, nämlich die Erzeugende a. Multiplicirt man nämlich die mit den $x' x'' \xi' \xi''$ horizontal und vertical geränderte Determinante der Form x (d. h. die Cayley'sche Determinante der vier Geraden) mit dem Quadrat der Determinante $(zabc\beta\gamma)$, so entsteht:

$$AZ \begin{vmatrix} (b\xi') & (c\xi') \\ (b\xi'') & (c\xi'') \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} (\beta x') & (\beta x'') \\ (\gamma x') & (\gamma x'') \end{vmatrix}^2,$$

welcher Ausdruck wegen $A = \Sigma a_i^2 = 0$ verschwindet. Verschwinden endlich die beiden Invarianten Θ, Θ', so haben wir vier lineare Complexe $C_1 C_2 C_3 C_4$, welche mit f und φ in Involution liegen. Bezeichnet man die Schaar von Erzeugenden auf einer Fläche ψ, welche zwei Complexen C_k, C_l angehört, durch $C_{kl}\psi$, so finden sich nach § II.

auf f die Schaaren $C_{12}f$ und $C_{13}f$
„ φ „ „ $C_{23}\varphi$ und $C_{14}\varphi$.

Nun giebt es zwei Gerade von $C_{12}f$, welche conjugirte Polaren sind in Bezug auf C_1 und C_3. Sie werden von zwei Erzeugenden der Schaaren $C_{23}\varphi$ und $C_{14}\varphi$ gleichzeitig geschnitten. *Es entsteht so ein Vierseit von Erzeugenden der Fläche φ, dessen Diagonalen Erzeugende von f sind.* Ein zweites Vierseit correspondirt mit der zweiten Schaar von f, so dass im Ganzen vier Vierseite für die Flächen existiren, bei denen je vier Kanten aus Erzeugenden der einen und die Diagonalen aus Erzeugenden der anderen Fläche gebildet werden.

Der früheren Betrachtung analog ergiebt sich noch:

In die Raumcurve vierter Ordnung, in welcher sich f und φ schneiden, lässt sich auf vierfache Art eine einfach unendliche Schaar von Vierseiten einschreiben, deren Gegenseiten Erzeugende der einen und anderen Fläche sind.

Auf die Existenz von Polartetraedern der einen Fläche, deren vier Kanten Erzeugende der anderen sind, ist schon oben hingewiesen.

§ VII.

Fortsetzung.

Die Gleichung § V. (3) erhält ferner ein *Doppelpaar gleicher Wurzeln*, wenn die Discriminante ihrer cubischen Resolvente verschwindet. Sei demnach $\varrho_1 = \varrho_3$, $\varrho_2 = \varrho_4$; ϱ_5 und ϱ_6 beziehen sich

auf zwei conjugirte Polaren. Dagegen entspricht der Wurzel $\varrho_1 = \varrho_3$ in den Gleichungen:

$$\Sigma a_{ik} x_k = \varrho_1 \Sigma b_{ik} x_k = z_i$$

ein Werthsystem der x, für welches:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0, \quad X = 0,$$

ausserdem folgt hieraus:

$$(xz) = 0, \quad Z = 0,$$
$$\Sigma a_{ik} z_i z_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} z_i z_k = 0.$$

Wir erhalten demnach zwei Gerade x, z, welche conjugirte Polaren in Bezug auf beide Flächen, zugleich aber Tangenten derselben sind, die von einem gemeinsamen Punkte auslaufen. *Die Flächen haben daher einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt.* Das System der conjugirten Polaren besteht aus den beiden Geraden x, z und den beiden den Wurzeln ϱ_5, ϱ_6 zugehörigen Geraden, von denen die eine durch den Punkt (xz), die andere in der Ebene (xz) verläuft.

Setzt man etwa*)

$$(1) \qquad f \begin{cases} x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0 \\ p_2^2 + p_3^2 - 2 p_1 p_4 + 2 p_5 p_6 = 0, \end{cases}$$

so ist die Gleichung einer sie berührenden Fläche:

$$(2) \quad \varphi \begin{cases} a_1 x_1^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + 2 b_1 x_4 x_1 + a_3 x_2^2 + c x_4^2 + 2 b_2 x_4 x_2 + 2 \lambda x_1 x_3 = 0, \\ p_1^2 (a_2^2 - a_3 a_1) + 2 \lambda a_2 p_1 p_2 + 2 (a_2 b_2 - a_3 b_1) p_1 p_3 - 2 \lambda b_2 p_1 p_4 \\ \quad + 2 (a_2 b_1 - a_1 b_2) p_1 p_5 + 2 \lambda a_3 p_1 p_6 + \lambda^2 p_2^2 + 2 \lambda b_1 p_2 p_5 \\ \quad + p_3^2 (b_2^2 - c a_3) + 2 (c a_2 - b_1 b_2) p_3 p_5 - 2 c \lambda p_4 p_5 + (b_1^2 - c a_1) p_5^2 \\ \quad + 2 \lambda b_2 p_5 p_6 = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung $\Psi \varrho = 0$ die Gestalt

$$(\lambda^2 - \varrho)(b_2^2 - c a_3 - \varrho)[(\lambda b_2 - \varrho)^2 - \lambda^2 a_3 c]^2 = 0$$

annimmt, so hat man in der That die Charakteristik:

$$(2) \qquad [22\,11],$$

in dem besonderen Falle $\lambda^2 = b_2^2 - c a_3$ dagegen:

$$(8) \qquad [22\,(11)].$$

Es werden sich die beiden Flächen *stationär* berühren, wenn die Resolvente von Ψ drei gleiche Wurzeln hat. Um diesen Fall an dem angeführten Beispiele darzustellen, hat man in (2) zu setzen:

---

*) Es sind immer gleichzeitig die Gleichungen der Flächen in Punkt- und Plücker'schen Liniencoordinaten angegeben; im letzteren Falle natürlich in der Normalform, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial p_4} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial p_3} + \frac{\partial f}{\partial p_5}\frac{\partial f}{\partial p_6} = \Delta\Pi.$$

$$(b_2-\lambda)^2 = a_3 c$$

und damit wird die Charakteristik:

(4) $$[3\,3]\,.$$

Es können aber auch für $\varrho_1 = \varrho_3$ alle ersten Unterdeterminanten von Ψ verschwinden; wie vorhin gezeigt, findet das Gleiche dann auch für $\varrho_4 = \varrho_2$ statt. Wie zu Ende des § II. bemerkt ist, existiren dann zwei lineare Reihen von Werthen:

$$x_k + \lambda\xi_k,$$
$$z_k + \lambda\xi_k,$$

welche die Gleichungen II. (9) befriedigen. Dabei ist nothwendig

$$\Sigma(x_k+\lambda\xi_k)^2 = 0\,, \quad \Sigma(z_k+\lambda\xi_k)^2 = 0\,,$$

so dass zwei Büschel von Geraden vorhanden sind, *deren Strahlen in Bezug auf beide Flächen die nämlichen conjugirten Polaren zukommen.* In demselben befinden sich zwei ausgezeichnete Gerade, für welche:

(3) $$\Sigma(x_k+\lambda\xi_k)(z_k+\lambda\xi_k) = 0\,,$$

d. h. der quadratischen Gleichung (3) entsprechend, deren beide Wurzeln λ_1, λ_2 sein mögen, giebt es zwei Paare sich schneidender conjugirter Polaren. Da nun auch für $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$ die folgenden Gleichungen bestehen:

(4) $$\begin{cases} \Sigma(x_k+\lambda\xi_k)(z_i+\lambda\xi_i)\,a_{ik} = 0\,, \\ \Sigma(x_k+\lambda\xi_k)(z_i+\lambda\xi_i)\,b_{ik} = 0\,, \end{cases}$$

so sind dieselben gleichzeitig Tangenten beider Flächen. *Daraus folgt, dass f und φ sich in zwei verschiedenen Punkten berühren*; die Verbindungslinie der Berührungspunkte, sowie die Verbindungslinie der Centra der beiden genannten Büschel ist dann das System der conjugirten Polaren, welches den beiden Wurzeln ϱ_5, ϱ_6 entspricht.

Man kann, unter Beibehaltung der Gleichung für $f = 0$, etwa setzen:

(5) $$\varphi \begin{cases} 2\lambda x_2 x_4 + a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_3 + a_3 x_3^2 = 0, \\ \lambda^2 p_3^2 + 2\lambda(a_2 p_5 p_6 + a_3 p_4 p_6 - a_1 p_1 p_5 - a_2 p_1 p_4) + p_2^2(a_2^2 - a_1 a_3) = 0. \end{cases}$$

Damit wird:

$$\Psi = (a_2^2 - a_1 a_3 - \varrho)\,(\lambda^2 - \varrho)\,[(\varrho - a_2)^2 - a_1 a_3]^2$$

mit der Charakteristik:

(3) $$[(1\,1)\,(1\,1)\,1\,1]\,.$$

Auch hier findet ein besonderer Fall statt. Wenn nämlich:

$$\lambda^2 = a_2^2 - a_1 a_3\,,$$

so werden die conjugirten Polaren, welche ϱ_5, ϱ_6 entsprechen, Direc-

tricen einer Congruenz conjugirter Polarcomplexe, und die Charakteristik ist

(9) $$[(11)(11)\overline{(11)}].$$

Wenn f und φ eine Erzeugende, z. B. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gemeinsam haben, so ist etwa zu setzen:

$$(6)\quad \varphi \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ \qquad + 2a_{24}x_2x_4 = 0, \\ [p_1a_{12} - p_6a_{23} + p_2a_{13} + p_5a_{14} + p_3a_{24}]^2 \\ \qquad -(p_1a_{11} - 2a_{13}p_6 + 2a_{14}p_3)(p_1a_{22} + 2p_2a_{23} + 2p_5a_{24}) \\ \qquad -2(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})\Pi = 0. \end{cases}$$

Im Allgemeinen kann man noch $a_{14} = 0$, $a_{23} = 0$ voraussetzen. Die Discriminante $\Psi = 0$ hat vier gleiche Wurzeln $\varrho = a_{13}a_{24}$ und zwei einfache, die Charakteristik ist

(11) $$[(\overline{31})11].$$

Der linearen Reihe, welche der vierfachen Wurzel entspricht, gehört *ein specieller Complex* an (die Congruenz der conjugirten Polarcomplexe ist eine specielle), dessen Axe die gemeinsame Erzeugende ist. Den beiden einfachen Wurzeln dagegen entsprechen zwei conjugirte Polaren. Sie liegen in den beiden längs der gemeinsamen Erzeugenden beiden Flächen gemeinsamen Tangentialebenen und zwar so, dass eine jede durch den Berührungspunkt derjenigen Ebene geht, der sie *nicht* angehört.

Einen besonderen Fall bildet die Annahme $a_{13} = 0$, $a_{24} = 0$. Es ist dann die vierfache Wurzel $\varrho = -a_{14}a_{23}$, die doppelte $\varrho = a_{14}a_{23}$, aber beide sind jetzt von der Art $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$, so dass die Charakteristik wird:

(12) $$[(\overline{31})(\overline{11})].$$

Die beiden conjugirten Polaren, von denen eben gesprochen wurde, erscheinen nun als Directricen einer linearen Congruenz. Geometrisch ist dieser Fall ausgezeichnet durch eine *involutorische Paarung der Tangentenebenen von f und φ längs der gemeinsamen Erzeugenden:* Jedem Punkte derselben entsprechen zwei Tangentialebenen in Bezug auf f und φ, denselben ist dann ein anderer Punkt zugeordnet, dem die nämlichen beiden Ebenen, aber in Bezug auf φ und f entsprechen.

Ist die gemeinsame Erzeugende Tangente der Raumcurve dritter Ordnung, in welcher sich f und φ schneiden, so kann man in (6) $a_{13} = a_{24}$, $a_{14} = 0$ setzen. Dann sind 6 gleiche Wurzeln $\varrho = a_{13}^2$ vorhanden, mit der Charakteristik

(19) $$[(\overline{51})],$$

besondere Fälle finden hier nicht statt, da die ersten Unterdeterminanten nicht ohne wesentliche Aenderung der gegenseitigen Beziehungen von f und φ den Elementartheiler 2 erhalten können.

Will man den Fall *zweier unendlich naher Erzeugenden, welche beiden Flächen gemeinsam sind*, aus (6) ableiten, so wäre zu setzen:

$$a_{14} = a_{23} = a_{11} = a_{22} = 0,$$
$$a_{24} = a_{13}$$

und die Charakteristik wird:

(21) $$[(\overline{3111})].$$

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, dass sich *die beiden Flächen in einem Kegelschnitt und zwei Erzeugenden schneiden.* Man kann hier setzen:

$$(7)\quad \varphi \begin{cases} x_2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4) + \lambda x_3x_1 = 0, \\ (a_1p_1 - a_3p_6 + a_4p_3 + \lambda p_2)^2 + 4\lambda p_6(a_2p_1 + a_3p_2 + a_4p_5) \\ \qquad - 2a_4\lambda\Pi = 0. \end{cases}$$

Es ist eine vierfache Wurzel $\varrho = \lambda a_4$ und zwei einfache $\varrho = \lambda^2$, $\varrho = a_4^2$ vorhanden, mit der Charakteristik:

(13) $$[(\overline{22})\,11].$$

Es existirt ein Büschel conjugirter Polaren, gebildet aus den beiden gemeinsamen Erzeugenden. Den einfachen Wurzeln entsprechen die Durchschnittslinie ihrer Ebene mit der Ebene des Kegelschnittes und die Verbindungslinie ihres Poles in Bezug auf jenen Kegelschnitt mit dem Schnittpunkt der Erzeugenden.

Dieser Fall ist ausgezeichnet durch eine Reihe von besonderen. Zunächst kann $\lambda = a_4$ sein. *Die Erzeugenden schneiden sich dann auf dem Kegelschnitte.* Die Charakteristik wird:

(20) $$[(\overline{33})].$$

Ist dagegen $\lambda = -a_4$, so sind sowohl die Doppel- als auch die vierfache Wurzel vom Charakter $\pm\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}}$ und die Charakteristik wird:

(14) $$[(\overline{22})\,(\overline{11})].$$

Endlich können aber für die vierfache Wurzel noch die zweiten Unterdeterminanten verschwinden, wodurch man zu den beiden Fällen

(15) $$[(\overline{211})\,11],$$

(16) $$[(\overline{211})\,(\overline{11})]$$

geführt wird.

Der Fall, wo f und φ sich in Kegelschnitten schneiden, ist schon oben unter $[(11)\,(11)\,11]$ behandelt. *Berühren sich diese Kegelschnitte* und setzt man demgemäss etwa

$$\varphi \begin{cases} 2ax_4x_2 + c^2x_1^2 + 2(a+c)x_1x_3 + x_3^2 + dx_2^2 = 0, \\ a^2p_3^2 + (a^2+2ac)p_2^2 - 2a(a+c)p_1p_4 + 2a(a+c)p_5p_6 + 2ap_1p_6 \\ \quad - 2ac^2p_1p_5 - c^2dp_1^2 + 2d(a+c)p_1p_6 - dp_6^2 = 0, \end{cases}$$

so sind zwei dreifache Wurzeln $\varrho = a^2$, $\varrho = a^2 + 2ac$ vorhanden; zugleich ist die Charakteristik:

(5) $$[(21)\,(21)],$$

und man erhält zwei Büschel von Geraden, welche in Bezug auf f und φ conjugirte Polaren sind.

Berühren sich f und φ längs eines Kegelschnittes, so hat man zwei dreifache Wurzeln mit der Charakteristik:

(6) $$[(111)\,(111)],$$

so dass zwei Bündel conjugirter Polaren vorhanden sind. In diesem Falle verschwindet die Covariante R für jede Gerade des Raumes, so dass der Flächenbüschel in der einfachen Form $f + \lambda\varphi$ dargestellt werden kann.

Ein specieller Fall hiervon ist wieder, *dass f und φ zwei Paare unendlich naher Erzeugenden gemeinsam haben.* Man wird hier setzen:

$$\varphi \begin{cases} x_1x_3 + x_2x_4 + \lambda x_1^2 = 0, \\ p_2^2 + p_3^2 + 2p_5p_6 - 2p_1p_4 - 4\lambda p_1p_5 = 0, \end{cases}$$

und erhält die Charakteristik

(22) $$[(\overline{2211})].$$

Schneiden sich die Flächen in einem Vierseit von Erzeugenden, so hat man eine vierfache und zwei einfache Wurzeln, den letzteren entsprechen die Diagonalen des genannten Vierseites, und jede Gerade, welche beide Diagonalen trifft, hat in Bezug auf beide Flächen die nämliche conjugirte Polare. Die Charakteristik ist:

(17) $$[(\overline{1111})\,11].$$

Auch hier kann noch ein specieller Fall stattfinden, der sich auch aus dem schon oben behandelten Falle, *dass vier Erzeugende von f ein Polartetraeder von φ bilden*, ableiten lässt. Setzt man nämlich:

$$\varphi \begin{cases} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0, \\ a_1a_3p_2^2 + a_1a_2p_1^2 + a_2a_3p_5^2 + a_4a_3p_4^2 + a_1a_4p_6^2 + a_2a_4p_3^2 = 0, \end{cases}$$

so ergiebt sich, wie schon in § VI. gefunden wurde:

(10) $$[(\overline{11})\,(\overline{11})\,11],$$

während dem besonderen Falle $a_1a_3 = a_2a_4$

(18) $$[(\overline{1111})\,(\overline{11})]$$

entspricht, welches als Specialfall von $[(\overline{1111})\,11]$ aufzufassen ist.

§ VIII.

Conjugirte Polaren in Bezug auf lineare Complexe und lineare Complexe in Verbindung mit Flächen zweiten Grades.

Indem wir die Untersuchungen von mehr als zwei speciellen Complexen für jetzt nicht weiter verfolgen, wollen wir noch darauf hinweisen, wie ganz ähnliche Betrachtungen über gemeinsame conjugirte Polaren auch in Bezug auf lineare Complexe und specielle Complexe zweiten Grades angestellt werden können.

Zwei lineare Complexe $a_x = 0$, $b_x = 0$ haben die nämliche conjugirte Polare der Geraden x (des Complexes x), wenn die Gleichungen:

$$(1) \qquad x_i - 2a_x \frac{a_i}{A} = \varrho \left(x_i - 2b_x \frac{b_i}{B} \right)$$

bestehen. Man erhält so wieder eine Gleichung sechsten Grades für ϱ, welche die Form:

$$(2) \qquad (\varrho - 1)^4 \left[\frac{4(ab)^2}{AB} \varrho - (\varrho + 1)^2 \right] = 0$$

hat. Der Wurzel $\varrho = 1$ entspricht die Lösung $a_x = 0$, $b_x = 0$, d. h. die Congruenz der beiden Complexen gemeinsamen Geraden (allgemeiner das System der zu beiden in Involution liegenden Complexe) für die anderen beiden Wurzeln ist dagegen, da aus (1) folgt:

$$X(1 - \varrho^2) = 0$$

im Allgemeinen $X = 0$; sie führen auf die beiden Directricen der genannten Congruenz.

Ein besonderer Fall ist hier $(ab) = 0$, d. h. involutorische Lage der beiden Complexe. Die Wurzel $\varrho = -1$ ist dann ebenfalls eine Doppelwurzel, für welche überdies alle ersten Unterdeterminanten der aus (1) zu bildenden Determinante verschwinden. Es existirt also eine lineare Reihe conjugirter Polarcomplexe, unter denen die beiden Directricen wieder die bekannte Stelle einnehmen. Der andere Ausnahmefall $(ab)^2 = AB$ ist ebenfalls leicht zu deuten.

Sollen ferner gemeinsame conjugirte Polaren eines linearen Complexes

$$a_x = 0$$

mit dem speciellen Complexe zweiten Grades

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

aufgesucht werden, so ist zu setzen:

$$(3) \qquad \varrho \left(x_i - 2a_x \frac{a_i}{A} \right) = \Sigma a_{ik} x_k.$$

Man erhält die Gleichung sechsten Grades:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{ik}-\varrho & a_i \\ -\frac{2a_k\varrho}{A} & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sie hat offenbar zwei Paare gleicher Wurzeln $\pm\sqrt{\Delta}$, für welche noch alle ersten Unterdeterminanten der Determinante von (3) verschwinden. Dadurch wird es möglich, die Gleichung (4) völlig entwickelt hinzuschreiben.

Setzt man nämlich:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_{ik}-\varrho & a_i \\ b_i & 0 \end{vmatrix} = \varrho^5 a + \varrho^4 b + \varrho^3 c + \varrho^2 d + \varrho e + f ,$$

so erhält man leicht:

$$a = (ab) ,$$
$$b = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\left(a_i \frac{\partial f}{\partial b_i}\right) = [ab] ,$$
$$c = -\,2(ab)\Delta ,$$
$$f = [ab]\Delta^2 ,$$

und da bereits bekannt ist, dass Σ durch $(\varrho^2-\Delta)^2$ theilbar ist:

$$d = -\,2\Delta\,[ab] ,$$
$$e = \Delta^2(ab) ,$$

so dass die Gleichung (4) wird:

$$(5) \qquad (\varrho^2-\Delta)^2\left[\varrho^2 + \Delta + 2\varrho\,\frac{[aa]}{A}\right] = 0 .$$

Da ausserdem:

$$(\Delta-\varrho^2)X = 0 ,$$

so ist $X = 0$ für die beiden einfachen Wurzeln der Gleichung (5). Ferner sind diejenigen Werthsysteme der $x^i x^j$, welche zu zwei nicht reciproken Wurzeln $\varrho_i\varrho_j$ gehören, immer in Involution. Denn aus der Gleichung:

$$\varrho_i\varrho_j(x^i x^j) = \Delta\,(x^i x^j)$$

folgt $(x^i x^j) = 0$, sobald nicht $\varrho_i\varrho_j = \Delta$.

Es existiren daher zwei Reihen linearer Complexe, welche die nämlichen Conjugirten in Bezug auf die beiden gegebenen Complexe besitzen. In jeder befinden sich zwei specielle; ihre Axen sind Erzeugende von f und bilden ein Vierseit, dessen Diagonalen den einfachen Wurzeln entsprechen. Einen besonderen Fall bildet die Annahme:

$$[aa]^2 = A^2\Delta .$$

Die Gleichung (5) hat dann nur die Wurzeln $\pm\sqrt{\Delta}$, von denen die eine vierfach ist. Es sind dann zwei doppeltzählende Büschel von Tangenten der f vorhanden, welche zugleich dem linearen Complexe angehören. Der Fall $A = 0$, $[aa] = 0$ endlich ist sehr leicht zu erledigen.

§ IX.

Metrische Probleme.

Der Fall, dass für die Form φ in § II. $\Delta' = 0$ ist, ist daselbst nicht mit berücksichtigt. Wir werden daher hier eine Discussion desselben geben, zugleich aber auf eine besondere Deutung hinweisen, die sich diesem Falle in Bezug auf *metrische* Anschauungen geben lässt. Dabei mag es genügen, $n = 6$ zu nehmen.

Bereits von den Herren Frahm, Lindemann, Ovidio ist in ausgedehntestem Masse von metrischen Untersuchungen in der Liniengeometrie Gebrauch gemacht worden. Es mag daher in Betreff des Folgenden namentlich auf die Arbeit des Herrn Lindemann verwiesen werden*). Um in engerem Anschluss an bekannte geometrische Vorstellungen bleiben zu können, soll hier als *Fundamentalgebilde der Massbestimmung ein specieller Complex zweiten Grades mit verschwindender Determinante* zu Grunde gelegt werden.

Es sei

$$F = \alpha_x^2 + \beta_x^2 + \gamma_x^2 = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines *Kegelschnitt* (Kegel)*-Complexes*, dessen durch α, β, γ bestimmte Ebene E als *unendlich ferne Ebene* anzusehen ist. Dabei ist:

$$\Sigma\alpha_i^2 = 0, \quad \Sigma\beta_i^2 = 0, \quad \Sigma\gamma_i^2 = 0, \quad (\alpha\beta) = 0, \quad (\beta\gamma) = 0, \quad (\gamma\alpha) = 0.$$

Eine beliebige Gerade (linearer Complex) a schneidet die Ebene E in einem Punkte, dessen Polare in Bezug auf F die Coordinaten

$$z_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial a_i} \tag{2}$$

hat; sie gehört dem Complexe F selbst an, wenn

$$(a\alpha)^2 + (a\beta)^2 + (a\gamma)^2 = 0.$$

Sind die a Coordinaten eines linearen Complexes, so bedeutet die letztere Gleichung, dass das Büschel der Complexgeraden in E sein Centrum auf dem Kegelschnitt F hat.

---

*) Lindemann, Projectivische Mechanik, Math. Annalen Bd. VII, p. 56. Die Arbeiten von Frahm und Ovidio waren mir leider nicht zugänglich.

Zwei gerade Linien a, b; allgemeiner zwei Complexe a_x, b_x bilden ferner ein gewisses Doppelverhältniss mit dem Kegelschnitte. Es ist darunter das Doppelverhältniss der beiden Centra der den beiden Complexen in E angehörigen Büschel in Bezug auf den Kegelschnitt zu verstehen. Der Werth desselben ist das Verhältniss der beiden Wurzeln ϱ der quadratischen Gleichung, welche entsteht, wenn in der Gleichung (1) an Stelle von x_i $a_i + \varrho b_i$ gesetzt wird. Insbesondere werden also zwei Complexe auf einander senkrecht stehen, wenn:

$$(3) \qquad (a\alpha)(b\alpha) + (a\beta)(b\beta) + (a\gamma)(b\gamma) = 0.$$

Die letztere Gleichung aber kann man auch so interpretiren, dass C mit dem in Bezug auf F zu a conjugirten Polarcomplexe in Involution liegt oder umgekehrt: *Complexe, welche zu einem gegebenen senkrecht stehen, liegen zu dessen conjugirtem Polarcomplexe in Involution**).

Die conjugirte Polare einer unendlich fernen Geraden:

$$(4) \qquad y_i = \lambda\, \alpha_i + \mu \beta_i + \nu \gamma_i$$

in Bezug auf den speciellen Complex zweiten Grades:

$$f = 0$$

ist

$$(5) \qquad z_i = \tfrac{1}{2}\left[\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \mu \frac{\partial f}{\partial \beta_i} + \nu \frac{\partial f}{\partial \gamma_i}\right].$$

Die Geraden z_i bestimmen den *Mittelpunkt* der Fläche f durch ihren gemeinsamen Schnittpunkt. Soll demnach die Fläche zur Classe der *Paraboloide* gehören, so muss die Determinante:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, \frac{\partial f}{\partial \beta}\, \frac{\partial f}{\partial \gamma}\, \alpha\, \beta\, \gamma\right]$$

verschwinden, welche man leicht in die Form:

$$\begin{vmatrix} [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] \\ [\beta\alpha] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] \\ [\gamma\alpha] & [\gamma\beta] & [\gamma\gamma] \end{vmatrix}$$

bringt, in welcher, wie auch vorhin $[\alpha\beta] = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i \frac{\partial f}{\partial \beta_i}$ ist.

Man erhält die Gleichung des Kegelschnittes, in welchem die Fläche f der Ebene E begegnet, wenn man die Coordinaten y der unendlich fernen Geraden in $f = 0$ einsetzt. Damit also die Fläche eine *Kugel* sei, muss die aus f resultirende Gleichung für λ, μ, ν mit

*) Vgl. Lindemann p. 66.

der Form $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$ sich identificiren lassen. Die entsprechenden Bedingungen sind:

$$[\alpha\beta] = 0, \quad [\beta\gamma] = 0, \quad [\gamma\alpha] = 0,$$
$$[\alpha\alpha] = [\beta\beta] = [\gamma\gamma].$$

In ähnlicher Weise würde man auch die Bedingungen für Rotationsflächen u. s. w. aufstellen können. Einen allgemeineren Weg dazu erhält man indessen durch Benutzung der Discriminante Ψ des § II.

Ist nämlich der Complex φ ein Kegel- (Kegelschnitt) Complex, so verschwindet Δ'. Die Gleichung sechsten Grades § V. (3) reducirt sich aber auf:

$$\Delta^3 - \varrho A' \Delta^2 + \varrho^2 A_2 \Delta - \varrho^3 A_3 = 0. \tag{6}$$

Den drei Wurzeln ϱ_1 ϱ_2 ϱ_3 derselben entsprechend hat man dann:

$$\begin{cases} \Sigma a_{ik} x_k' = \varrho_1 \Sigma b_{ik} x_k' = z_i', \\ \Sigma a_{ik} x_k'' = \varrho_2 \Sigma b_{ik} x_k'' = z_i'', \\ \Sigma a_{ik} x_k''' = \varrho_3 \Sigma b_{ik} x_k''' = z_i'''. \end{cases} \tag{7}$$

Aus diesen Gleichungen schliesst man sofort, dass im Allgemeinen:

$$X' = 0, \quad X'' = 0, \quad X''' = 0, \quad Z' = 0, \quad Z'' = 0, \quad Z''' = 0.$$
$$(x'z'') = 0, \ (x''z') = 0, \ (x'z''') = 0, \ (x'''z') = 0, \ (x''z''') = 0, \ (x'''z'') = 0.$$
$$(x'x'') = 0, \quad (x'x''') = 0, \quad (x'''x') = 0,$$
$$(z'z'') = 0, \quad (z''z''') = 0, \quad (z'''z') = 0,$$

D. h. es entsteht ein gemeinsames Polartetraeder von f und φ, dessen Kanten x', x'', x''', z', z'', z''' sind. z', z'', z''' verlaufen durch die Spitze des Kegels, x' x'' x''' in der Polarebene der letzteren in Bezug auf f.

Man kann nun der Gleichung (6) eine andere Form geben, welche eine interessante Vergleichung unseres liniengeometrischen Polarproblems mit dem analogen für Punkt- oder Ebenencoordinaten gestattet.

Legt man nämlich an Stelle von $\varphi = 0$ geradezu die Gleichung (1) $F = 0$ zu Grunde, so ergiebt sich durch eine leichte Umformung der Discriminante Ψ des § II., wenn noch $\frac{1}{\varrho} = \mu$ gesetzt wird, die folgende *Determinante dritten Grades:*

$$\begin{vmatrix} [\alpha\alpha] - \mu & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] \\ [\beta\alpha] & [\beta\beta] - \mu & [\beta\gamma] \\ [\gamma\alpha] & [\gamma\beta] & [\gamma\gamma] - \mu \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Wie leicht zu übersehen, ist damit die cubische Gleichung gegeben, welche das Polartetraeder von f liefert, dessen drei vom Mittelpunkte

von f auslaufende Kanten *Hauptaxen der Fläche sind.* Und man kann an die Gleichung (8) natürlich alle diejenigen Betrachtungen über die gegenseitige Lage des Complexes F und der Fläche f anknüpfen, die im Problem der Hauptaxentransformation einer Fläche zweiten Grades bei der analogen cubischen Gleichung auftreten; womit eine Behandlung der Theorie der Flächen zweiten Grades angedeutet ist, welche gleichzeitig die drei geometrischen Anschauungsweisen der Punkt-, Ebenen- und Liniengeometrie in sich begreift.

Darmstadt, im Januar 1876.

Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.

Von Axel Harnack in Leipzig.

Die Frage, aus wie vielen von einander verschiedenen reellen Zügen eine Curve n^{ter} Ordnung mit oder ohne Singularitäten höchstens zusammengesetzt sein kann, ist, wie es scheint, bisher nicht aufgeworfen worden; jedenfalls findet sich, soweit mir die hierher gehörige Litteratur bekannt ist, eine Beantwortung derselben nur für einzelne Fälle. Bei der Classification der Curven nach ihrem Geschlechte trat zunächst die Eigenschaft gleich zu Tage, dass *alle Curven vom Geschlecht:* $p=0$ (von Cayley Unicursalcurven benannt), falls sie überhaupt reell sind, nur *einen Zug* besitzen, wobei die Singularitäten (vielfache Punkte, bezüglich vielfache Tangenten), auch wenn sie isolirt vorkommen, nicht als Züge gezählt werden. Diese Eigenschaft liess sich aus der rationalen und eindeutigen Darstellung der Curve vermittelst eines Parameters ohne Weiteres erschliessen*). Die Untersuchung der Curven dritter Ordnung hatte schon früher zu dem Resultate geführt, dass hier nicht mehr als zwei getrennte Züge auftreten, ein Satz, der sich vermöge der eindeutigen Beziehung, welche zwischen Curven gleichen Geschlechtes besteht, oder, was in diesem Falle das nämliche besagt, vermöge der Darstellbarkeit aller dieser Curven durch elliptische Functionen leicht dahin erweitern lässt, dass *alle Curven vom Geschlecht:* $p = 1$ höchstens *zwei* von einander verschiedene Züge besitzen. Auch ist bekannt, dass die allgemeine Curve vierter Ordnung *vom Geschlecht:* $p = 3$ aus *vier* gesonderten Theilen zusammengesetzt sein kann.

Es ist nun der Zweck dieser Note, nachzuweisen, dass ein gleich einfaches Gesetz für Curven beliebigen Geschlechtes gilt, *demgemäss eine Curve vom Geschlecht* p *nie mehr als* $p + 1$ *getrennt verlaufende*

*) Dass diese rationale und eindeutige Darstellung des Curvenelementes x durch einen Parameter λ zugleich zu einer wechselseitig eindeutigen gemacht werden kann, so dass die Werthe von x durch eine continuirliche Aufeinanderfolge aller Werthe von λ im Allgemeinen *eindeutig* erhalten werden, ist neuerdings von Lüroth nachgewiesen worden. Math. Ann. Bd. IX, p. 163.

Züge enthält, sodann aber zu zeigen, *dass auch wirklich, für jede Geschlechtszahl p, Curven mit p + 1 Zügen existiren.* Die Methode, welche bei dieser Darstellung zur Anwendung kommen wird, gründet sich, entsprechend der Definition der Curve durch eine algebraische Gleichung mit reellen Coefficienten, ausschliesslich auf das Bezout'sche Theorem und auf die nach den Untersuchungen von v. Staudt und Möbius geläufige Unterscheidung der algebraischen Curvenzüge in *paare* und *unpaare*.

Unter einem *vollständigen Zuge* wird im Folgenden die Gesammtheit aller der Theile zu verstehen sein, deren Durchlaufen nothwendig ist, um von einem Punkte des Zuges nach Ueberschreitung anderer Punkte, und zwar eines jeden im Allgemeinen nur einmal, zu dem Ausgangspunkte zurückzukehren, mag dann auch dieser Zug im Endlichen in verschiedene *Aeste* zerrissen erscheinen, wie z. B. bei der Hyperbel. Dabei muss ferner betont werden, dass die Aenderung der Tangentenrichtung eine continuirliche sein soll. Zufolge dieser Bemerkung sind zwei Curvenzüge, auch wenn sie sich schneiden, noch immer als zwei gesonderte zu betrachten.

Endlich soll hier gleich gesagt werden, dass die nachstehenden Untersuchungen, zunächst für Ordnungscurven ausgesprochen, einen vollständig dualen Charakter tragen, so dass sie giltig bleiben, auch wenn die Curve als durch die Bewegung einer Geraden erzeugt gedacht wird. Denn hierbei lassen sich die Curvenzüge in gleicher Reihe in *paare* und *unpaare* trennen, je nachdem die Anzahl der von einem Punkte der Ebene an den Zug ausgehenden Tangenten gerade oder ungerade ist. Die in diesem Sinne unpaaren Züge sind durch eine *ungerade* Anzahl von Rückkehrpunkten charakterisirt; und zwar muss diese ungerade Zahl, falls keine Doppeltangenten oder Wendetangenten am Zuge auftreten sollen, auch hier mindestens gleich *drei* sein. Das Auftreten dieser beiden Singularitäten aber, von denen jede als zwei Rückkehrpunkte absorbirend betrachtet werden muss, ändern den Charakter eines paaren oder unpaaren Classenzuges ebensowenig, wie der des paaren oder unpaaren Ordnungszuges durch das Entstehen von Doppel- oder Rückkehrpunkten gestört wird.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehe ich zu dem Beweise des oben aufgestellten Satzes selbst über. Derselbe verlangt den Nachweis: *erstlich* der Unmöglichkeit von $p + 2$ oder mehr Zügen, *sodann* der Existenz von $p + 1$ Zügen.

I.

Betrachtet man zunächst eine Curve n^{ter} Ordnung, ohne irgend welchen vielfachen Punkt, deren Geschlecht p mithin gleich $\frac{1}{2}(n-1).(n-2)$ ist, so gilt der Satz, dass diese Curve, falls n eine gerade Zahl

ist, gar keinen, falls n eine ungerade Zahl ist, nur einen unpaaren Zug besitzt. Denn da sich zwei unpaare Züge mindestens in einem Punkte schneiden, so würden, falls die Curve n^{ter} Ordnung mehrere solcher Züge enthielt, Doppelpunkte auftreten, was für die allgemeine Curve eben ausgeschlossen ist.

Wir nehmen nun an, die Curve n^{ter} Ordnung bestände aus $p+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ paaren Zügen (dieselben sollen der Kürze halber im Folgenden auch als „Ovale" bezeichnet werden), zu denen, falls n ungerade ist, noch ein unpaarer, falls n gerade ist, noch ein paarer Zug tritt. Jeder paare Zug hat bekanntlich die Eigenschaft von jedem anderen algebraischen Zuge immer nur in einer *geraden* Anzahl von Punkten, die auch gleich Null sein kann, geschnitten zu werden. Diese Eigenschaft wird uns nützlich, indem wir eine Curve $n-2^{ter}$ Ordnung construiren, welche jedes der $p+1$ Ovale in einem auf demselben willkührlich angenommenen Punkte schneidet. Durch Festsetzung *eines* Schnittpunktes wird dann jedesmal ein *zweiter* auf dem Ovale mitbedingt sein.

Eine allgemeine Curve $n-2^{ter}$ Ordnung ist aber erst durch $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Punkte bestimmt, so dass, wenn auf den $p+1$ Ovalen je ein Schnittpunkt gegeben wird, noch

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1 = n-3$$

Punkte gewählt werden können, durch welche diese Curve ebenfalls hindurch gehen soll. Verlegt man dieselben sämmtlich auf den noch übrigen Zug der Curve n^{ter} Ordnung und bestimmt die Anzahl der Punkte, in denen die so construirte Curve die gegebene schneidet, so ergiebt sich, dass diese Zahl mindestens gleich $n(n-2)+2$ werden würde, *was der Annahme einer irreducibelen Curve n^{ter} Ordnung widerstreitet.*

Denn die $p+1$ Ovale, von denen jedes in zwei Punkten geschnitten werden müsste, liefern zusammen $(n-1)(n-2)+2$ Punkte. Der gesondert betrachtete Zug erfordert, falls er gerade ist, ebenso eine gerade Anzahl von Schnittpunkten, so dass aus der Annahme der $n-3$ Punkte noch ein weiterer hervorgeht; ist er dagegen ungerade, so wird er von der construirten Curve, deren Ordnungszahl $n-2$ dann ebenfalls ungerade ist, in einer ungeraden Anzahl von Punkten getroffen, so dass auch hier die $n-3$ gegebenen Schnittpunkte mindestens noch einen weiteren erfordern. In beiden Fällen ergiebt sich also die als unmöglich erkannte Zahl:

$$(n-1)(n-2)+2+(n-3)+1=n(n-2)+2\,.$$

Es ist somit bewiesen, dass bei einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung die Zahl der vollständigen Züge jedenfalls nicht grösser als $p+1$ sein kann.

Dieser Satz behält aber auch für Curven, welche mit Singularitäten behaftet sind, seine Giltigkeit. Bei dem Nachweise hiervon werde ich mich indessen, um nicht weitläufig sein zu müssen, zunächst nur auf die einfachen Singularitäten (Doppelpunkte und Rückkehrpunkte) beschränken.

Da bei diesen Betrachtungen das Auftreten mehrer unpaaren Züge, durch deren Schnittpunkte Doppelpunkte entstehen, zu berücksichtigen ist, so muss die Untersuchung hier so geführt werden, dass man die Anzahl dieser unpaaren Züge als bekannt voraussetzt. Es sei demnach eine Curve n^{ter} Ordnung gegeben, von welcher angenommen wird, dass sie ν unpaare Züge besitzen soll. Dieselben schneiden sich in mindestens $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Punkten, welche mithin Doppelpunkte für die betrachtete Curve sind. Ausserdem möge dieselbe noch d Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte enthalten, über deren Realität und Lage gar keine Annahmen getroffen werden, von denen also auch ein Theil dadurch zu Stande kommen kann, dass sich je zwei der ν unpaaren Züge in mehr als *einem* Punkte schneiden. Das Geschlecht der Curve wird also:

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) - d,$$

und es ist der Nachweis zu erbringen, dass solch eine Curve jedenfalls nicht mehr als $p+1$ Züge, also im vorliegenden Falle nicht mehr als $p+1-\nu$ Ovale besitzen kann.

Der Beweis dieses Satzes erleidet einige Modificationen, je nachdem die Zahl n und demgemäss auch ν *gerade* oder *ungerade* ist. Es soll zunächst der *erste* dieser beiden Fälle näher betrachtet werden:

Angenommen die Curve habe noch $p-\nu+2$ Ovale, so construire man wiederum eine allgemeine Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche jedes dieser Ovale in einem vorgeschriebenen Punkte schneidet und ausserdem durch die $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+d$ Doppelpunkte einfach hindurchgeht (durch diese letzteren sind möglicherweise auch imaginäre Bestimmungsstücke für die Curve gegeben). Bei dieser Forderung bleiben noch

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \nu - 2 = n + \nu - 4$$

Bestimmungsstücke zur Construction der Curve willkührlich. Man kann mithin verlangen, dass diese noch durch $n+\nu-4$ vorgeschriebene Punkte (was eine *gerade* Anzahl ist), gelegen auf irgend einem der vorausgesetzten Ovale hindurchgeht. Berechnet man nun, in wie viel Punkten sich die beiden Curven n^{ter} und $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, so ist zu berücksichtigen, dass jeder der $n-\nu+2$ Punkte, welche auf den Ovalen angenommen wurden, noch einen zweiten Schnittpunkt bedingt, selbst wenn reelle Doppelpunkte auf den Ovalen in der Form von Schleifen oder Spitzen auftreten, oder wenn insbesondere Doppelpunkte dadurch zu Stande kommen, dass sich die Ovale unter einander

oder mit den unpaaren Zügen schneiden; denn das Auftreten dieser letzteren Art von Doppelpunkten kann auf jedem Ovale immer nur paarweise erfolgen. Ebenso trifft die zu construirende Curve jeden der unpaaren Züge der Voraussetzung nach in $\nu - 1$ Punkten, und da diese Zahl ungerade ist, während die zu construirende Curve eine gerade Ordnungszahl besitzt, so muss auf jedem Zuge noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt gelegen sein, auch wenn noch andere als diese $\nu - 1$ Doppelpunkte auf einem unpaaren Zuge vorhanden sind. Die Summe aller Schnittpunkte wird demnach mindestens gleich:

$$2(p-\nu+2) + 2d + \nu(\nu-1) + \nu + n + \nu - 4 = n(n-2) + 2$$

sein müssen, was der Voraussetzung widerstreitet.

Ist aber n und also auch ν eine ungerade Zahl, so wird man durch eine ganz analoge Betrachtung auf dieselbe unmögliche Zahl von Schnittpunkten geführt, nur dass jetzt die Annahme von $\nu - 1$ Punkten, in denen die Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung einen unpaaren Zug schneiden soll, desshalb noch immer einen weiteren Schnittpunkt nach sich zieht, weil ein unpaarer Curvenzug von einer algebraischen Curve mit ungerader Ordnungszahl in einer ungeraden Zahl von Punkten getroffen wird*).

II.

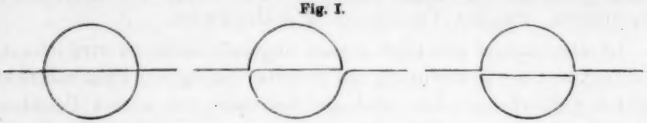
Um die *Existenz* von Curven mit der Maximalzahl reeller Züge nachzuweisen, steige man von den bekannten Curven niederer Ordnung zu denen höherer Ordnung auf, indem man zu einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung, welche die ihr zukommende Maximalzahl wirklich besitzt, eine gerade Linie hinzunimmt und nun den Verlauf dieser beiden Curven gleichzeitig ins Auge fasst. Es wird sich zeigen, dass man auf diese Weise eine Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung der gesuchten Art construiren kann, wenn man die Curventheile, welche an die gemeinsamen Schnittpunkte herantreten, nach bekannten Principien durch ähnlich verlaufende ersetzt. Werden *alle* singulären Punkte dabei aufgelöst, indem die Curve n^{ter} Ordnung selbst ohne Singularitäten vorausgesetzt wird, so gelangt man durch diese Betrachtung auch nur zu der *allgemeinen* Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung und kann also noch nicht den Satz aussprechen, dass es zu *jeder* Geschlechtszahl p Curven mit $p+1$ reellen Zügen giebt. Der Vollständigkeit halber wird man daher die

*) Für die Anwendung dieser Betrachtungsweise auf Curven mit höheren Singularitäten soll hier nur die Regel angeführt werden: Die Curve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung ist so zu bestimmen, dass sie in einem k-fachen Punkt der Curve n^{ter} Ordnung, welcher das Geschlecht derselben um $\frac{1}{2}k(k-1)$ Einheiten erniedrigt, einen $k-1$-fachen Punkt erhält. Derselbe ist demnach als Schnittpunkt der beiden in Betracht gezogenen Curven $k(k-1)$-mal zu rechnen.

$n-2$ Geschlechtszahlen, welche zwischen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ und $\frac{1}{2}n(n-1)$ liegen, nachträglich zu berücksichtigen haben.

Nimmt man zunächst eine *Curve zweiter Ordnung* und zwar der Einfachheit halber eine *Ellipse* an ($a_x^2=0$), und schneidet dieselbe durch eine gerade Linie ($v_x=0$) in zwei reellen Punkten, so kann das Gebilde, welches durch diese beiden Curven entsteht, auf zwei verschiedene Weisen beschrieben werden: entweder man durchläuft dasselbe in einem continuirlichen Zuge, wobei nur jeder der beiden Schnittpunkte zweimal überschritten wird, oder man setzt es aus zwei Zügen zusammen, welche nur in den beiden Schnittpunkten aneinanderstossen.

Fig. I.



Dem Durchlaufen der ersten Art entspricht eine *eintheilige*, dem der zweiten eine *zweitheilige* Curve dritter Ordnung. Um die Gleichung solch einer zweitheiligen Curve, auf die es hier ankommt, zu erhalten, verfahre man folgendermassen: Es seien $q_x^{(1)}=0$, $q_x^{(2)}=0$, $q_x^{(3)}=0$ die Gleichungen dreier Geraden, von denen keine die innerhalb der Ellipse liegende endliche Strecke von v_x in reellen Punkten schneidet*); alsdann ist, wenn λ einen willkührlichen Parameter bezeichnet, durch die Form:

$$a_x^2 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdot q_x^{(2)} \cdot q_x^{(3)} = 0$$

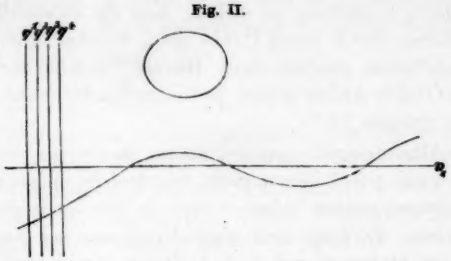
ein Büschel von Curven dritter Ordnung dargestellt. Giebt man der Grösse λ einen unendlich kleinen Werth, so muss die Curve sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Kegelschnittes und der Geraden erstrecken; ihre sechs Schnittpunkte mit jenem, so wie ihre drei Schnittpunkte mit dieser sind durch die Wahl der Linien q festgelegt. Da nun die Curve die Linie v_x an keiner innerhalb des Kegelschnittes gelegenen Stelle schneidet, so verläuft sie in der Weise, dass ihr einer Zug längs der einen Kegelschnitthälfte und den ausserhalb des Kegelschnittes befindlichen geradlinigen Strecken liegt, während der andere Zug längs der anderen Hälfte auch in der Nähe der innen liegenden geradlinigen Strecke sich befindet. *Man hat also eine zweitheilige Curve vom Geschlecht: $p=1$ construirt; der eine Zug derselben wird von der Geraden v_x in drei reellen Punkten geschnitten.*

---

*) Man kann ebensowohl die Festsetzung treffen, dass *zwei* der Linien q die begrenzte Strecke von v_x durchkreuzen, dagegen führt die Annahme, dass *eine* oder alle *drei* Linien so gelegen sind, zu einem Büschel von Curven 3ter Ordnung, welches in der Nachbarschaft von $a_x^2 v_x = 0$ nur *eintheilige* Curven enthält.

Von der so erhaltenen zweitheiligen Curve 3^{ter} Ordnung gehe man nun zu der gesuchten Curve 4^{ter} Ordnung durch ein gleiches Verfahren weiter. Da nämlich zufolge der über die Linien q getroffenen Annahme die Gerade v_x den einen unpaaren Zug in drei reellen Punkten schneidet, so entstehen aus dem unpaaren Zuge und dieser Geraden gleichsam drei Ovale, von denen zwei im endlichen geschlossen sind, das dritte dagegen durch die unendlich ferne Gerade getheilt erscheint. Diese drei Ovale stossen in den drei Schnittpunkten zusammen, ein viertes, durch den paaren Zug der Curven dritter Ordnung gegeben, liegt abgesondert.

Fig. II.



Indem man nun vier Linien: $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$ auswählt, welche nicht durch die beiden endlichen Strecken auf v_x hindurchgehen, liefert die Gleichung:

$$a_x^3 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} q_x^{(2)} q_x^{(3)} q_x^{(4)} = 0$$

bei unendlich kleinen Werthen von λ eine *viertheilige* Curve vierter Ordnung, sobald man die noch mögliche Bestimmung trifft, dass diese Curve durch einen Punkt gehen soll, welcher sich innerhalb eines der beiden im endlichen gelegenen Ovale, die aus dem unpaaren Curvenzuge entstanden sind, befindet. *Zugleich wird wiederum der eine Zug dieser Curve* 4^{ter} *Ordnung von der Geraden* v_x *in vier reellen Punkten nämlich in den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den Geraden:* $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$ *geschnitten.*

Die allgemeine Curve 5^{ter} Ordnung, vom Geschlecht $p = 6$, mit *sieben* Theilen entsteht nun aus der viertheiligen Curve vierter Ordnung, da wiederum die Linie v_x so liegt, dass sie den einen Zug derselben in vier reellen Punkten trifft. Denn dieses Gebilde lässt sich nach denselben Principien, die oben angewandt wurden, in drei Ovale und einen unpaaren Zug zertheilen. *Die Linie* v_x *schneidet diesen letzteren Zug in fünf reellen Punkten.*

Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Weise weiter vorgehen kann. Man gelangt dabei immer von einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ Zügen, von denen mindestens ein Zug durch

eine Gerade v_x in n reellen Punkten getroffen wird, zu einer Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ reellen Zügen, womit der verlangte Nachweis erbracht ist.

Es kommt bei diesem Fortgange nur auf zwei Dinge an: erstlich muss unter den $p+1$ Zügen der Curve n^{ter} Ordnung mindestens einer existiren, welcher von einer Geraden v_x in n reellen Punkten getroffen wird; sodann müssen die $n+1$ Linien $q_x^{(i)}$ so gewählt werden, dass keine die Gerade v_x innerhalb der $n-1$ endlichen Strecken schneidet, welche durch die Durchschnittspunkte der Curve n^{ter} Ordnung gebildet werden. Sind diese Bestimmungen getroffen, so hat man die noch immer erfüllbare Forderung zu stellen, dass die zu construirende Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung durch einen Punkt geht, welcher innerhalb eines der $n-1$ im endlichen geschlossenen Räume, welche zur Bildung von ebensovielen Ovalen Anlass geben, in hinreichender Nähe der ursprünglichen Curve gelegen ist*).

Um die Allgemeingiltigkeit des Satzes, dass es zu *jeder* Geschlechtszahl p Curven mit $p+1$ Zügen giebt, einzusehen, müssen auch Curven, welche mit Singularitäten behaftet sind, in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Es fragt sich nämlich, ob man bei einer allgemeinen Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $p+1$ Zügen successive soviele reelle oder imaginäre Doppelpunkte entstehen lassen kann, dass das Geschlecht derselben um eine, zwei $\cdots$ bis mindestens $n-2$ Einheiten verringert wird, wodurch dann alle zwischen ihrem anfänglichen Geschlechte und dem Geschlechte einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung liegenden Zahlen erhalten werden. Geht bei diesem Fortgange jedesmal *nur ein Zug* verloren, so ist der behauptete Satz bewiesen.

Entsprechend dem Principe, welches bisher angewandt wurde, soll nun, um dieses zu erweisen, ein Weg gezeigt werden, auf den man von einer Curve n^{ter} Ordnung mit $n-3$ (oder weniger) Doppelpunkten zu einer Curve $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n-2$ (oder weniger) Doppelpunkten wirklich gelangen kann, so dass nicht mehr als die erforderliche Zahl von Zügen verschwindet, das heisst: noch immer $p+1$ vorhanden bleiben.

Setzt man die Existenz einer Curve n^{ter} Ordnnng $(a_x^n=0)$ voraus, welche $n-2$ Doppelpunkte und $p+1$ Züge besitzt, deren einer von einer geraden Linie $(v_x=0)$ in n reellen, von einander verschiedenen Punkten getroffen wird, — Annahmen, welche bekanntlich für Curven

*) Innerhalb des Büschels: $a_x^n \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdots q_x^{(n+1)} = 0$ gewährt bei dieser Bestimmungsweise der Linien $q_x^{(i)}$ die zerfallene Curve $a_x^n \cdot v_x = 0$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, den Uebergang von Curven mit $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ zu Curven mit $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-3)$ oder mit $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-2)$ Zügen.

niederer Ordnung z. B. für $n = 3$ oder 4 erfüllbar sind — so lässt sich jedenfalls eine zweite Curve n^{ter} Ordnung ($\alpha_x^n = 0$) construiren, welche die nämlichen Punkte wie die erste zu Doppelpunkten besitzt und ausserdem die Gerade v_x in n vorgeschriebenen Punkten schneidet. Man wähle nun diese n Punkte, durch welche $\alpha_x^n = 0$ hindurchgehen soll, derart, dass einer von ihnen mit einem der gemeinsamen Schnittpunkte von v_x und a_x^n zusammenfällt, und zwar mit einem der beiden, in welchen die auf v_x abgetheilten endlichen Strecken mit der durch das unendliche gehenden zusammenstossen. Die übrigen $n - 1$ Punkte nehme man auf dieser letztgenannten Strecke selber an. Fügt man nun noch eine Gerade ($w_x = 0$) hinzu, welche durch denselben Schnittpunkt von v_x und a_x^n, durch welchen auch α_x^n gelegt wurde, hindurchgeht, so wird die Gleichung:

$$a_x^n \cdot v_x + \lambda \alpha_x^n \cdot w_x = 0$$

für beliebige Werthe von λ im Allgemeinen eine Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n - 2$ Doppelpunkten darstellen. Denn die Doppelpunkte der Curve n^{ter} Ordnung und der eine Schnittpunkt von v_x und w_x sind singuläre Punkte für alle Curven dieses Büschels. Bei unendlich kleinen Werthen von λ verläuft die Curve unendlich benachbart zu dem Gebilde $a_x^n \cdot v_x$ und besitzt die dem Geschlecht entsprechende Maximalzahl, weil auch hier die wesentliche Forderung befriedigt ist, dass ausser dem einen Ovale, welches sich an den durch das unendliche gehenden Zug als Schleife ansetzt, jedes andere zu einem selbstständigen Zuge sich gestaltet. Es folgt dieses wiederum aus der Annahme, dass weder die Curve α_x^n noch die Linie w_x durch eine der endlichen Strecken von v_x hindurchgeht. Bei der Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung treten somit $n - 2$ Züge mehr als bei der Curve n^{ter} Ordnung auf, wodurch der behauptete Satz bewiesen ist. Zugleich erkennt man, dass eine zu v_x benachbarte gerade Linie den einen Curvenzug in $n + 1$ reellen, von einander verschiedenen Punkten schneidet, so dass man von der so gewonnenen Curve $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung auf die nämliche Weise zu einer Curve $n + 2^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n - 1$ (oder weniger) Doppelpunkten übergehen kann.

Mit diesen Betrachtungen, welche sich noch auf mannigfache Weise ändern lassen, ist die bemerkenswerthe Eigenschaft algebraischer Curven vollständig bewiesen:

Es giebt zu jeder Geschlechtszahl p Curven mit der Maximalzahl von $p + 1$ Zügen.

Solche Curven der Untersuchung der algebraischen Integrale und der durch Umkehr derselben entstandenen Functionen zu Grunde zu legen, scheint von erheblichem Vortheile zu sein, da sich bei ihnen

functionelle Beziehungen, vollständiger als bei den Curven mit weniger Zügen, in reeller Weise veranschaulichen lassen. So gewinnen, um hier noch dieses eine zu erwähnen, die $2p$ Perioden eines auf die Curve bezüglichen überall endlichen Integrales die geometrische Bedeutung, dass p derselben durch den Uebergang von einem reellen Zuge zu den p anderen entstehen, während die p übrigen Perioden durch das Umlaufen dieser p reellen Züge zu Stande kommen. Die Periode, welche sich auf den einen erstgenannten Zug bezieht, muss bereits als lineare Combination der anderen betrachtet werden. Eine genauere Darlegung dieser Verhältnisse setzt indess eine nähere Untersuchung darüber voraus, auf welche Weise sich bei einer Curve n^{ter} Ordnung die adjungirten Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung legen lassen, und welcher Art das System der $2p+2(n-2)$ Tangenten ist, welche von einem Punkte der Curve n^{ter} Ordnung ausgehen.

Auch müssen die vorstehenden Betrachtungen noch nach der Richtung hin erweitert werden, dass bestimmte Gruppirungen und Lagenbeziehungen verschiedener Curvenzüge hinsichtlich des Einflusses untersucht werden, welchen sie auf die Erniedrigung der Anzahl überhaupt vorhandener reeller Züge ausüben. Da sich hieraus der Einfluss vielfacher Punkte erschliessen lassen wird, so werden diese Untersuchungen unter anderem dazu führen, auch für Curven im Raume die Frage nach der Vieltheiligkeit zu lösen.

Leipzig, im Januar 1876.

Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve*).

Von Felix Klein in München.

In seiner Untersuchung der Curven vierter Ordnung (diese Annalen VII., p. 410, Comptes Rendus, Juli 1873) hat Zeuthen eine Reihe schöner Sätze bewiesen, die sich auf die Realitätsverhältnisse der 28 Doppeltangenten dieser Curven, wie ihrer 24 Wendetangenten beziehen. Wir greifen unter ihnen folgende heraus:

1) Zeuthen unterscheidet bei den reellen Doppeltangenten solche von der ersten und solche von der zweiten Art. Die letzteren berühren je zwei verschiedene Züge der Curve, während die ersteren entweder denselben Zug zweimal berühren oder überhaupt keinen Zug, d. h. isolirte Doppeltangenten sind. *Die Zahl der Doppeltangenten erster Art ist nun immer gleich Vier, so lange die Curve keinen vielfachen Punkt besitzt.*

2) Andererseits bemerkt Zeuthen, dass, bei den Curven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt, jede Doppeltangente erster Art, welche *reelle* Berührungspunkte hat, eine „Einbuchtung" des von ihr berührten Curvenzuges abschliesst, d. h. einen Theil der Curve, welcher zwei Wendungen enthält. Und auch umgekehrt, so oft bei einer Curve vierter Ordnung (die keinen vielfachen Punkt besitzt) eine reelle Wendung auftritt, wird sie mit einer zweiten Wendung zusammen einer Einbuchtung angehören und so zu einer Doppeltangente erster Art mit reellen Berührungspunkten Anlass geben. *Es ist also die doppelte Zahl derjenigen Doppeltangenten erster Art, welche reelle Berührungspunkte haben, gleich der Zahl der reellen Wendungen.* (Insbesondere folgt hieraus als Maximalzahl der reellen Wendungen bei Curven vierter Ordnung *Acht*, wie Salmon vermuthet hatte. [Higher Plane Curves, 2. Aufl., n. 248]).

*) Vergl. Erlanger Berichte. Dec. 1875.

Indem man diese beiden Sätze combinirt, kann man sagen:

Bei einer Curve vierter Ordnung ohne vielfachen Punkt ist die Zahl der reellen Wendungen, vermehrt um die doppelte Zahl der isolirten Doppeltangenten, gleich Acht.

Es ist nun sehr merkwürdig, dass der so ausgesprochene Satz einer unmittelbaren Verallgemeinerung auf Curven n^{ter} Ordnung fähig ist, zu deren Ableitung eben die einfachen Methoden ausreichen, deren sich Zeuthen in seinem Aufsatze bedient. Sei bei einer Curve n^{ter} Ordnung ohne vielfachen Punkt w' die Zahl der reellen Wendungen, t'' die Zahl der isolirten Doppeltangenten.

Dann hat man das Theorem:

$$w' + 2t'' = n(n-2).$$

Auch ist die Modification, welche dieser Satz beim Auftreten singulärer Punkte erheischt, übersichtlich anzugeben. Es soll die Curve, wie im Folgenden der Einfachheit wegen durchgehends angenommen wird, nur mit einfachen Plücker'schen Singularitäten behaftet sein, und es bezeichne k ihre Classe, r' die Zahl ihrer *reellen* Spitzen, d'' die Zahl ihrer reellen, *isolirten* Doppelpunkte.

Dann besteht die Relation:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Diese Formel kommt auf die vorige zurück, sobald man der Curve keine anderen vielfachen Punkte, als isolirte reelle Doppelpunkte beilegt. Denn dann ist $r' = 0$, $k = n(n-1) - 2d''$. Andererseits umfasst unsere Formel z. B. die bekannten Realitätsverhältnisse der Wendepunkte bei den Curven dritter Ordnung, sofern für $n = 3$ Doppeltangenten noch nicht auftreten können und also $t'' = 0$ zu setzen ist.

Wir beweisen zunächst die Formel:

$$w' + 2t'' = n(n-2)$$

in ihrer Gültigkeit für Curven ohne vielfachen Punkt. Wir zeigen vor Allem, dass, bei diesen Curven, $w' + 2t''$ einen constanten Zahlenwerth besitzen muss; hinterher bestimmen wir den letzteren an einem Beispiele. Die Curvengleichungen sind dabei immer mit *reellen* Coefficienten gedacht, wie im Gegensatze zu einer späteren Betrachtung, bei der ausdrücklich das Gegentheil vorausgesetzt wird, bemerkt sei.

Es mögen also $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei Curven n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte vorstellen: es sollen die Werthe, welche bez. bei ihnen die Zahl $w' + 2t''$ annimmt, verglichen werden. Zu dem Zwecke denke man sich durch allmähliche *reelle* Aenderung der Constanten φ in ψ übergeführt. Dies kann noch in sehr mannigfacher Weise geschehen, und man kann es daher immer vermeiden, dass dabei Curven

überschritten werden, deren Coefficienten *gleichzeitig zwei* vorgegebenen algebraischen Bedingungen genügen. Curven dagegen, deren Coefficienten eine einzelne, beliebig gegebene algebraische Bedingung erfüllen, werden, allgemein zu reden, beim Uebergange eine endliche Anzahl von Malen auftreten; — im besonderen Falle kann diese Anzahl Null sein. Curven z. B., die nur einen Doppelpunkt besitzen (der dann selbstverständlich reell ist), müssen in Betracht gezogen werden; überflüssig ist es, in der Curvenreihe Curven mit Spitze, oder mit zwei Doppelpunkten oder mit einer vierfachen Tangente*) etc. vorauszusetzen.

Eine Aenderung der Zahl $(w' + 2t'')$ kann bei einem solchen Uebergange nach algebraischen Principien nur in folgenden Fällen möglicherweise eintreten:

1) wenn zwei Wendungen,
2) wenn zwei Doppeltangenten coincidiren,
3) wenn eine isolirte Doppeltangente t'' aufhört, als solche zu zählen (resp. umgekehrt, wenn eine nicht isolirte Doppeltangente isolirt wird).

Diese Möglichkeiten können aber leicht noch weiter eingeschränkt werden; andererseits erweisen sie sich zum Theil von einander abhängig.

Wir werden den Fall, dass die Uebergangscurve einen vielfachen Punkt hat (der dann nach dem Obigen nur als reeller Doppelpunkt vorausgesetzt zu werden braucht), erst sogleich discutiren; indem wir ihn ausschliessen, bleiben nur noch folgende Fälle ev. zu berücksichtigen:

ad 1) *der Fall, dass zwei reelle Wendungen eines Curvenzuges consecutiv werden.* Dann ist die betr. Tangente eine vierpunktige. Sie ist als solche eine Doppeltangente, welche den Uebergang bildet zwischen einer Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten und einer isolirten Doppeltangente. Es tritt dann also gleichzeitig die unter 3) vorgesehene Möglichkeit ein; *in dieser Gleichzeitigkeit liegt weiterhin der Kern des ganzen Beweises.*

ad 2) Von den Fällen, in welchen zwei oder mehr Doppeltangenten coincidiren, sind offenbar nur diejenigen zu berücksichtigen, in denen eine isolirte Doppeltangente betheiligt ist. Aber unter ihnen werden schliesslich nur solche möglicherweise von Einfluss sein können, bei denen *zwei* isolirte Doppeltangenten coincidiren. Freilich kann sich eine isolirte Doppeltangente mit zwei conjugirt imaginären zu einer reellen dreifachen Tangente vereinigen (die letztere besitzt dann nur einen reellen Berührungspunkt). Ueberschreitet man aber eine solche Curve, so wird aus der dreifachen Tangente nur wieder *eine* isolirte

*) Vierfach heisst im Folgenden eine Tangente, welche an vier Stellen berührt; eine Tangente, die vier consecutive Punkte enthält, ist „vierpunktig" genannt.

Tangente hervorgehen, indem sich von Neuem zwei imaginäre Doppeltangenten ablösen. Denn die isolirte Doppeltangente hat sich *mit ihr nicht gleichwerthigen* Doppeltangenten vereinigt, und das kann auf die Zahl t' keinen Einfluss haben.

Sonach bleibt nur *das Zusammenfallen zweier isolirter Doppeltangenten ad 2) zu untersuchen*; wir werden weiterhin zeigen, dass ein solches Zusammenfallen *zwei* Bedingungen äquivalent ist, und also überhaupt nicht in Betracht kommt.

ad 3) Der einzige Uebergang, der zwischen isolirten und nicht isolirten Doppeltangenten besteht, wird durch die vierpunkte Tangente gebildet. Sonach leitet 3) zu der unter 1) aufgeführten Möglichkeit zurück.

Erörtern wir jetzt vorab den Einfluss, den *das Auftreten eines reellen Doppelpunktes* auf w' und t'' besitzt. Dieser Doppelpunkt kann isolirt oder nicht isolirt sein. In jedem Falle absorbirt er nach den Plücker'schen Formeln 6 Wendungen. Auch macht Plücker schon darauf aufmerksam*), dass beim isolirten Doppelpunkte diese sechs Wendungen sämmtlich imaginär sind, während beim nicht isolirten Doppelpunkte zwei und nur zwei reell sind. Die Zahl w' wird daher im letzteren Falle und nur in diesem um zwei Einheiten vermindert. Aber diese zwei Wendungen w' erscheinen von Neuem wieder, wenn man die Curve mit Doppelpunkt überschreitet. Denn der Doppelpunkt absorbirt eben immer zwei reelle Wendungen, von welcher Seite man ihn auch entstehen lassen mag. *Desshalb erleidet also die Zahl w' keine Aenderung, wenn man eine Curve mit Doppelpunkt überschreitet.*

Dasselbe ergiebt sich für t''. Hat eine Curve einen Doppelpunkt, so fallen eine Anzahl Doppeltangenten je paarweise in die Tangenten zusammen, die man vom Doppelpunkte an die Curve legen kann. Von den Berührungspunkten der Doppeltangente rückt dabei der eine in den Doppelpunkt hinein, während der andere abgetrennt liegt, da immer angenommen werden kann, dass keiner der im Doppelpunkte sich kreuzenden Curvenäste im Doppelpunkte eine Wendung besitzt. Desshalb kann keine reelle Doppeltangente mit imaginären Berührungspunkten betheiligt sein. *Also auch die Zahl t'' bleibt ungeändert, wenn eine Curve mit Doppelpunkt überschritten wird.*

Hiernach ist das Auftreten vielfacher Punkte für den hier gestellten Zweck nicht weiter zu untersuchen. Erörtern wir jetzt den Fall ad 1).

---

*) Vergl. *Theorie der algebraischen Curven* n. 64. Auf das von Plücker gebrauchte Beweisprincip kommen wir noch im Texte zu sprechen. Einen Beweis nur aus Betrachtung der Lagenverhältnisse giebt für C_3 Möbius: *Ueber die Grundformen der Linien dritter Ordnung*, Abhandl. der Sächs. Akad. 1849.

Zwei reelle Wendungen werden consecutiv, man hat eine vierpunktige Tangente. Bei Ueberschreitung einer solchen Curve wird gleichzeitig w' um zwei Einheiten, t'' um eine Einheit geändert. Die geometrische Anschauung zeigt, dass eine isolirte Doppeltangente aus der vierpunktigen entsteht, wenn die beiden Wendungen w' imaginär werden; t'' *wächst* daher um eine Einheit, wenn w' *um zwei Einheiten abnimmt*, resp. umgekehrt und *daher bleibt* $w' + 2t''$ *beim Ueberschreiten der betr. Curve constant.*

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass das Zusammenfallen zweier isolirter Doppeltangenten zwei Bedingungen äquivalent ist.

Untersuchen wir zu dem Zwecke, wie überhaupt bei einer Curve, die keine vielfachen Punkte besitzt, ein Zusammenfallen von Doppeltangenten eintreten kann, und welche von den bez. Möglichkeiten durch nur eine Bedingung zwischen den Coefficienten dargestellt werden. Man findet, dass eine Doppeltangente nur dann mehrfach zählt, wenn sie entweder mehr als zwei Berührungspunkte hat und also vielfache Tangente ist, oder wenn sie zum Mindesten in einem ihrer Berührungspunkte einen höheren Contact besitzt. Durch *eine* Bedingung sind charakterisirt der Fall der dreifachen Tangente und der Fall, dass die Doppeltangente in einem ihrer Berührungspunkte osculirt und also zugleich Wendetangente ist. Der Beweis dieser Behauptung, die sich auf allgemein algebraische Verhältnisse und nicht insbesondere auf Bedingungen der Realität bezieht, soll hier nicht ausgeführt werden; er wird mit bekannten Mitteln geleistet.

Aber keiner der beiden durch nur eine Bedingung dargestellten Fälle kann durch das Zusammenfallen zweier *isolirter* Doppeltangenten herbeigeführt werden. Denn jede derselben hat ein Paar conjugirt imaginärer Berührungspunkte, und indem dieselben auf *eine* gerade Linie rücken, können nicht *drei gleichwerthige* oder *zwei ungleichwerthige* Berührungspunkte entstehen. Man würde entweder eine vierfache (nach wie vor isolirte) Tangente erhalten, oder eine solche, die an zwei conjugirt imaginären Stellen osculirt.

Die Zahl $w' + 2t''$ *ist also für alle Curven ohne vielfache Punkte dieselbe*, wie behauptet wurde.

Um sie jetzt an einem Beispiele abzuzählen, nehme man vorab eine Curve der n^{ten} Ordnung, die in lauter niedere Curven zerfallen ist und bei der man daher die Lage der Singularitäten und die Realität derselben deutlich übersieht. Sodann löse man die dabei vorhandenen vielfachen Punkte in bekannter Weise auf, und man erhält eine Curve ohne solche Punkte, bei der sich ein Abzählen von w' und t'' ohne Weiteres ermöglicht. Der Einfluss, den ein reeller Doppelpunkt auf die Zahl w' ausübt, wurde oben für den allgemeinen

Fall angegeben; er wird ein anderer*), wenn einer der Aeste des Doppelpunktes im Doppelpunkte eine Wendung besitzt. Um derartige Untersuchungen nicht noch zu benöthigen, wählen wir die zerfallene C_n so, dass unter ihren Bestandtheilen sich keine gerade Linie befindet.

Sei zuächst n eine gerade Zahl, $n = 2\mu$. Dann zeichne man etwa μ congruente concentrische Ellipsen, deren Hauptaxen unter resp. gleichen Winkeln $\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$ gegen einander geneigt sind. Jede Ellipse schneidet die andere in vier reellen Punkten, so dass im Ganzen $4\frac{\mu(\mu-1)}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$ reelle, nicht isolirte Doppelpunkte bei der C_n vorhanden sind, und sonst offenbar überhaupt keine Doppelpunkte. Auch die Lage der $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ [eigentlichen oder uneigentlichen] Doppeltangenten dieser C_n ist ersichtlich. Sie sind repräsentirt:

1) Durch die $\frac{1}{2}n(n-2)$ reellen Tangenten, welche irgend zwei der μ Ellipsen gemeinsam berühren.

2) Durch die $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)$ Tangenten, welche man von den Durchschnittspunkten zweier Ellipsen an eine dritte ziehen kann. Diese Tangenten sind theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär. Keine von ihnen hat zusammenfallende Berührungspunkte. Sie zählen als Doppeltangenten doppelt.

3) Durch die als Doppeltangenten vierfach zählenden

$$\frac{1}{8}n(n-2)(n^2-2n-2)$$

Verbindungslinien der genannten Durchschnittspunkte unter einander. Sie sind alle reell; als ihre Berührungspunkte sind bez. die beiden Durchschnittspunkte aufzufassen, welche sie verbinden.

Geht man von der so beschriebenen C_n zu einer benachbarten Curve ohne vielfachen Punkt über, so liefert, nach dem wiederholt benutzten Satze, jeder der $\frac{1}{2}n(n-2)$ Doppelpunkte zwei reelle Wendungen; man bekommt also:

$$w' = n(n-2),$$

da vor Auflösung der Doppelpunkte überhaupt keine reellen Wendungen vorhanden waren.

Ferner ergiebt sich:

$$t'' = 0.$$

Denn man kann einzeln verfolgen, was aus den Doppeltangenten der zerfallenen Curve wird. Die Doppeltangenten 1) bleiben reell mit reellen Berührungspunkten. Von den Doppeltangenten 2) spaltet sich jede, je nach der Auflösungsart des Knotenpunktes, in zwei reelle und

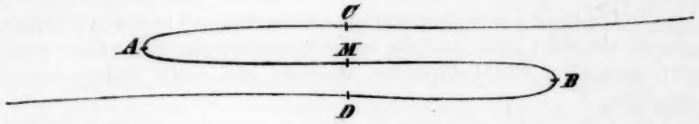
*) Vergl. Zeuthen: Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, Abhandl. der Dänischen Akademie 1873.

dann nicht isolirte Doppeltangenten oder in zwei conjugirt imaginäre. Ebenso übersieht man, dass jede der Doppeltangenten 3) vier reelle und nicht isolirte oder vier paarweise imaginäre Doppeltangenten ergiebt. Es entsteht also bei der Auflösung der Doppelpunkte keine isolirte reelle Doppeltangente; vor der Auflösung war keine vorhanden, und also hat man im Beispiele ($n \equiv 0 \pmod 2$):

$$w' + 2t'' = n(n-2).$$

Zugleich ist gezeigt, dass, für ein gerades n, Curven mit der Maximalzahl reeller Wendungen, $n(n-2)$, wirklich existiren.

Für ungerades n ergiebt sich ein geeignetes Beispiel folgendermassen. Sei $n = 2\mu + 3$. So zeichne man μ Ellipsen, wie im vorigen Falle, und ergänze dieselben zu einer C_n durch eine Curve dritter Ordnung, welche jede der Ellipsen in sechs reellen Punkten schneidet. Dies ist möglich, wenn man z. B. der Curve dritter Ordnung folgende Gestalt giebt:



wo AB einen Abstand bedeutet, der grösser ist als die grosse Axe der benutzten Ellipsen, CD einen Abstand, der kleiner ist als die kleine Axe der Ellipsen. Diese Curve lege man in der Art, dass M in den gemeinsamen Mittelpunkt der Ellipsen fällt; so wird sie jede der Ellipsen in sechs reellen Punkten treffen.

Man mache nun ganz ähnliche Abzählungen, wie so eben. Es ist bei ihnen nur darauf zu achten, dass die C_3 bereits an sich drei Wendungen enthält. Auch sei als Moment beim Beweise hervorgehoben, dass keine der 12 Tangenten, welche die C_3 mit der einzelnen Ellipse gemein hat (und die theils reell, theils imaginär sein werden), eine isolirte Doppeltangente der C_n liefern kann; denn isolirte reelle Tangenten giebt es bei der reellen C_3, oder gar der reellen Ellipse nicht. Auf diese Weise findet man:

Auch bei ungeradem n ist

$$w' + 2t'' = n(n-2),$$

und Curven mit der Maximalzahl reeller Wendungen, $n(n-2)$, existiren.

Andererseits ist evident, dass, bei ungeradem n, eine Minimalzahl für die reellen Wendungen existirt. Denn jede solche C_n (ohne vielfachen Punkt) hat bekanntermassen einen unpaaren Zug, der als solcher mindestens drei Wendungen besitzt. —

Die allgemeinere Formel:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$$

ergiebt sich aus der jetzt bewiesenen folgendermassen.

Man denke sich die Curve mit vielfachen Punkten aus einer benachbarten ohne vielfachen Punkt entstanden.

Dann hat man für letztere:

$$w' + 2t'' = n(n-2)$$

und es sind nun die Modificationen zu untersuchen, welche die vielfachen Punkte an den Zahlen w', t'' anbringen. In dieser Hinsicht stelle ich folgende Sätze voran, von denen die beiden ersten zum Theil schon benutzt wurden:

1) Jeder reelle, nicht isolirte Doppelpunkt, sowie jeder reelle Rückkehrpunkt, absorbirt zwei reelle Wendungen w'.

2) Der isolirte reelle Doppelpunkt hat auf die Zahl w' keinen Einfluss.

3) Die reelle Verbindungsgerade zweier conjugirt imaginärer Doppelpunkte absorbirt *zwei*, und die reelle Verbindungsgerade zweier conjugirt imaginärer Rückkehrpunkte absorbirt *drei* reelle isolirte Doppeltangenten t''.

4) Andere Reductionen in den Zahlen w' und t'' finden nicht Statt.

Die Sätze 1) 2) werden von Plücker gegeben. Er beweist sie für Curven dritter Ordnung und erschliesst daraus ohne Weiteres ihre allgemeine Gültigkeit. Es heisst das, algebraisch zu reden, dass man die bei der beliebigen Curve in der singulären Stelle stattfindende Reihenentwickelung bei einem bestimmten Gliede abbricht. In demselben Sinne wird man ähnliche Sätze beweisen, indem man sich an dem Beispiele einer Curve von hinlänglich hoher Ordnung von ihrer Richtigkeit überzeugt.

Für den Satz 3) geben geeignet gewählte Curven vierter Ordnung brauchbare Beispiele; z. B. die vieluntersuchten C_4, welche die Kreispunkte zu Doppelpunkten haben, und die Cartesischen Ovale, bei denen die Kreispunkte Spitzen sind. Bei ihnen findet man nur noch *zwei*, bez. *eine* Doppeltangente erster Art (im Sinne Zeuthen's), und daher sind zwei, bez. drei dieser Doppeltangenten, die jedenfalls *isolirte* Doppeltangenten waren, durch die vielfachen Punkte, resp. deren Verbindungslinie, absorbirt.

Die allgemeine Formel ergiebt sich jetzt sehr einfach. Es sei für eine gegebene Curve der n^{ten} Ordnung und der k^{ten} Classe:

d' die Zahl der reellen, nicht isolirten,

d'' die Zahl der reellen, isolirten,

d''' die Zahl der imaginären Doppelpunkte.

Sei ferner:

r' die Zahl der reellen,

r'' die Zahl der imaginären Spitzen.

Dann hat man nach den vorausgeschickten Sätzen:

$$w + 2t'' = n(n-2) - 2d' - 2r' - 2d''' - 3r''.$$

Aber andererseits ist nach den Plücker'schen Formeln:

$$k = n(n-1) - 2(d' + d'' + d''') - 3(r' + r'').$$

Also folgt:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d'',$$

was zu beweisen war.

In dem Umstande, dass diese Formel sich selbst dualistisch ist, wird man eine Controle der in ihr auftretenden Zahlencoefficienten erblicken.

Es mag hier zuvörderst eine Anwendung dieser Fomel angeschlossen werden. Es sei eine *complexe* Curve von der Ordnung n, der Classe k gegeben, d. h. eine Curve, deren Gleichung complexe Coefficienten besitzt. Dieselbe wird eine Anzahl reeller isolirter Punkte (δ) und reeller isolirter Tangenten (τ) enthalten, welche aber, allgemein zu reden, nicht weiter mit besonderen Singularitäten behaftet sind, sondern einfache Elemente der Curve vorstellen. *Zwischen diesen beiden Zahlen finden wir eine Relation.* Man vereinige nämlich die Curve mit der ihr complex conjugirten. So hat man eine Curve von der Ordnung $2n$, von der Classe $2k$, welche ausser δ isolirten Doppelpunkten und τ isolirten Doppeltangenten überhaupt keine reellen Elemente enthält. Sie enthält keinerlei höhere Singularitäten; daher ist unsere Formel anwendbar. Man findet also:

$$n + \tau = k + \delta.$$

Bei einem complexen Kegelschnitte z. B. können 0, 2, 4 Punkte reell sein; dann sind auch 0, 2, 4 Tangenten reell*). Eine complexe Curve dritter Ordnung sei in Linien-Coordinaten durch

$$\varphi + i\psi = 0$$

dargestellt; dann haben die Curven sechster Classe

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

sicher vier und höchstens zwölf reelle, gemeinsame Tangenten etc.

---

*) Es ergiebt sich: Sind 2 und nur 2 Punkte reell, so liegen dieselben innerhalb desselben von den beiden dann vorhandenen reellen Tangenten gebildeten Winkelraumes. Nimmt man 2 reelle Punkte in anderer Lage gegen 2 reelle Tangenten an, so werden gleich 4 Punkte und 4 Tangenten reell; die 4 Punkte liegen bez. innerhalb der 4 von den 4 Tangenten gebildeten Dreiecke.

Sodann sei noch einer *Verallgemeinerung* gedacht, welche man unserer Formel zu Theil werden lassen kann und die sich darauf bezieht, dass man statt der geraden Linien der Ebene ein *reelles* Netz von Curven beliebiger Ordnung:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

betrachtet. Man kann dieses Netz in bekannter Weise dazu benutzen, um eine beliebig gegebene Curve

$$f = 0$$

eindeutig zu transformiren; den Schnittpunktsystemen von f mit den Curven des Netzes entsprechen dann die Schnittpunktsysteme der transformirten Curve mit den Geraden der Ebene. Den bekannten Erörterungen über diesen Gegenstand hat man nur einige wenige Betrachtungen über die Realitätsverhältnisse bei einer derartigen Transformation hinzuzufügen, um für die transformirte Curve unser Theorem anwenden zu können und damit für die Curve f die gemeinte Verallgemeinerung zu finden. Es sei in dieser Richtung Folgendes hervorgehoben. Auf der Curve f giebt es Paare von Punkten, durch welche noch Büschel von Curven φ hindurchgehen. Dieselben vereinigen sich bei der eindeutigen Transformation zu Doppelpunkten der transformirten Curve. Diese Doppelpunkte sind, sobald die betr. 2 Punkte auf f reell sind, reell und nicht isolirt; *sind aber die Punkte auf f conjugirt imaginär, so enthält die transformirte Curve einen reellen, isolirten Doppelpunkt.* Auf solche Weise findet man folgenden Satz:

Es sei

- N die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der φ mit f,
- K die Zahl derjenigen φ, welche, durch einen beliebig gewählten Punkt hindurchgehend, f berühren,
- W' die Zahl derjenigen *reellen* φ, welche f osculiren,
- T'' die Zahl solcher reeller φ, die f in zwei imaginären Punkten berühren,
- R' die Zahl der reellen Spitzen von f, mit Ausnahme derjenigen, die etwa Grundpunkte des Netzes sind,
- D'' eine Zahl, die aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzt ist. Sie umfasst zunächst die Zahl derjenigen isolirten Doppelpunkte von f, welche nicht Grundpunkte des Netzes sind. Sie umfasst sodann die Zahl der eben genannten Vorkommnisse: dass auf f Paare conjugirt imaginärer Punkte gefunden werden können, durch welche noch ein Büschel von Curven φ hindurchgeht.

Dann hat man immer:

$$N + W' + 2T'' = K + R' + 2D''.$$

Man nehme z. B. als Netz die Kreise, welche durch einen festen Punkt gehen (wo dann die betr. eindeutige Transformation einfach eine Umformung durch reciproke Radien wird), als Curve f eine Ellipse oder eine Hyperbel.

Dann hat man beide Mal:

$$N = 4, \quad K = 6, \quad R' = 0.$$

Aber D' ist das eine Mal gleich 1, das andere Mal gleich Null. Die unendlich ferne Gerade nämlich bildet mit allen durch den angenommenen Punkt hindurchgehenden geraden Linien ein Büschel von Kreisen, welche f in zwei festen Punkten schneiden, und diese beiden Punkte (die unendlich fernen Punkte) sind bei der Ellipse conjugirt imaginär, bei der Hyperbel reell. Man hat also:

$$\text{bei der Ellipse:} \quad W' + 2T'' = 4,$$
$$\text{bei der Hyperbel:} \quad W' + 2T'' = 2.$$

In Worten: *Bei einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel construire man alle Krümmungskreise, sowie alle Kreise, welche in zwei conjugirt imaginären Punkten berühren. Wenn man dann die letzteren doppelt zählt, so erweist sich die ganze Ebene bei der Ellipse vierfach, bei der Hyperbel doppelt mit Kreisen überdeckt.*

München, im Januar 1876.

Note sur les singularités des courbes planes.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

Le but du présent article est d'exposer quelques résultats dans une forme dont je me servirai dans un travail suivant. Les résultats eux-mêmes sont déjà publiés et démontrés par d'autres auteurs, celui du n° 1. par M. Stolz*); si je n'en supprime pas pour cette raison la démonstration, c'est parce que j'ai besoin de renvoyer aux équations et aux définitions qu'elle contient. Pour déterminer dans les n^{os} 2—4. ce que j'appelle les valeurs principales des équivalents plückeriens (voir les n^{os} 2—4.), je me sers des methodes indiquées par M. Cayley dans son remarquable mémoire: *On the Higher Singularities of a plane Curve***), et démontrées dernièrement par M. Halphen, soit par l'analyse***), soit par des procédés géométriques†). La démonstration géométrique que j'exposerai dans le n° 4. ressemble à celle de M. Halphen; toutefois je ne me contente pas d'un simple renvoi aux notes de ce savant, parce que ma démonstration fait le complément naturel de celle dont je me suis servi autrefois pour prouver et étendre le théorème sur la conservation du genre d'une courbe assujétie à des transformations birationnelles††). C'est pour des raisons semblables que je ne neglige pas la démonstration du n° 3.

1. Nous ferons, pour étudier les propriétés d'un point singulier d'une courbe, usage du procédé ordinaire: nous prendrons pour origine des coordonnées le point singulier, et nous developperons — ou sup-

*) Mathematische Annalen t. VIII. — M. Nöther l'énonce aussi sans démonstration, à la fin d'un article indépendent de celui de M. Stolz, dans le t. IX des Mathematische Annalen.

**) The Quarterly Journal, vol. 7, 1866.

***) Comptes rendus, 29 juin 1874; une autre démonstration, fondée sur un théorème communiqué dans un cours de M. Kronecker, est indiquée par M. Stolz, et M. Nöther les démontre au moyen de transformations.

†) Comptes rendus, 15 mars 1875.

††) Mathematische Annalen t. III, p. 150. — M. Bertini avait indiqué antérieurement une démonstration semblable du même théorème.

poserons développées — les expressions des ordonnées y de points placés sur la courbe dans le voisinage du point singulier en des séries suivant des puissances ascendantes de leurs abscisses x. On dit que *deux points se trouvent sur la même branche,* s'ils sont représentés par la même série. Le plus petit multiple commun des dénominateurs des exposants de cette série (réduits à leurs formes les plus simples) s'appelle, si la droite $x = 0$ n'est pas tangente à la branche, le *degré de multiplicité de la branche regardée comme lieu de points*; s'il est égal à m la série sera développée suivant des puissances entières et positives de $x^{\frac{1}{m}} = \xi$. Elle aura donc la forme suivante:

$$(1) \qquad y = a_1 x^{\frac{r}{m}} + \sum a_i x^{\alpha_i} = a_1 \xi^r + \sum a_i \xi^{m\alpha_i},$$

où la somme $\sum$ comprend tous les termes à l'exception du premier; toutes les valeurs de $m\alpha_i$ sont entières, et r et m peuvent avoir des facteurs communs.

Suivant la supposition déjà faite, que $x = 0$ ne soit pas tangente à la branche, nous avons $r \geqq m$; en *prenant la tangente de la branche pour axe* $y = 0$, nous obtenons que $r > m$. Le numérateur r est le nombre de points d'intersection de la tangente avec la branche qui coïncident avec le point singulier.

A côté des coordonnées ponctuelles x et y, nous ferons usage aussi de coordonnées tangentielles X et Z, dont la relation avec les coordonnées ponctuelles sera définie par la circonstance que l'équation

$$(2) \qquad Xx + y + Z = 0$$

exprimera que le point (x, y) se trouve sur la droite (X, Z). Alors les coordonnées de la tangente en (x, y) à une courbe dont on connaît l'équation ponctuelle, auront les expressions suivantes

$$(3) \qquad X = -\frac{dy}{dx}, \quad Z = x\frac{dy}{dx} - y,$$

et les coordonnées du point de contact d'une tangente à une courbe donnée par son équation tangentielle, se détermineront d'une manière tout-à-fait analogue.

Nous nous proposons ici de chercher la forme de la série servant à exprimer par X la coordonnée Z d'une tangente — voisine de la tangente singulière $y = 0$ ou $X = Z = 0$ — de la branche représentée par la série (1). Le plus petit multiple commun m' des dénominateurs des exposants de la nouvelle série s'appelle *le degré de multiplicité de la branche regardée comme enveloppe de ses tangentes,* et indique le nombre de tangentes menées à la courbe d'un point de la tangente singulière

qui coïncident avec celle-ci (non-compris les tangentes à d'autres branches, s'il y en a). Si la série prend la forme de

$$(4) \qquad Z = a_1' X^{\frac{r'}{m'}} + \sum a_i' X^{\alpha_i'},$$

r' sera le nombre des tangentes passant par le point singulier qui coïncident avec la tangente singulière.

Au moyen des équations (3) on trouve les expressions suivantes des coordonnées d'une tangente de la branche représentée par l'équation (1):

$$(5) \quad X = -\frac{r}{m} a_1 x^{\frac{r-m}{m}} - \sum \alpha_i a_i x^{\alpha_i - 1} = -\frac{r}{m} a_1 \xi^{r-m} - \sum \alpha_i a_i \xi^{m(\alpha_i - 1)},$$

$$(6) \quad Z = \frac{r-m}{m} a_1 x^{\frac{r}{m}} + \sum (\alpha_i - 1) a_i x^{\alpha_i} = \frac{r-m}{m} a_1 \xi^r + \sum (\alpha_i - 1) a_i \xi^{m\alpha}.$$

On peut déduire de l'équation (5) une série, servant à exprimer ξ, développée suivant des puissances entières et positives de $X^{\frac{1}{r-m}}$. En substituant cette série à ξ dans l'équation (6), on obtiendra pour exprimer Z la série suivante

$$(7) \qquad Z = a_1' X^{\frac{r}{r-m}} + \cdots,$$

qui doit être la série cherchée (4).

Certes, on ne peut pas en conclure *immédiatement*, que $m' = r - m$, ou que $r - m$ valeurs de Z correspondent à une valeur donnée de X; car on pourrait s'imaginer que, dans la série trouvée (7), tous les termes où un facteur de $r - m$ n'est pas aussi facteur du numerateur de l'exposant disparaissent. Mais, en tout cas, il est certain que

$$\frac{r'}{m'} = \frac{r}{r-m}, \qquad m' \gtreqless r - m,$$

et, par conséquent, que $r' \gtreqless r$. Or on peut déduire la série (1) exprimant y par x, de la série (4), absolument comme on déduit celle-ci de la série (1), ce qui conduit à $r \gtreqless r'$. Il faut donc que

$$r' = r, \quad m = r' - m', \quad m' = r - m.$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Le nombre r des points d'intersection coïncidents d'une branche d'une courbe avec sa tangente en un point singulier, est égal à celui des tangentes passant par le point singulier qui coïncident avec la tangente singulière. Si m et m' sont les degrés de multiplicité de la branche regardée comme lieu de ses points ou comme enveloppe de ses tangentes, on aura

$$r = m + m'.$$

On voit par une simple addition qu'on peut appliquer à un complexe de branches par un point singulier qui y ont la même tangente, ce que nous venons de dire d'une seule branche.

2. Pour appliquer à une courbe algébrique douée de singularités supérieures les équations plückeriennes, il faut regarder comme réunies en chacun de ses points singuliers un nombre de points doubles (δ) et de points stationnaires (ε), et en chacun de ses tangentes singulières, un nombre de tangentes doubles (δ') et de tangentes stationnaires (ε'). Nous appellerons δ et ε *l'équivalent plückerien du point singulier*, et δ' et ε' *l'équivalent plückerien de la tangente singulière.*

Comme il n'y a que trois équations plückeriennes, les équivalents plückeriens d'un point singulier et d'une tangente singulière n'auront pas, en général, des valeurs entièrement déterminées; mais M. Cayley a montré, comment on peut en déterminer les valeurs, si, à côté des relations plückeriennes, on a égard à l'équation qui sert à exprimer le genre de la courbe. Nous démontrerons dans les deux n^{os} suivants les théorèmes qui servent, avec ceux qu'on en déduit par le principe de dualité, à déterminer ces valeurs uniques que nous appellerons les *valeurs principales des équivalents*, et nous montrerons après comment on en déduit les expressions de *leurs valeurs générales.* Le théorème du n° 3. est, du reste, aussi applicable aux valeurs générales.

3. *Si l'on désigne par δ et ε l'équivalent plückerien d'un point singulier d'une courbe algébrique, $2\delta + 3\varepsilon$ sera égal au double de la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe sur une sécante dont la distance au point singulier est infiniment petite du premier ordre, et qui ne coïncide avec aucune des tangentes en ce point.*

Dans cette forme, que nous avons empruntée à un théorème semblable de M. Halphen*) sur le nombre d'intersections de deux courbes confondues en un point, ce théorème de M. Cayley se déduit sans difficulté, soit d'une application du théorème cité de M. Halphen à l'intersection de la courbe donnée avec une courbe polaire, soit de la démonstration de la première relation plückerienne par le principe de correspondance**).

Nous ferons usage ici de cette dernière démonstration.

Regardons comme correspondantes les droites AX et AY qui joignent un point fixe A à deux points d'insersection de la courbe avec une

*) Bulletin de la Société Mathématique de France I, p. 133. La restriction: „et qui ne coïncide avec aucune tangente à l'une des courbes en ce point", que M. Halphen fait dans son énoncé, n'est pas nécessaire, pendant que, dans le théorème qui nous occupe ici, la nécessité de la restriction analogue est évidente.

**) Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2^e série, t. V, p. 295 et suiv.

droite passant par un autre point fixe B. Alors, si nous désignons par n l'ordre de la courbe, à une droite AX correspondent $n(n-1)$ droites AY, et réciproquement. Il y aura donc $2n(n-1)$ coïncidences de droites correspondantes AX et AY, dont les $n(n-1)$ ont lieu dans la droite AB. Les autres droites où a lieu cette coïncidence sont celles qui joignent A aux points de contact des n' tangentes qui passent par B, n' étant la classe de la courbe, et celles qui joignent A aux points singuliers de la courbe. Pour compter les coïncidences qui ont lieu en chacune de ces droites on fait usage de la règle suivante, applicable en général à trouver les degrés de multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance*):

Le nombre de coïncidences de AX et AY qui ont lieu en une droite AD par A, est égal à la somme des ordres des angles infiniment petits XAY formés d'une droite AX, qui fait avec AD un angle infiniment petit du premier ordre, et des droites correspondantes AY.

Cette règle nous montre que le nombre des coïncidences qui ont lieu dans la droite joignant A à un point singulier D (dont aucune tangente ne passe pas B), est précisément égal à la somme double dont parle le théorème. Si D est un point double on trouve le nombre 2, s'il est un point stationnaire, le nombre 3, d'où résulte la première formule de Plücker. Il faut donc que, si le point D est équivalent à δ points doubles et ε points stationnaires, le nombre trouvé soit égal à $2\delta+3\varepsilon$. Donc etc.

Les ordres des segments infiniment petits se déterminent sans difficulté par les séries dont nous avons parlé dans le n° 1.

Note. Si, dans la démonstration précédente, le point B se trouvait sur une des tangentes au point singulier D, le nombre de coïncidences ayant lieu en AD serait égal à $2\delta+3\varepsilon$ *plus* le nombre de tangentes par B qui coïncident avec BD, ou bien (selon le n° 1.), si le point est k-tuple et que l points d'intersection de la courbe avec BD coïncident avec D, à $2\delta+3\varepsilon+l-k$. En déterminant ce même nombre de coïncidences par la règle dont nous venons de faire usage, on trouve qu'il est égal aussi au double de la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe sur une sécante passant par B (un point de la tangente DB), et dont la distance au point D est infiniment petit du premier ordre. Dans le cas où une seule branche de la courbe passe par le point D on obtient, en faisant usage de la même représentation analytique que dans le n° 1., le *corollaire analytique suivant:*

*) Voir le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, publié par MM. Darboux et Hoüel, t. V, p. 187.

Soit y une fonction de x représentée par une série, développée suivant des puissances entières, positives et ascendantes de $x^{\frac{1}{m}}$, m étant un nombre entier, et soit $\frac{r}{m}$ l'exposant du premier terme de cette série; alors je dis que, si l'on en déduit la série, développée suivant des puissances de y, qui sert à exprimer x, le double de la somme des exposants des premiers termes des différences des valeurs de x déterminées par cette dernière série, et le double de la somme analogue formée d'exposants de la première série, auront pour différence $r-m$.

Certes, nous avons supposé dans notre démonstration, que la fonction que représente la série donnée dans les limites de convergence soit algébrique; mais cette circonstance n'est pas essentielle pour le corollaire. — En démontrant directement ce corollaire, on obtiendra une nouvelle démonstration du théorème 1.

4. *La valeur principale du nombre des points stationnaires réunis en un point singulier d'une courbe algébrique, est égal à la somme $\Sigma(m-1)$ des degrés de multiplicité, diminués chacun d'une unité, des branches par le point, les branches étant regardées comme lieux de points.*

Considérons, pour prouver ce théorème, deux courbes (C_1) et (C_2) des ordres n_1 et n_2 et des classes n_1' et n_2', placées dans le même plan, et dont les points se correspondent un-à-un. Soient P_1 et P_2 deux points correspondants et mobiles sur les deux courbes, et A_1 et A_2 deux points fixes du plan qui n'ont par rapport aux deux courbes aucune position particulière. Alors le lieu du point d'intersection Q de A_1P_1 et A_2P_2 sera une courbe de l'ordre n_1+n_2, ayant en A_1 un point n_2-tuple et en A_2 un point n_1-tuple, ce qu'on voit en comptant les points d'intersection de ce lieu avec des droites par A_1 et par A_2. On trouve la classe du même lieu, que nous appellerons la courbe auxiliaire, en comptant les tangentes par A_1 ou par A_2, et les deux valeurs qu'on trouve ainsi doivent être égales. Les tangentes par A_1 (ou A_2) seront: 1° les $2n_2$ $(2n_1)$ qui coïncident avec les n_2 (n_1) tangentes en ce point n_2-tuple $(n_1$-tuple), 2° les n_1' (n_2') tangentes à la courbe (C_1) $((C_2))$, et 3° une partie des droites joignant A_1 (A_2) aux points singuliers de (C_1) (de (C_2)). Nous allons rendre compte de ces dernières tangentes.

Considérons sur la courbe (C_1) une branche qui (regardée comme lieu de ses points) est m_1-tuple en un point singulier O_1. A ce point correspondent sur (C_2) autant de points (qui ne peuvent se confondre qu'en des points multiples de C_2) qu'il y a de branches par O_1. Désignons par O_2 celui qui correspond à O_1, regardé comme appartenant à la branche m_1-tuple considérée, et supposons que la branche correspondant à celle-ci soit m_2-tuple. Alors le point d'intersection de A_1O_1 et A_2O_2, se trouvera sur une branche de la courbe auxiliaire

qui rencontre A_1O_1 en m_1, et A_2O_2 en m_2 points coïncidents. Par conséquent, le théorème du n° 1. nous montre que, si $m_1 > m_2$, $m_1 - m_2$ tangentes, menées de A_1 à la courbe auxiliaire, coïncident avec A_1O_1, et, si $m_1 < m_2$, $m_2 - m_1$ tangentes de A_2 coïncident avec A_2O_2; si $m_1 = m_2$ aucune de ces droites n'est tangente à la branche de la courbe auxiliaire dont il s'agit. (Dans tous les trois cas, il est possible qu'à cause d'*autres* branches multiples par O_1 ou O_2, d'autres tangentes à la courbe auxiliaire coïncident avec l'une ou l'autre de ces deux droites.)

L'égalité du nombre des tangentes par A_1 à celui des tangentes par A_2 s'exprime donc par l'équation suivante

$$2n_2 + n_1' - 2n_1 - n_2' + \sum(m_1 - m_2) = 0,$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les branches multiples par les points singuliers de toutes les deux courbes, et aux branches correspondantes. Comme il peut y avoir, au nombre de ces dernières branches, des branches simples, il est plus commode de transformer le dernier terme de l'équation trouvée de la manière suivante

$$\sum(m_1 - m_2) = \sum\left[(m_1 - 1) - (m_2 - 1)\right] = \sum_1(m_1 - 1) - \sum_2(m_2 - 1);$$

car alors toutes les branches simples de l'une et de l'autre courbe seront éliminées, et il suffira d'étendre la somme $\sum_1$ à toutes les branches multiples de (C_1), et $\sum_2$ à toutes celles de (C_2). L'équation trouvée sera donc remplacée par la suivante

$$n_1' + \sum_1(m_1 - 1) - 2n_1 = n_2' + \sum_2(m_2 - 1) - 2n_2.$$

Une branche formant un point stationnaire est double ($m = 2$), pendant que les deux branches qui forment un point double ordinaire sont simples. Pour une courbe qui n'a que des singularités ordinaires, $\sum(m-1)$ sera donc le nombre des points stationnaires, et $n' + \sum(m-1) - 2n$ sera égal à $2(p-1)$, p étant le genre de la courbe. L'équation trouvée est donc celle qui exprime l'égalité des genres de deux courbes dont les points se correspondent un-à-un. Dans cette équation, appliquée à une courbe douée de singularités supérieures, $\sum(m-1)$ remplace le nombre des points stationnaires d'une courbe ordinaire. En appliquant cette même évaluation séparément à chacun des points singuliers, on obtient le théorème énoncé.

5. Il n'est pas toujours les valeurs principales des équivalents plückeriens qu'on rencontre dans les applications. En effet, dans un système de courbes douées d'un certain nombre de points doubles et stationnaires, les courbes où plusieurs de ces points se sont confondus ne

sont pas toujours du même genre qu'une courbe générale du système*). Toutefois il reste toujours essentiel de savoir déterminer les valeurs principales parce qu'elles forment *un* système de valeurs des équivalents, dont on peut déduire sans difficulté les valeurs générales.

Quant à ces *valeurs générales* des équivalents plückeriens on ne peut les déterminer séparément, comme les valeurs principales, pour les points singuliers et pour les tangentes singulières: il faut chercher à la fois l'équivalent δ et ε et l'équivalent δ' et ε' de toutes les branches qui dans le même point ont la même tangente, pendant que les points d'intersection de deux branches à tangentes distinctes sont toujours des points doubles, les droites tangentes en deux points distincts, des tangentes doubles.

Soit δ, ε, δ', ε' un système quelconque de valeurs simultanes des équivalents plückeriens d'un point singulier formé d'une seule branche, ou de plusieurs branches tangentes l'une à l'autre, et de la tangente en ce point, et soient δ_1, ε_1, δ_1', ε_1' les valeurs principales de ces équivalents. Alors

$$\delta = \delta_1 - 3\alpha, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + 2\alpha, \quad \delta' = \delta_1' - 3\alpha, \quad \varepsilon' = \varepsilon_1' + 2\alpha,$$

où α est un nombre entier assujéti à la seule condition qu'il doit donner à δ, ε, δ', ε' des valeurs positives.

En effet, on déduit des relations plückeriennes que

$$\begin{aligned} 2\delta + 3\varepsilon &= 2\delta_1 + 3\varepsilon_1, \\ 2\delta' + 3\varepsilon' &= 2\delta_1' + 3\varepsilon_1', \\ \varepsilon - \varepsilon' &= \varepsilon_1 - \varepsilon_1'. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $\begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon \\ \delta', & \varepsilon' \end{pmatrix}$ les singularités d'un point à une seule tangente dont les équivalents plückeriens ont les valeurs de δ, ε, δ', ε'. Nous joignons deux notations de cette espèce par le signe de $=$ ou de $\equiv$, suivant que les valeurs des équivalents sont les mêmes, ou que, seulement, elles ont la même influence dans les relations plückeriennes. Les résultats que nous venons d'indiquer s'écriront donc

$$\begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon \\ \delta', & \varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 - 3\alpha, & \varepsilon_1 + 2\alpha \\ \delta_1' - 3\alpha, & \varepsilon_1' + 2\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \delta_1, & \varepsilon_1 \\ \delta_1', & \varepsilon_1' \end{pmatrix}.$$

Un contact triponctuel de deux branches simples sera représenté par

---

*) Il existe, par exemple, en général, dans un système de courbes douées de deux points stationnaires, des courbes singulières où ces deux points, confondus, forment un point de contact triponctuel de deux branches simples, quoique les valeurs principales de l'équivalent de ce point sont $\varrho = 3$, $\varepsilon = 0$. (Ceux de la tangente en ce point sont $\delta' = 3$, $\varepsilon' = 0$.) Voir mon mémoire sur *les propriétés des systèmes de courbes planes* dans les Mémoires de l'Académie danoise des Sciences 5me série t. 10, IV (p. 319).

$$\begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 3, & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 0, & 2 \end{pmatrix},$$

où la première représentation contient les valeurs principales des équivalents plückeriens.

Applications.

6. Nous nous proposons d'étudier ici une classe de points singuliers, dont nous aurons besoin, dans le mémoire suivant, de connaître les équivalents plückeriens: *les points quadruples, à une seule tangente qui rencontre la courbe en six points coincidents.*

Selon notre théorème 1, la somme des degrés de multiplicité des branches formant le point singulier, regardées comme enveloppes de tangentes, est égale à 2, pendant que la tangente compte pour 6 tangentes menées par le point singulier lui-même. La première de ces circonstances montre que le nombre de ces branches est, au plus, égal à 2. On voit donc que les seuls cas possibles sont les suivants:

1°. Il y a deux branches, simples si l'on les regarde comme des enveloppes de tangentes, et dont l'une est simple l'autre triple si l'on les regarde comme des lieux de points.

2°. Il y a deux branches, simples si l'on les regarde comme des enveloppes, doubles si l'on les regarde comme des lieux.

3°. Il n'y a qu'une seule branche, double si l'on la regarde comme une enveloppe, quadruple si l'on la regarde comme un lieu.

Si l'on prend le point singulier pour origine, et la tangente pour axe des abscisses, les premiers termes des séries représentant ces branches se déterminent, sans difficulté, par la circonstance que la tangente rencontre la courbe en six points coïncidents, et qu'elle compte pour six tangentes par le point singulier.

Premier cas. Les séries auront les formes suivantes

$$y_1 = ax^2 + \cdots, \quad y_2 = bx^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$
$$Z_1 = AX^2 + \cdots, \quad Z_2 = BX^4 + \cdots,$$

où x et y sont les coordonnées ponctuelles, X et Z les coordonnées tangentielles; y_1 et y_2 sont les valeurs de y qui correspondent, pour les deux branches, à la même valeur de x, et Z_1 et Z_2 ont des significations analogues. Si δ_1, ε_1, δ_1', ε_1' sont les valeurs principales des équivalents, on trouvera donc les équations suivantes

$$2\delta_1 + 3\varepsilon_1 = 2 \cdot \tfrac{4}{3} \cdot 3 + \tfrac{4}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 16, \quad \varepsilon_1 = 2,$$
$$2\delta_1' + 3\varepsilon_1' = 2 \cdot 2 = 4, \quad \varepsilon_1' = 0,$$

d'où

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} \delta_1, & \varepsilon_1 \\ \delta_1', & \varepsilon_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, & 2 \\ 2, & 0 \end{pmatrix},$$

qui sera le seul système de valeurs des équivalents.

Deuxième cas. Le premier exposant des séries exprimant y par x sera $\frac{3}{2}$, celui des séries exprimant Z par X, 3. Soient les premières séries

$$y_1 = ax^{\frac{3}{2}} + \cdots + c_1 x^{\frac{q}{2}} + \cdots,$$
$$y_2 = ax^{\frac{3}{2}} + \cdots + c_2 x^{\frac{q}{2}} + \cdots,$$

où c_1 et c_2 sont les premiers coefficients différents dans les deux séries, q, un nombre entier > 2. Alors, quant à la représentation tangentielle, on déduira de la formule (5) du n° 1.:

$$X = -\frac{3}{2} a x^{\frac{1}{2}} - \cdots - \frac{q}{2} c x^{\frac{q-2}{2}} - \cdots,$$

d'où

$$x^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3a} X + \cdots + C X^{q-2} + \cdots,$$

où C est le premier coefficient qui dépend de c. On aura par conséquent, en désignant par x_1 et x_2 les valeurs de x qui correspondent, pour les deux branches, à la même valeur de X:

$$x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}} = (C_1 - C_2) X^{q-2} + \cdots.$$

En substituant ces valeurs de $x_1^{\frac{1}{2}}$, $x_2^{\frac{1}{2}}$, $x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation

$$Z_1 - Z_2 = \left(x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}\right)\left[\frac{1}{2} a\left(x_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + x_2\right) + \cdots\right] + \frac{q-2}{2}\left(c_1 x_1^{\frac{q}{2}} - c_2 x_2^{\frac{q}{2}}\right) + \cdots,$$

qu'on déduit de l'équation (6) du n° 1., on trouve que les séries exprimant Z par X sont des formes suivantes:

$$Z_1 = A X^3 + \cdots + D_1 X^q + \cdots,$$
$$Z_2 = A X^3 + \cdots + D_2 X^q + \cdots,$$

où D_1 et D_2 sont les premiers coefficients différents dans les deux séries.

On déduit des formes des séries que

$$2\delta_1 + 3\varepsilon_1 = 2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \tfrac{q}{2} \cdot 2 = 12 + 2q, \quad \varepsilon_1 = 2,$$
$$2\delta_1' + 3\varepsilon_1' = 2q, \qquad \varepsilon_1' = 0,$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \delta_1, & \varepsilon_1 \\ \delta_1', & \varepsilon_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+q, & 2 \\ q, & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs générales des équivalents seront:

$$\text{(II)} \qquad \begin{pmatrix} 3+q-3\alpha, & 2+2\alpha \\ q-3\alpha, & 2\alpha \end{pmatrix},$$

α et q étant des nombres entiers assujétis aux conditions

$$q > 2, \quad 0 \gtreqless \alpha \gtreqless \frac{q}{3}.$$

Dans le cas le plus simple où $q=3$ on trouve les systèmes suivants de valeurs

$$\begin{pmatrix} 6, & 2 \\ 3, & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 0, & 2 \end{pmatrix},$$

dont le premier contient les valeurs principales. On pourrait en déduire celles qui correspondent à d'autres valeurs de q, si l'on voulait regarder comme évident que tout nouveau point de rencontre des deux branches amène une seule nouvelle tangente commune.

Troisième cas. Les premiers exposants des séries auront les mêmes valeurs ($\frac{3}{2}$ et 3) que dans le cas précédent. Soit la série exprimant y par x

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + \cdots + cx^{\frac{2q+1}{4}} + \cdots,$$

où $\frac{2q+1}{4}$ est le premier exposant qui a le dénominateur 4, q étant un nombre entier > 2. Alors on trouve, en introduisant des coordonnées tangentielles, une série de la forme suivante

$$Z = AX^3 + \cdots + CX^{\frac{2q+1}{2}} + \cdots,$$

où $\frac{2q+1}{2}$ est le premier exposant qui a le dénominateur 2. Par conséquent

$$2\delta_1 + 3\varepsilon_1 = 2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot \tfrac{2q+1}{4} \cdot 2 \cdot 1 = 13 + 2q, \quad \varepsilon_1 = 3,$$

$$2\delta_1' + 3\varepsilon_1' = 2q + 1, \quad \varepsilon_1' = 1,$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \delta_1, & \varepsilon_1 \\ \delta_1', & \varepsilon_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+2, & 3 \\ q-1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs générales des équivalents seront

$$\text{(III)} \qquad \begin{pmatrix} q+2-3\beta, & 3+2\beta \\ q-1-3\beta, & 1+2\beta \end{pmatrix},$$

où q et β sont des nombres entiers assujétis aux conditions

$$q > 2, \quad 0 \gtreqless \beta \gtreqless \frac{q-1}{3}.$$

Dans le cas le plus simple où $q = 3$ on trouve le seul systeme de valeurs

$$\begin{pmatrix} 5, & 3 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar.

Von H. Krey in Kiel.

Im 3. Bande der Math. Annalen hat Herr Brill die Gleichung derjenigen Curve aufgestellt, welche aus einer gegebenen Curve f die Osculationspunkte einer zweifach unendlichen Schaar ausschneidet. Die elegante Form der in zwei Theile zerfallenden Curvengleichung lässt vermuthen, dass auch für dreifach unendliche Schaaren eine ähnliche Behandlungsweise möglich sei. Man erhält hier vier Theile, darunter mindestens drei in übersichtlicher Determinantenform, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die Grundcurven φ, ψ, χ, ω der Schaar seien von der s^{ten}, f von der n^{ten} Ordnung. Für einen Punkt von f, in welchem eine Curve

$$\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi + \alpha_3\chi + \alpha_4\omega = 0$$

der Schaar dreipunktig berührt, giebt die Elimination der Parameter die folgende Bedingungsgleichung:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} \varphi & & & \\ \Sigma\varphi_i dx_i & & & \\ \Sigma\varphi_i d^2x_i + & (s-1)\,\Sigma\varphi_{ik}dx_i dx_k & & \\ \Sigma\varphi_i d^3x_i + & 3(s-1)\,\Sigma\varphi_{ik}dx_i d^2x_k + & (s-1)(s-2)\,\Sigma\varphi_{ikh}dx_i dx_k dx_h & \end{vmatrix} = 0,$$

worin, nach der Bezeichnung des Herrn Brill, die drei letzten Verticalreihen, enthaltend die gleichgebildeten Ausdrücke in ψ, χ, ω, weggelassen sind.

Um die Elimination der Differentiale aus (1) bewerkstelligen zu können, muss man eine lineare Gleichung

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = k$$

einführen, mit deren Hülfe sich ergiebt

(2) $dx_1 = \varrho(k_2 f_3 - k_3 f_2)$; $dx_2 = \varrho(k_3 f_1 - k_1 f_3)$; $dx_3 = \varrho(k_1 f_2 - k_2 f_1)$;

(3) $x_3 dx_2 - x_2 dx_3 = \varrho k f_1$; $x_1 dx_3 - x_3 dx_1 = \varrho k f_2$; $x_2 dx_1 - x_1 dx_2 = \varrho k f_3$;

wenn ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Der Differentialausdruck (1) zerfällt in sechs einzeln zu behandelnde Theile.

I. Dem Theile

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k \\ \Sigma \varphi_{ikh} dx_i dx_k dx_h \end{vmatrix}$$

kann man die Form geben:

$$\frac{\varrho^6 k^6}{12} \begin{vmatrix} \varphi_{111} & \varphi_{222} & \varphi_{333} & \varphi_{112} & \varphi_{122} & \varphi_{113} & \varphi_{133} & \varphi_{223} & \varphi_{233} & \varphi_{123} \\ \psi_{111} & \psi_{222} & \psi_{333} & \psi_{112} & \psi_{122} & \psi_{113} & \psi_{133} & \psi_{223} & \psi_{233} & \psi_{123} \\ \chi_{111} & \chi_{222} & \chi_{333} & \chi_{112} & \chi_{122} & \chi_{113} & \chi_{133} & \chi_{223} & \chi_{233} & \chi_{123} \\ \omega_{111} & \omega_{222} & \omega_{333} & \omega_{113} & \omega_{122} & \omega_{113} & \omega_{133} & \omega_{223} & \omega_{233} & \omega_{123} \\ 3f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3f_2 & 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3f_3 & 0 & 0 & 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2f_1 & 2f_3 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2f_2 & 2f_3 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_1 & 2f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 \end{vmatrix}$$

Man beweist die Richtigkeit dieser Umformung durch Multiplication der erhaltenen mit derjenigen zehngradigen Determinante, welche aus

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & 3x_1^2 x_2 \\ x_1^2 dx_1 & x_2^2 dx_2 & x_3^2 dx_3 & x_1^2 dx_2 + 2x_1 x_2 dx_1 \\ x_1 dx_1^2 & x_2 dx_2^2 & x_3 dx_3^2 & x_2 dx_1^2 + 2x_1 dx_1 dx_2 \\ dx_1^3 & dx_2^3 & dx_3^3 & 3dx_1^2 dx_2 \end{vmatrix} = \varrho^6 k^6 f_1 f_2^2 f_3^3$$

dadurch entsteht, dass man die Horizontalreihen bezw. durch

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 x_2^2 & \cdots\cdots & 6x_1 x_2 x_3 \\ x_2^2 dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2 & \cdots & x_1 x_2 dx_3 + \cdots \\ x_1 dx_2^2 + 2x_2 dx_1 dx_2 & \cdots & x_1 dx_2 dx_3 + \cdots \\ 3dx_1 dx_2^2 & \cdots\cdots & 6dx_1 dx_2 dx_3 \end{array}$$

vervollständigt, alle übrigen Elemente aber, bis auf die Diagonalelemente 1 der ergänzenden sechsgradigen Determinante, Null setzt.

II. Aus

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i \\ \Sigma \varphi_{ikh} dx_i dx_k dx_h \end{vmatrix}$$

sondert sich, wenn man nach den Unterdeterminanten der letzten Horizontalreihe ordnet, ohne Weiteres der Factor $\Sigma \pm x_1 dx_2 d^2 x_3$ ab, welchen Herr Brill auf die Form

$$-(n-1)k^3\varrho^3 \cdot H$$

gebracht hat, wo H die Hesse'sche Determinante von f bedeutet. Aus dem Reste

$$D = \Sigma dx_i dx_k dx_h \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_{ikh} \end{vmatrix}$$

für sich allein betrachtet, lässt sich zwar k^2, nicht aber k^3 ausscheiden.

III. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i \\ \Sigma \varphi_i d^3 x_i \end{vmatrix}$$

verschwindet, wie leicht zu sehen, identisch.

IV. Um

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i \\ \Sigma \varphi_{ik} dx_i d^2 x_k \end{vmatrix}$$

zu reduciren, muss man die zweiten Differentiale durch die ersten ausdrücken. Nimmt man zu den Gleichungen

$$k_1 d^2 x_1 + k_2 d^2 x_2 + k_3 d^2 x_3 = 0,$$
$$f_1 d^2 x_1 + f_2 d^2 x_2 + f_3 d^2 x_3 = -(n-1)\Sigma f_{ik} dx_i dx_k$$

noch eine aus einer der Gleichungen (3) durch Differentiation entstehende, oder, um symmetrisch zu verfahren, die Gleichung

$$(\lambda_3 x_2 - \lambda_2 x_3) d^2 x_1 + (\lambda_1 x_3 - \lambda_3 x_1) d^2 x_2 + (\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2) d^2 x_3 = \varrho k \Sigma \lambda_i df_i$$

hinzu, wo die λ_i ganz beliebig sind, und beachtet, dass

$$\Sigma f_{ik}\,dx_i\,dx_k = -\,k^2\varrho^2 H,$$

so erhält man durch Auflösung:

$$(4)\qquad d^2x_h = \frac{\Sigma\lambda_i df_i}{\Sigma\lambda_i f_i}\cdot dx_h + \frac{(n-1)(\lambda_h\cdot k - x_h\,\Sigma\lambda_i k_i)}{\Sigma\lambda_i f_i}\cdot\varrho^2 k\cdot H.$$

Führt man dies in $\Sigma\varphi_{ik}\,dx_i\,d^2x_k$ ein, so wird obige Determinante

$$= -\frac{\Sigma\lambda_i df_i}{\Sigma\lambda_i f_i}\begin{vmatrix}\varphi & \\ \Sigma\varphi_i\,dx_i & \\ \Sigma\varphi_{ik}\,dx_i\,dx_k & \\ \Sigma\varphi_i\,d^2x_i & \end{vmatrix} + \frac{(n-1)\varrho^2k^2H}{\Sigma\lambda_i f_i}\cdot\begin{vmatrix}\varphi & \\ \Sigma\varphi_i\,dx_i & \\ \Sigma\varphi_i\,d^2x_i & \\ \Sigma\varphi_{ik}\,\lambda_k\,dx_i & \end{vmatrix}.$$

Im ersten Gliede kann man noch einmal die Gleichung (4) anwenden, und für die Unterdeterminanten der letzten Horizontalreihe die von Herrn Brill mit P bezeichneten Covarianten setzen. Auf diese Weise entsteht eine Determinante 7. Grades, in welcher man die vier ersten Elemente der letzten Verticalreihe mit Hülfe der ersten Verticalreihen zerstören kann. Entfernt man dann noch den Ausdruck

$$d\,\Sigma\lambda_i f_i$$

mit Hülfe der Gleichungen

$$x_1\,d\,\Sigma\lambda_i f_i = (n-1)(\Sigma\lambda_i f_i)\,dx_1 + \varrho k\cdot\left(f_2\frac{\partial\,\Sigma\lambda_i f_i}{\partial x_3} - f_3\cdot\frac{\partial\,\Sigma\lambda_i f_i}{\partial x_2}\right)$$

u. s. w.,

und sondert aus dem zweiten Glied noch einmal den Factor H ab, so kommt:

$$-\frac{(n-1)^2}{2}\cdot\varrho^5\cdot k^5\cdot H\cdot\begin{vmatrix}\varphi_{11}&\varphi_{22}&\varphi_{33}&\varphi_{23}&\varphi_{31}&\varphi_{12}&0\\ \psi_{11}&\psi_{22}&\psi_{33}&\psi_{23}&\psi_{31}&\psi_{12}&0\\ \chi_{11}&\chi_{22}&\chi_{33}&\chi_{23}&\chi_{31}&\chi_{12}&0\\ \omega_{11}&\omega_{22}&\omega_{33}&\omega_{23}&\omega_{31}&\omega_{12}&0\\ 2f_1&0&0&0&f_3&f_2&dx_1\\ 0&2f_2&0&f_3&0&f_1&dx_2\\ 0&0&2f_3&f_2&f_1&0&dx_3\end{vmatrix} - \frac{(n-1)^2k^5\varrho^5\cdot H^2}{\Sigma\lambda_i f_i}\begin{vmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \Sigma\varphi_{ik}\lambda_k dx_i\end{vmatrix},$$

ausserdem noch eine mit dem Factor $\frac{-(n-1)\varrho^6k^6\cdot H}{2\,\Sigma\lambda_i f_i}$ behaftete Determinante, welche aus der ersten der hingeschriebenen, L, dadurch entsteht, dass man dx_1 durch

$$f_2\frac{\partial\,\Sigma\lambda_i f_i}{\partial x_3} - f_3\cdot\frac{\partial\,\Sigma\lambda_i f_i}{\partial x_2}\quad\text{u. s. w.}$$

ersetzt. Diese letztere vereinigt sich mit der zweiten der hingeschriebenen zu

$$\varrho^6 \cdot k^6 \cdot 3(n-1)^2 \cdot H \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ \omega_{11} & \omega_{22} & \omega_{33} & \omega_{23} & \omega_{31} & \omega_{12} \\ f_{11} & f_{22} & f_{33} & f_{23} & f_{31} & f_{12} \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 & f_2 f_3 & f_3 f_1 & f_1 f_2 \end{vmatrix}.$$

V. Um

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k \\ \Sigma \varphi_i d^3 x_i \end{vmatrix}$$

auf einfachere Ausdrücke zurückzuführen, differentiire man die Gleichung (4) noch einmal und drücke $d^3 x_h$ ganz durch die ersten Differentiale aus. Bildet man dann $\Sigma \varphi_i d^3 x_i$, so kommt für die vorliegende Determinante nur das Glied

$$\frac{(n-1)\varrho^3 k^3 \cdot dH}{\Sigma \lambda_i f_i} \cdot \Sigma \lambda_i \varphi_i$$

in Betracht. Dieselbe reducirt sich daher, wenn man wieder die schon unter IV. benutzte Covariante einführt, und

$$x_1 dH = (3n-6) H dx_1 + (3n-6)\varrho k \cdot (f_2 H_3 - f_3 H_2) \text{ u. s. w.}$$

setzt, auf

$$\frac{(n-1)(3n-6)}{2} \varrho^6 k^6 \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & 0 \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} & 0 \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} & 0 \\ \omega_{11} & \omega_{22} & \omega_{33} & \omega_{23} & \omega_{31} & \omega_{12} & 0 \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_2 & f_3 & f_2 H_3 - f_3 H_2 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 & f_3 H_1 - f_1 H_3 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_2 & f_1 & 0 & f_1 H_2 - f_2 H_1 \end{vmatrix},$$

vermehrt um die mit dem Factor $\frac{(n-1)(3n-6)}{2} \varrho^5 k^5 H$ behaftete Determinante L, welche schon unter IV. auftrat.

VI. Auf diese Determinante L, multiplicirt mit $\frac{n-1}{2} \varrho^5 k^5 H$, kommt endlich auch der letzte Theil

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k \\ \Sigma \varphi_{ik} dx_i d^2 x_k \end{vmatrix}$$

des Differentialausdrucks (1) zurück, wenn man die Gleichung (4) benutzt und nach den Unterdeterminanten der letzten Horizontalreihe ordnet.

Zieht man diejenigen Terme unter I. bis VI., welche die Differentiale noch enthalten, mit Berücksichtigung der numerischen Coefficienten in (1), zusammen, so sieht man, dass nur noch, abgesehen von dem Factor $(s-1)(s-2)(n-1) \cdot \frac{H}{2} \varrho^3 k^3$, der Differentialausdruck

$$3\,\varrho^2 k^2 L - 2\,D$$

zu behandeln bleibt. Für die hieraus durch Ausscheidung des Factors k^3 zu bildende Function scheint jedoch eine Darstellung in Determinantenform nicht möglich zu sein.

December 1875.

Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden*).

Von F. E. Eckardt †.

Auf jeder allgemeinen Fläche dritten Grades liegen bekanntlich 27 gerade Linien, und zwar sind dieselben so vertheilt, dass sich durch jede Gerade 5 Ebenen legen lassen, deren jede noch zwei weitere Gerade der Fläche enthält. Drei so in einer Ebene liegende gerade Linien bilden nun im Allgemeinen ein Dreieck, und nur bei speciellen Flächen durchschneiden sich dieselben in einem Punkte. Die Betrachtung dieser besonderen Flächen nun ist der Zweck der nachstehenden Abhandlung. Dieselbe beginnt mit einer allgemeinen Untersuchung derjenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich *einmal* drei gerade Linien in einem Punkte schneiden; sie wendet sich dann vorzugsweise den Flächen zu, auf welchen dieser Fall *sechsmal* eintritt, und schliesst mit einer Betrachtung von 3 speciellen Flächen der letzteren Art. Literaturnachweise konnten nur an wenigen Stellen beigefügt werden, da dem Verfasser ausser den allgemeinen Werken über Flächen dritten Grades von Cremona und Sturm und ausser Salmon's analytischer Geometrie des Raumes für seine specielle Arbeit nur die Abhandlung von Clebsch: „Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits" (Bd. IV der mathematischen Annalen) zu Gebote stand. In der letzteren ist aber nur von einer ganz speciellen der zu behandelnden Flächen, der sogenannten Diagonalfläche, die Rede.

1. *Wenn sich auf irgend einer Fläche drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, ohne dabei in einer Ebene zu liegen, so muss der Schnittpunkt nothwendig ein Knotenpunkt der Fläche sein.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich synthetisch sofort, wenn man bedenkt, dass jede durch zwei der geraden Linien gelegte Ebene die Fläche in einer zusammengesetzten Linie durchschneidet, von welcher

*) Wir entnehmen diese letzte Arbeit des verstorbenen Verfassers dem Osterprogramm 1875 der Realschule I. Ordnung zu Chemnitz. Die Red.

jene Linien einen Theil ausmachen, und welche daher in dem fraglichen Punkte einen Doppelpunkt besitzt. Da nun jede Ebene, welche aus einer Fläche eine Linie mit Doppelpunkt ausschneidet, als eine Tangentialebene der Fläche in demselben angesehen werden muss, so besitzt der betreffende Punkt im vorliegenden Falle drei verschiedene Tangentialebenen, was nur dann eintreten kann, wenn er ein Knotenpunkt der Fläche ist.

Analytisch folgt derselbe Satz sofort aus der allgemeinen Gleichung

$$\beta\gamma f_1 + \gamma\alpha f_2 + \alpha\beta f_3 = 0$$

derjenigen Flächen, welche durch die drei Schnittlinien der Ebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gehen. Es bedeuten in dieser Gleichung die Grössen f homogene Functionen gleichhohen Grades der vier Coordinaten α, β, γ und δ.

Bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte gehen durch denselben nicht nur drei, sondern sechs gerade Linien der Fläche. Denn die allgemeine Gleichung einer Fläche dritten Grades, welche den Punkt $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ zu einem Knotenpunkt hat, darf weder die dritte, noch die zweite Potenz der vierten Coordinate δ enthalten, und muss also sein

$$\delta K_2 + K_3 = 0,$$

wobei in K_2 und K_3 δ nicht mehr vorkommt. Durch

$$K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

werden aber zwei Kegel zweiten und dritten Grades dargestellt, welche den Knotenpunkt zum gemeinsamen Scheitel besitzen und deren aus sechs Geraden bestehende Durchschnittslinie der Gleichung zufolge auf der Fläche liegen muss. Auf Flächen höheren Grades gehen dagegen nur ausnahmsweise gerade Linien durch einen Knotenpunkt.

Wir werden im Folgenden die Flächen dritten Grades mit Knotenpunkten nur insoweit berücksichtigen, als sich auf denselben zugleich anderweit drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und werden uns infolge dessen auf den Fall beschränken, in welchem sich die drei geraden Linien in einem Punkte schneiden und ihr gemeinsamer Schnittpunkt ein einfacher Punkt der Fläche ist.

2. Zur Ermittelung der allgemeinen Gleichung einer Fläche dieser Art bedürfen wir noch des folgenden Lehrsatzes:

Wenn sich auf einer Fläche n^{ten} Grades n in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden, so zerfällt die erste Polarfläche des Schnittpunktes in Bezug auf die gegebene Fläche in jene Ebene und in eine Fläche $(n-2)^{ten}$ Grades.

Sind nämlich die Coordinaten des fraglichen Punktes

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

und ist $\alpha = 0$ die Gleichung der Ebene, in welcher jene Geraden liegen, so ist die Gleichung der Fläche

$$f_n(\beta, \gamma) + \alpha f_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

wobei die beiden f homogene Functionen resp. n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der innerhalb der Klammer stehenden Coordinaten sind. Setzt man nämlich in dieser Gleichung $\alpha = 0$, so wird dieselbe zu

$$f_n(\beta, \gamma) = 0$$

und stellt n gerade Linien dar. Die Gleichung der ersten Polarfläche des Schnittpunktes wird nun durch den gleich Null gesetzten Differentialquotienten der Flächengleichung nach δ dargestellt und ist somit:

$$\alpha \frac{df_{n-1}}{d\delta} = 0.$$

Hiernach ist das Behauptete evident. Leicht zu beweisen ist, dass auch die Umkehrung desselben gilt:

Wenn die erste Polarfläche eines Punktes in Bezug auf eine Fläche n^{ten} Grades in eine durch ihn gehende Ebene und eine Fläche $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades zerfällt, so liegt jener Punkt auf der Fläche, die Ebene ist die Tangentialebene der Fläche in ihm und schneidet die Fläche in n durch den Punkt gehenden geraden Linien.

Jede Ebene, welche durch einen derartigen Punkt geht, schneidet die Fläche in einer Curve, deren Tangente in jenem Punkte mit der Curve n zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich hat.

Ist die Fläche eine solche dritten Grades, so geht der erste allgemeine Satz in den folgenden speciellen über:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden, so zerfällt die erste Polare dieses Punktes in Bezug auf die Fläche in zwei Ebenen, deren eine jene Tangentialebene ist.

Während also im Allgemeinen der Berührungskegel einer Fläche dritten Grades, welcher seinen Scheitel in einem beliebigen Punkt derselben hat, vom vierten Grade ist, wird er für den Schnittpunkt von drei Geraden der Fläche nur vom dritten Grade. Es hängt dies damit zusammen, dass jede durch diesen Schnittpunkt gehende, auf der Fläche liegende ebene Curve in ihm einen Wendepunkt besitzt, und folgt unmittelbar aus dem Satze, dass man von einem Wendepunkte aus an eine ebene Curve dritten Grades drei Tangenten legen kann, deren Berührungspunkte in einer Geraden liegen.

3. Clebsch hat zuerst (Crelle's Journal, Bd. 59, vergl. auch Salmon's analytische Geometrie des Raumes, deutsch von Fiedler, p. 397) den Beweis geliefert, dass die allgemeine Gleichung einer Fläche dritten Grades in nur einer Weise auf die Form gebracht werden kann:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ u. s. w. die Gleichungen von Ebenen und die in diesen enthaltenen Constanten so gewählt sind, dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

Diese fünf Ebenen bilden ein Pentaeder. Die 10 Ecken desselben, und zwar im Allgemeinen diese allein, besitzen nun die Eigenschaft, dass ihre erste Polaren in Bezug auf die Fläche dritten Grades in zwei Ebenen zerfallen. So ergiebt sich aus obiger Gleichung durch Differenziren derselben nach α oder β unter gleichzeitiger Berücksichtigung der zwischen den 5 Grössen α, β u. s. w. bestehenden Relation die Gleichung der ersten Polaren des Eckpunktes $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$:

$$A\alpha^2 - B\beta^2 = 0.$$

Diese Polare zerfällt also in die zwei Ebenen

$$\alpha\sqrt{A} \pm \beta\sqrt{B} = 0.$$

Sollen somit auf unsrer Fläche dritten Grades sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, so muss nach § 2. eine der 10 Ecken des Pentaeders in der Fläche liegen. Dies tritt aber für die eben als Beispiel gewählte Ecke nur dann ein, wenn

$$A = B.$$

Sind somit in der allgemeinen auf das Pentaeder bezogenen Gleichung einer Fläche dritten Grades zwei Coefficienten gleich, so liegen auf der Fläche drei sich in einer Pentaederecke schneidende Gerade. Aus der Gleichung der Fläche, welche infolge der Gleichheit zweier Coefficienten die Form annimmt:

$$A(\alpha^3+\beta^3) + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

ergiebt sich sofort, dass die Ebene

$$\alpha + \beta = 0$$

diejenige der drei Geraden ist. Substituirt man nämlich

$$\alpha = -\beta$$

in die Gleichung der Fläche; so erhält man wegen

$$\varepsilon = -(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

die Gleichung

$$C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\gamma+\delta)^3 = 0,$$

welche in Verbindung mit

$$\alpha + \beta = 0$$

drei Gerade darstellt, welche sich in einem Punkte treffen. Diese Ebene ist aber eine Diagonalebene des Pentaeders, da aus der Gleichung derselben hervorgeht, dass sie durch die Schnittlinie der zwei Pentaederebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$ geht, und da ausserdem nach dem Vorigen die Pentaederecke $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ in ihr enthalten ist. Daher:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei Gerade in einem Punkte treffen, so ist die Ebene derselben eine Diagonalebene und der Schnittpunkt eine Ecke des Pentaeders der Fläche.

Zu bemerken ist noch, dass die Gleichung der Ebene, welche mit derjenigen der drei Geraden die erste Polare der Pentaederecke

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

ausmacht,

$$\alpha - \beta = 0$$

ist, und dass somit die Berührungsebene des von jener Ecke aus an die Fläche zu legenden Berührungskegels dritten Grades durch die nämliche Pentaederkante geht, wie die Ebene der drei Geraden, und mit dieser den von den beiden darin zusammenstossenden Pentaederebenen gebildeten Winkel harmonisch theilt.

4. Durch Betrachtung aller möglichen Fälle ergiebt sich zunächst, dass auf einer Fläche dritten Grades 1, 2, 3, 4, 6 und 10mal der Fall eintreten kann, dass sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Die diesen Fällen entsprechenden Gleichungen der Fläche haben die folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
&1)\ \alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,\\
&2)\ \alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3+\delta^3) + l\varepsilon^3 = 0,\\
&3)\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + k\delta^3 + l\varepsilon^3 = 0,\\
&4)\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + k(\delta^3+\varepsilon^3) = 0,\\
&5)\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + k\varepsilon^3 = 0,\\
&6)\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 = 0.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung 2) geht hervor, *dass, wenn sich auf einer Fläche dritten Grades zweimal, aber nicht öfter, drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, die Verbindungslinie beider Schnittpunkte, hier die Gerade*

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma + \delta = 0,$$

der Fläche angehört.

Wenn dagegen, wie bei der Fläche 3), *dreimal, aber nicht öfter, drei gerade Linien der Fläche sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Schnittpunkte auf einer und derselben Pentaederkante*, hier

$$\delta = 0, \quad \varepsilon = 0.$$

Die Fälle 5) und 6), deren letzterer die von Clebsch so genannte *Diagonalfläche* liefert, sollen später ausführlicher betrachtet werden.

5. Die vorigen Betrachtungen haben jedoch gewisse Flächen nicht mit ergeben, auf welchen sich theilweise noch öfter, als 10mal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, dass die oben aufgestellte Behauptung, es könnten nur die ersten Polaren der 10 Pentaederecken in ein Ebenenpaar zerfallen, nur

im Allgemeinen richtig und für specielle Flächen dritten Grades nicht mehr zutreffend ist.

Unter der Hesse'schen Fläche einer beliebigen Fläche versteht man bekanntlich den geometrischen Ort aller Punkte, deren quadratische Polare (Polarfläche 2. Grades) zu einem Kegel wird. Für die allgemeine Fläche dritten Grades ist dieselbe vom vierten Grade und ihre Gleichung nimmt, falls die ursprüngliche Fläche wie früher auf das Pentaeder bezogen ist, die einfache Gestalt an:

$$\frac{1}{A\alpha} + \frac{1}{B\beta} + \frac{1}{C\gamma} + \frac{1}{D\delta} + \frac{1}{E\varepsilon} = 0.$$

Die 10 Ecken des Pentaeders sind Knotenpunkte dieser Hesse'schen Fläche und haben als solche die Eigenschaft, dass ihre quadratische Polare in Bezug auf die Fläche dritten Grades in zwei Ebenen zerfällt. Hätte die Hesse'sche Fläche jedoch ausser diesen und den etwaigen Knotenpunkten der ursprünglichen Fläche, welche ihr bekanntlich auch als solche angehören, noch weitere Knotenpunkte, so würden diese die nämliche Eigenschaft besitzen. Dieser Fall kann allerdings eintreten, aber nur dann, wenn die Hesse'sche Fläche in Flächen niedrigeren Grades zerfällt und daher Doppellinien besitzt.

Wenn von den fünf Ebenen des Pentaeders vier durch einen und denselben Punkt gehen, so kann wohl die Gleichung der Fläche auch fernerhin auf die Form:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

gebracht werden, es ist aber nicht mehr möglich, die Summe der fünf Coordinaten gleich Null zu setzen, sondern nur diejenige von vier Coordinaten, so dass etwa:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0$$

wäre. Der gemeinsame Schnittpunkt der vier Pentaederebenen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ besitzt die Eigenschaft, dass von ihm aus ein osculirender Kegel dritten Grades an die Fläche gelegt werden kann, eine Eigenschaft, durch welche die Fläche vollständig charakterisirt ist. Die ebene Berührungscurve dieses Kegels liegt in der Ebene $\delta = 0$ und besitzt die Gleichung:

$$\delta = 0, \quad A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + E\varepsilon^3 = 0.$$

Bekanntlich kann die Gleichung einer Curve dritten Grades auf unendlich viele Weise in diese Form gebracht werden, so dass von dem Pentaeder der Fläche eine Ebene ($\delta = 0$) und der Schnittpunkt der vier übrigen Ebenen bestimmt, diese vier Ebenen selbst aber unbestimmt sind. Man kann daher auch als Gleichung der Fläche die folgende wählen:

$$\delta^3 + K = 0,$$

wo $K = 0$ einen Kegel dritten Grades vom Scheitel $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ darstellt.

Die Hesse'sche Fläche dieser Oberfläche zerfällt nun in zwei Theile, und zwar in die Ebene $\delta = 0$ und in den Hesse'schen Kegel des Kegels $K = 0$, der wie dieser vom dritten Grade ist. Diese beiden Theile durchschneiden sich in einer Curve dritten Grades, welche als Doppellinie der Hesse'schen Fläche angesehen werden muss und zugleich die Hesse'sche Curve der Linie:

$$\delta = 0, \quad K = 0$$

darstellt. *Diese Doppellinie begegnet der Fläche dritten Grades in* 9 *Punkten, den* 9 *Wendepunkten der Curve, in welcher die Fläche von ihrem osculirenden Kegel berührt wird, und diese* 9 *Punkte sind zugleich solche, in denen sich drei gerade Linien der Fläche in einem Punkte schneiden.*

Die 9 Ebenen, in welchen je drei sich in einem Punkte treffende Linien liegen, gehen sämmtlich durch denselben Punkt, den Scheitel des Kegels K. Die übrigen 36 Dreiecksebenen der Fläche schneiden sich 12mal zu je dreien in den 12 geraden Linien, welche durch je drei Wendepunkte der Berührungscurve gehen.

6. Wenn die Ebene ε durch die Schnittlinie der Ebenen α und β geht, so würde die Gleichung der Fläche sein:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$\alpha + \beta + \varepsilon = 0.$$

Man kann aber jede binäre cubische Form, also auch die folgende:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 - E(\alpha+\beta)^3$$

auf die Summe zweier Cuben:

$$m(\alpha+k\beta)^3 + n(\alpha+l\beta)^3$$

reduciren. Setzt man nun wieder für $\alpha + k\beta$ und $\alpha + l\beta$ resp. α und β, sowie für m und n A und B, so findet man, dass die Gleichung der Fläche immer auf die Form:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 = 0$$

gebracht werden kann, oder auf die noch einfachere:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

wenn man die Constanten in die Coordinaten selbst mit einschliesst. Für diese Fläche, deren Gleichung somit auf die Summe von vier Cuben zurückgeführt werden kann, wird die Hesse'sche Fläche einfach von der Gleichung:

$$\alpha\beta\gamma\delta = 0;$$

sie zerfällt also in die vier Ebenen eines Tetraeders, dessen Kanten Doppellinien derselben sind.

Jeder Punkt auf einer dieser Kanten hat nun in der That die Eigenschaft, dass seine erste Polarfläche in Bezug auf die Fläche dritten Grades zu einem Ebenenpaar wird. So ist die Gleichung dieser Polaren für den Punkt:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, \quad \delta_1 = 0:$$
$$\alpha_1 \alpha^2 + \beta_1 \beta^2 = 0.$$

Jede der vier Tetraederecken speciell hat die Eigenschaft, dass ihre Polare in zwei zusammenfallende Ebenen zerfällt; wird z. B. noch $\beta_1 = 0$, so geht vorige Gleichung über in:

$$\alpha^2 = 0.$$

Von jeder der vier Ecken aus ist daher nur ein Tangentialkegel dritten Grades an die Fläche möglich, dessen Erzeugenden die Fläche osculiren.

Die Punkte dagegen, in welchen die 6 Tetraederkanten der Fläche dritten Grades begegnen, sind solche, durch welche zugleich drei in einer Ebene liegende Gerade der Fläche gehen. Solcher Punkte giebt es 18. — Auch auf diese Fläche kommen wir später ausführlicher zurück.

Weitere Flächen dritten Grades, deren Hesse'sche Flächen in solche niedrigeren Grades zerfallen, würde man erhalten, wenn man zwei der fünf Pentaederebenen zusammenfallen liesse. Die Gleichung einer solchen Fläche geht hervor, wenn man in der auf das Pentaeder bezogenen Gleichung etwa α und β durch:

$$\alpha + \frac{\beta}{k} \text{ und } \alpha - \frac{\beta}{k}$$

ersetzt, sowie statt A und B resp. Ak und $-Ak$ einführt und sodann k unendlich gross werden lässt. Sie hat daher die Form:

$$A\alpha^2\beta + C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\alpha+\gamma+\delta)^3 = 0.$$

Wir gehen jedoch hier auf diese Flächen, auf denen sich stets ein uniplanarer Knotenpunkt nachweisen lässt und deren Hesse'sche Fläche aus zwei zusammenfallenden Ebenen und einem Kegel zweiten Grades besteht, nicht näher ein, da sich im Allgemeinen auf ihnen ausser den durch den Knotenpunkt gehenden Geraden keine weiteren vorfinden, die sich zu dreien in einem Punkte schneiden.

Wollte man ausser zwei Pentaederebenen noch einmal zwei derselben zusammenfallen lassen, so würde die entstehende Fläche eine *Regelfläche* dritten Grades sein. Auf dieser schneiden sich gewissermassen in jedem Punkte der Doppellinie drei gerade Linien, von denen allerdings zwei zusammenfallen.

7. Besonders beachtenswerth sind diejenigen unter den von uns zu betrachtenden Flächen, welche *Knotenpunkte* besitzen. Soll ein solcher Punkt in der allgemeinen Fläche dritten Grades:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

wobei

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$$

ist, auftreten, so muss zwischen den Coefficienten A, B u. s. w. eine gewisse Relation bestehen, deren Aufsuchung leicht ist. Es können nämlich für jede Fläche nur solche Punkte Knotenpunkte werden, für welche die vier Differentialquotienten der Flächengleichung nach den vier Coordinaten verschwinden. Der Punkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ wird daher für die obige Fläche dann ein Knotenpunkt sein, wenn:

$$A\alpha_1^2 = B\beta_1^2 = C\gamma_1^2 = D\delta_1^2 = E\varepsilon_1^2,$$

oder

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 : \varepsilon_1 = A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Flächengleichung ein, so erhält man als die gesuchte Relation zwischen den Coefficienten:

$$A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Quadratwurzeln können dabei sowohl in voriger Proportion, als auch in dieser Gleichung das positive und negative Vorzeichen besitzen, doch müssen die Vorzeichen derselben Wurzel in beiden Fällen übereinstimmen. Da sonach noch vier der Coefficienten willkührlich sind, so kann man, dieselben gleichsetzend, bewirken, dass auf der Fläche sechsmal drei gerade Linien durch einen und denselben Punkt gehen und zwar ohne dass dabei die sechs Geraden betheiligt sind, welche sich in dem Knotenpunkte schneiden. Auch auf diese specielle interessante Fläche, deren Gleichung die Form hat:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 = 0,$$

kommen wir später zurück.

Soll die Fläche zwei Knotenpunkte besitzen, so muss für die Coordinaten beider Punkte die obige Proportion erfüllt sein, was nur dann möglich ist, wenn bei beiden gewisse Vorzeichen verschieden sind. Sollen nun etwa die beiden Punkte:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = A^{-\frac{1}{2}} : -B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = -A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : D^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}}$$

Knotenpunkte der Fläche sein, so können die beiden zu erfüllenden Gleichungen:

$$A^{-\frac{1}{2}} - B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

und

$$-A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

nur dann gleichzeitig bestehen, wenn:

$$A = B$$

und

$$C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Der ersten Gleichung zufolge muss nach § 3. die Ebene

$$\alpha + \beta = 0,$$

die Flächen in drei geraden Linien schneiden, welche sich in einem Punkte treffen. In der That enthält eine Fläche dritten Grades mit zwei Knotenpunkten die gerade Verbindungslinie beider Punkte und besitzt längs derselben in allen Punkten dieselbe Berührungsebene. Diese Ebene nun schneidet daher die Fläche in zwei zusammenfallenden Linien und einer weiteren Geraden und ist also eine Ebene der angegebenen Art. Aus ihrer Gleichung und aus den zwischen den Coordinaten der Knotenpunkte bestehenden Proportionen ergiebt sich noch der folgende Satz:

Hat eine Fläche dritten Grades zwei Knotenpunkte, so liegen beide in einer Diagonalebene des Pentaeders und ihre Verbindungslinie geht durch eine Ecke desselben.

Die Bedingung

$$C^{-\frac{1}{2}} + D^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0$$

wird unter Anderem erfüllt, wenn:

$$C = D = k, \quad E = 4k$$

ist. Bei der sich unter dieser Voraussetzung ergebenden Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3 + \delta^3 + 4\varepsilon^3) = 0$$

schneiden sich überdies drei gerade Linien, deren keine durch einen Knotenpunkt geht, in einem Punkte. Mehr als einmal kann dieser Fall bei Flächen dritten Grades mit zwei Knotenpunkten nicht eintreten.

Auf gleiche Weise stellt:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 4(\delta^3 + \varepsilon^3) = 0$$

eine Fläche mit drei Knotenpunkten dar, auf welcher die einzigen drei geraden Linien, welche nicht durch einen Knotenpunkt gehen, sich in einem Punkte schneiden. Die Coordinaten der drei Knotenpunkte sind bei dieser Fläche die folgenden:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 : \varepsilon_1 = \quad 2 : -2 : -2 : 1 : 1,$$
$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2 : \varepsilon_2 = -2 : \quad 2 : -2 : 1 : 1,$$
$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 : \delta_3 : \varepsilon_3 = -2 : -2 : \quad 2 : 1 : 1,$$

und die Ebene der drei Punkte ist:

$$\delta - \varepsilon = 0.$$

Endlich wird durch die Gleichung:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon^3 = 0$$

eine Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten dargestellt.

8. Bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte, deren Untersuchung oben durchgeführt worden ist, kann es auffallend erscheinen, dass unter den Geraden, welche sich zu dreien in einem Punkte schneiden, nie eine durch den Knotenpunkt gehende vorkommt. In der That aber sind, wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende gerade Linien in einem Punkte schneiden und eine derselben durch einen Knotenpunkt geht, nur zwei Fälle möglich. Entweder hat die Fläche noch einen zweiten Knotenpunkt, die Gerade ist die Verbindungslinie beider und die Ebene der drei geraden Linien ist die Berührungsebene längs derselben, welcher Fall bereits oben erledigt ist, oder die zwei anderen Geraden gehen durch den nämlichen Knotenpunkt und dieser ist ein *biplanarer* oder *uniplanarer*.

Die Flächen dieser Art haben wir im vorigen § von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen, da wir ein vollständig bestimmtes Pentaeder voraussetzten, welches für diese Flächen nicht existirt. Es sei dagegen jetzt die Gleichung der Fläche:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0\,.$$

Soll für diese Fläche der Punkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1)$ ein Knotenpunkt sein, so sind die Bedingungen:

$$A\alpha_1^{\,2} = B\beta_1^{\,2} = C\gamma_1^{\,2} = E\varepsilon_1^{\,2}$$

und

$$D\delta_1^{\,2} = 0$$

zu erfüllen, der Knotenpunkt muss daher in der Ebene $\delta = 0$ liegen und seine Cordinaten müssen sein:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \varepsilon_1 = A^{-\frac{1}{2}} : B^{-\frac{1}{2}} : C^{-\frac{1}{2}} : E^{-\frac{1}{2}},$$

während zwischen den Coefficienten noch die Verbindung bestehen muss:

$$A^{-\frac{1}{2}} + B^{-\frac{1}{2}} + C^{-\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Die Gleichung des Berührungskegels in dem Knotenpunkte ist:

$$A^{\frac{1}{2}}\alpha + B^{\frac{1}{2}}\beta^2 + C^{\frac{1}{2}}\gamma^2 + E^{\frac{1}{2}}\varepsilon^2 = 0\,.$$

Ein Scheitel dieses Kegels liegt also in dem Punkte:

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0;$$

ein weiterer Scheitel muss aber offenbar der Knotenpunkt selbst sein, was nur dann zugleich mit jenem möglich ist, wenn der Kegel in zwei Ebenen zerfällt, der Knotenpunkt also *biplanar* wird.

Hat somit eine Fläche dritten Grades mit einem osculirenden Kegel dritten Grades einen Knotenpunkt, so ist dieser biplanar und liegt in der Berührungsebene jenes Kegels.

Nach § 5. schneiden sich in jedem Wendepunkte der Berührungscurven drei gerade Linien der Fläche. Da nun eine ebene Curve dritten Grades mit Doppelpunkt drei Wendepunkte besitzt, so folgt, dass auf der vorliegenden Fläche mit einem biplanaren Knotenpunkte die 9 geraden Linien, welche nicht durch denselben gehen, sich dreimal zu je dreien in einem Punkte treffen. Die Gleichung einer Fläche dieser Art kann stets auf die Form:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - \tfrac{1}{9}(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 0$$

gebracht werden; die Gleichungen der drei Ebenen, in welchen jene geraden Linien liegen, sind dann:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0.$$

Setzt man in der Gleichung:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 - E(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 0$$
$$A = B = 1, \quad B = E = k,$$

so erhält man in:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k(\gamma^3 - (\alpha+\beta+\gamma)^3) + D\delta^3 = 0$$

die Gleichung einer Fläche mit zwei biplanaren Knotenpunkten, welche auch auf die Form:

$$\delta^3 + pK = 0$$

gebracht werden kann, wo $\delta = 0$ und $p = 0$ Ebenen darstellen, sowie $K = 0$ einen Kegel zweiten Grades, der seinen Scheitel in der Ebene $p = 0$ hat.

Wird endlich:

$$A = B = C = E$$

gesetzt, so erhält man eine Fläche mit drei biplanaren Knotenpunkten, deren Gleichung man auch zu:

$$\delta^3 + pqr = 0$$

vereinfachen kann. Bei dieser und der vorigen Fläche gehen sämmtliche Geraden durch einen oder zwei der Knotenpunkte; sie können uns daher zunächst nicht weiter interessiren.

Um schliesslich eine Fläche zu erhalten, welche einen uniplanaren Knotenpunkt besitzt und auf welcher sich die drei geraden Linien, die durch denselben nicht gehen, in einem Punkte treffen, ist es nur nöthig, bei einer Fläche, deren Gleichung sich auf die Summe von vier Cuben reduciren lässt, zwei Tetraederebenen zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung einer Fläche dieser Art ist von der Form:

$$\alpha^2\beta + \gamma^3 + \delta^3 = 0.$$

Die Coordinaten des uniplanaren Knotenpunktes sind $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$; die Berührungsebene desselben ist $\alpha=0$ und die Ebene der drei übrigen geraden Linien $\beta=0$.

9. Die Berührungspunkte sämmtlicher Tangentialebenen, welche man von dem Punkte:

$$\gamma=\delta=\varepsilon=0$$

der Fläche

$$\alpha^3+\beta^3+k\gamma^3+l\delta^3+m\varepsilon^3=0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=0)$$

aus an dieselbe legen kann, liegen in der Ebene:

$$\alpha-\beta=0,$$

welche mit der Berührungsebene der Fläche in jenem Punkte zusammen die erste Polare des bezeichneten Punktes in Bezug auf die Fläche bildet. In dieser Ebene liegt daher auch der Berührungspunkt jeder Tangentialebene, welche durch eine der in jenem Punkte sich schneidenden geraden Linien der Fläche an dieselbe gelegt werden kann. Es gilt daher der Satz:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades drei in einer Ebene liegende Gerade derselben in einem Punkte schneiden, so liegen die Berührungspunkte der 12 Tangentialebenen der Fläche, deren jede durch eine jener Geraden geht, in einer Ebene.

Ebenso ist die Umkehrung dieses Satzes richtig:

Wenn die Berührungspunkte von vier der Tangentialebenen, welche man durch eine auf einer Fläche dritten Grades liegende gerade Linie an dieselbe legen kann, in einer Ebene liegen, so schneidet die fünfte Tangentialebene die Fläche in weiteren zwei geraden Linien, welche jene Linie in dem nämlichen Punkte treffen.

Wenn dagegen unter den 5 Ebenen, welche im Allgemeinen durch eine Gerade einer Fläche dritten Grades so gelegt werden können, dass sie die Fläche in weiteren zwei Geraden durchschneiden, zwei sind, für welche der Durchschnittspunkt der letzteren auf die ursprüngliche Gerade fällt, was z. B. bei der Fläche:

$$\alpha^3+\beta^3+k(\gamma^3+\delta^3)+l\varepsilon^3=0$$

bei den beiden durch die Gerade:

$$\alpha+\beta=0,\quad \gamma+\delta=0$$

gehenden Ebenen:

$$\alpha+\beta=0,$$
$$\gamma+\delta=0$$

eintritt, *so liegen die Berührungspunkte der drei übrigen Ebenen in einer Geraden,* hier:

$$\alpha-\beta=0,\quad \gamma-\delta=0.$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes, welche sich sehr leicht bilden lässt, ist richtig.

10. Zu den Lehrsätzen des vorigen § kann man auch auf die folgende Weise gelangen:

Nach der dritten Steiner'schen Erzeugungsweise der Fläche dritten Grades (vergl. Sturm, Synthetische Unterschungen von Flächen dritter Ordnung, § 10. und 11.) ist dieselbe der geometrische Ort für die Berührungscurven aller Tangentialkegel, welche man von einem bestimmten Punkte aus an die Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung legen kann.

Wählt man nun die vier Scheitel des Tetraeders, welches in Bezug auf alle Flächen des Büschels sich selbst conjugirt ist (zugleich die Scheitel der vier zu dem Büschel gehörigen Kegel), zu Eckpunkten des Fundamentaltetraeders, so ist die Gleichung des Büschels von der Form:

$$m\alpha^2 + n\beta^2 + p\gamma^2 + q\delta^2 + k(m_1\alpha^2 + n_1\beta^2 + p_1\gamma^2 + q_1\delta^2) = 0.$$

Ist ferner der Scheitel des Tangentialkegels gegeben durch:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = A : B : C : D,$$

so ist die Gleichung des Büschels, welches von den Polarebenen desselben in Bezug auf die Flächen zweiter Ordnung gebildet wird:

$$Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta + k(Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta) = 0.$$

Der geometrische Ort der Durchschnittscurven entsprechender Flächen beider Büschel ist dann die Fläche dritten Grades:

$$(m\alpha^2 + n\beta^2 + p\gamma^2 + q\delta^2)\,(Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta)$$
$$= (m_1\alpha^2 + n_1\beta^2 + p_1\gamma^2 + q_1\delta^2)\,(Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta).$$

Auf dieser Fläche liegt die Schnittlinie:

$$Am\alpha + Bn\beta + Cp\gamma + Dq\delta = 0,$$
$$Am_1\alpha + Bn_1\beta + Cp_1\gamma + Dq_1\delta = 0$$

der Ebenen des Polarbüschels; ferner sind die vier Fundamentalpunkte, sowie der Scheitel der Tangentialkegel die 5 Berührungspunkte der Ebenen, welche durch jene Gerade gehend, die Fläche noch anderweit berühren und somit aus derselben noch je zwei Gerade ausschneiden. Soll nun jene Gerade durch einen Fundamentalpunkt, z. B. $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ gehen, so dass sich in diesem Punkte dann drei gerade Linien der Fläche schneiden, so muss eine der Grössen A, B u. s. w., z. B. A verschwinden, d. h. der Berührungspunkt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = 0 : B : C : D$$

muss in einer Tetraederebene liegen. Liegen umgekehrt vier Berührungspunkte in einer Ebene, so verschwindet eine jener Constanten und die

Schnittlinie der Polarebenen geht durch eine Tetraederecke. Hieraus aber ergeben sich ohne Weiteres die Lehrsätze des vorigen §.

11. Auch die Hesse'sche Fläche der Fläche dritten Grades:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,$$

auf welcher sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, besitzt eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Die Gleichung jener Fläche ist:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0.$$

Bekanntlich enthält die Hesse'sche Fläche die 10 Pentaederkanten und besitzt längs jeder derselben eine einzige Tangentialebene. Eine dieser Ebenen ist nun die folgende:

$$\alpha + \beta = 0.$$

Dieselbe berührt die Hesse'sche Fläche längs der Kante:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

und durchschneidet sie ausserdem in einer Linie zweiten Grades, welche auf dem Kegel:

$$\frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0$$

liegen, und, da jene Ebene durch den Scheitel dieses Kegels geht, in zwei gerade Linien zerfallen muss. Es gilt daher der Satz:

Wenn sich drei gerade Linien einer Fläche dritten Grades in einem Punkte treffen, so berührt die Ebene dieser Geraden die Hesse'sche Fläche längs einer Pentaederkante und durchschneidet dieselbe in zwei geraden Linien.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese geraden Linien nur dann mit zwei von den zugleich in jener Ebene liegenden drei geraden Linien der Fläche dritten Grades zusammenfallen, wenn:

$$k^{-\frac{1}{2}} + l^{-\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

also wenn nach § 7. die Fläche zwei Knotenpunkte besitzt. In diesem Falle aber fallen die zwei betreffenden Linien selbst zusammen und bilden die Verbindungslinie der Doppelpunkte. *Hat daher eine Fläche dritten Grades zwei Knotenpunkte, so wird ihre Hesse'sche Fläche durch diejenige Diagonalebene des Pentaeders, in welcher diese Punkte liegen, längs zweier geraden Linien berührt.*

12. Unter der *Polarfläche einer Ebene E* in Bezug auf eine beliebige Fläche versteht man bekanntlich den geometrischen Ort aller Punkte, deren erste Polarflächen jene Ebene berühren oder auch die Umhüllende der Polarebenen aller Punkte, welche in *E* liegen. Für eine beliebige Fläche dritten Grades und eine beliebige Ebene ist diese Polarfläche im Allgemeinen eine Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten (vergl. u. A. Sturm, § 39.). Beide Erklärungen liefern jedoch nur

so lange genau das nämliche Resultat, als E keine der 20 Ebenen ist, in welche die Polarflächen der 10 Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche in Bezug auf die Fläche dritten Grades zerfallen. Ist dagegen E eine dieser Ebenen, so besteht die Umhüllende der sämmtlichen Polarebenen, deren Pole in E liegen, in einem einzigen Punkt, dem zu E gehörigen Pol. Liegt nämlich ein Punkt in der ersten Polare eines andern, so liegt umgekehrt dieser in der Polarebene von jenem. Da nun z. B. die erste Polarfläche des Punktes:

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

in Bezug auf die Fläche:

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0$$

in zwei Ebenen zerfällt, so muss umgekehrt die Polarebene jedes Punktes, der in einer dieser beiden Ebenen liegt, durch jenen Punkt gehen.

Erklärt man dagegen die Polarfläche der Ebene E als Ort eines Punktes, so ergiebt sich für dieselbe unter der für E gemachten Voraussetzung ein Kegel dritten Grades, welcher den vorher erhaltenen Punkt zum Scheitel hat.

Ist nun die Fläche dritten Grades eine solche, auf welcher sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und ist E die Ebene dieser Linien, so zerfällt dieser Kegel in jene Ebene und in einen Kegel zweiten Grades, der den Schnittpunkt jener geraden Linien zum Scheitel hat.

Sei die Gleichung der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0,$$

also

$$\alpha + \beta = 0$$

die Gleichung der fraglichen Ebene. Dann ist die erste Polarfläche eines beliebigen Punktes (α_1, β_1 u. s. w.) in Bezug auf die Fläche gegeben durch:

$$\alpha^2\alpha_1 + \beta^2\beta_1 + k\gamma^2\gamma_1 + l\delta^2\delta_1 + m\varepsilon^2\varepsilon_1 = 0.$$

Die Durchschnittslinie dieser Fläche mit jener Ebene hat die Gleichung:

$$\alpha^2(\alpha_1+\beta_1) + \gamma^2(k\gamma_1+m\varepsilon_1) + \delta^2(l\delta_1+m\varepsilon_1) + 2m\varepsilon_1\gamma\delta = 0$$

und muss, falls die Fläche und die Ebene sich berühren sollen, in zwei gerade Linien zerfallen. Die Bedingung, unter welcher dies geschieht, also die Gleichung der zur Ebene E gehörigen Polarfläche, ist:

$$(\alpha_1+\beta_1)\left[\frac{1}{k\gamma_1} + \frac{1}{l\delta_1} + \frac{1}{m\varepsilon_1}\right] = 0.$$

Diese Fläche zerfällt also, wie bereits oben gesagt wurde, in die gegebene Ebene selbst und in den Kegel zweiten Grades:

$$\frac{1}{k\gamma_1} + \frac{1}{l\delta_1} + \frac{1}{m\varepsilon_1} = 0,$$

welcher die Hesse'sche Fläche in ihrem Knotenpunkte $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ berührt.

Die ersten Polarflächen aller Punkte in der Ebene:

$$\alpha + \beta = 0$$

berühren dieselbe, also auch sich gegenseitig, in dem Punkte, in welchem sich die drei in jener Ebene liegenden Geraden der Fläche dritten Grades schneiden. Dagegen liegen die Punkte, in welchen die ersten Polarflächen aller Punkte der Kegelfläche:

$$\frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0$$

die nämliche Ebene berühren, sämmtlich in der Pentaederkante $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Die Ebene und die Kegelfläche durchschneiden sich in zwei geraden Linien, welche nach dem vorigen § zugleich auf der Hesse'schen Fläche liegen. Die Polarflächen aller Punkte dieser geraden Linien werden demnach Kegel sein, die jene Ebene längs einer geraden Linie berühren; die Berührungslinien gehen dabei sämmtlich durch den nämlichen Punkt.

Wählt man die Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

zur Ebene E, so ergiebt eine ähnliche Rechnung, wie die vorige, als die Polarfläche dieser Ebene den Kegel dritten Grades:

$$\frac{4}{\alpha+\beta} + \frac{1}{k\gamma} + \frac{1}{l\delta} + \frac{1}{m\varepsilon} = 0\,.$$

Auch dieser hat eine einfache Bedeutung. Er ist nämlich der Hesse'sche Kegel zu dem Kegel dritten Grades, welchen man vom Punkte $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ aus berührend an die Fläche legen kann, und dessen Gleichung ist:

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{4} + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0.$$

13. Wir werden uns im Nachstehenden etwas eingehender mit einigen der interessantesten unter den betrachteten Flächen beschäftigen und zwar zunächst mit denjenigen Flächen, auf welchen sich *sechsmal* drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, und deren Gleichung wir stets in der Form:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + k\varepsilon^3 = 0$$

oder:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 = 0$$

voraussetzen wollen. *Für diese Flächen hängt das Problem des Pentaeders mit demjenigen der 27 geraden Linien so zusammen, dass, falls das erstere gelöst ist, das letztere nur die Auflösung von quadratischen Gleichungen erforderlich macht.*

Die sechs Ebenen:

$$\alpha+\beta=0,\quad \alpha+\gamma=0,\quad \alpha+\delta=0,$$
$$\beta+\gamma=0,\quad \beta+\delta=0,\quad \gamma+\delta=0$$

sind für diese Flächen diejenigen, in welchen die jedesmaligen sich in einem Punkte treffenden drei geraden Linien liegen; die sechs Durchschnittspunkte von je drei geraden Linien sind bestimmt durch:

$$\alpha=-\beta,\quad \gamma=0,\quad \delta=0 \text{ u. s. w.},$$

und liegen somit sämmtlich in der Pentaederebene:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0.$$

Sie sind in derselben die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits und zwar desjenigen, welches aus ihr durch die vier übrigen Pentaederebenen ausgeschnitten wird. Die Diagonalen dieses Vierseits:

$$\alpha+\beta=0,\quad \gamma+\delta=0,$$
$$\alpha+\gamma=0,\quad \beta+\delta=0,$$
$$\alpha+\delta=0,\quad \beta+\gamma=0$$

gehören vollständig der Fläche an. Somit gilt der folgende Satz:

Wenn sich auf einer Fläche dritten Grades sechsmal, aber im Allgemeinen nicht öfter, drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, so bilden die sechs Schnittpunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits und liegen in einer Pentaederebene, während die drei Diagonalen in der Fläche selbst liegen.

Sobald das Pentaeder reell ist, sind selbstverständlich diese drei Diagonalen auch reell; die übrigen 12 betheiligten geraden Linien, von denen die in:

$$\alpha+\beta=0$$

liegenden durch die Gleichung:

$$\gamma^2-\gamma\delta+\delta^2-k(\gamma+\delta)^2=0$$

oder:

$$(\gamma+\delta)^2(1-k)-3\gamma\delta=0$$

dargestellt werden, sind es dagegen nur, sobald:

$$k>\tfrac{1}{4}.$$

Für

$$k=\tfrac{1}{4}$$

fallen je zwei gerade Linien zusammen; die Fläche ist dann die mehrfach erwähnte Fläche dritten Grades mit vier Knotenpunkten.

14. Bei der Untersuchung unserer Fläche, insbesondere bei der Aufsuchung der 12 geraden Linien, welche ausser den in § 13. nachgewiesenen 15 Linien sich noch auf der Fläche vorfinden, sind etliche andere Gleichungen derselben, welche sich bei Zugrundelegung anderer Fundamentaltetraeder ergeben, von besonderem Nutzen.

Wählt man die 4 Ebenen:

$$\begin{aligned} X &= -\alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \\ Y &= \alpha-\beta+\gamma+\delta=0, \\ Z &= \alpha+\beta-\gamma+\delta=0, \\ W &= \alpha+\beta+\gamma-\delta=0 \end{aligned}$$

zu Fundamentalebenen, so ergiebt sich durch eine leichte Rechnung als Gleichung der Fläche in Bezug auf das neue Tetraeder:

$$(4k-1)(X+Y+Z+W)^3+12(YZW+ZWZ+WXY+XYZ)=0.$$

Das Tetraeder ist hier ein solches, dessen sechs Kanten mit der Fläche je drei zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich haben; die sechs Berührungspunkte liegen in einer Ebene. Die letztere Eigenschaft kommt allen Tetraedern der gedachten Art auch bei der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu, da sich die Gleichung einer solchen auf unendlich viele Weisen auf die Form bringen lässt:

$$Ap^3+Brst+Cstq+Dtqr+Eqrs=0,$$

wo $p=0$, $q=0$ u. s. w. die Gleichungen von Ebenen sind. Werden dagegen die vier Ebenen:

$$\begin{aligned} X &= \alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \\ Y &= \alpha+\beta-\gamma-\delta=0, \\ Z &= \alpha-\beta+\gamma-\delta=0, \\ W &= \alpha-\beta-\gamma+\delta=0 \end{aligned}$$

zu Fundamentalebenen gewählt, so geht die Flächengleichung über in

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)+6YZW=0.$$

Besonders einfach gestaltet sich die Gleichung derjenigen Fläche, für welche:

$$k=\frac{1}{16},$$

einer Fläche mit einem Knotenpunkte. Diese und die sich für:

$$k=\frac{1}{4}$$

ergebende Fläche mit vier Knotenpunkten sind die einzigen in dem Büschel:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3-k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=0$$

enthaltenen Flächen mit Knotenpunkten. Die Flächen dieses Büschels osculiren sich übrigens sämmtlich längs der drei Diagonalen des auf der Ebene:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

durch die vier übrigen Pentaederebenen ausgeschnittenen vollständigen Vierseits.

15. Wir legen im Folgenden die gefundene Gleichung:

$$X^3(1-16k)+3X(Y^2+Z^2+W^2)+6YZW=0$$

zu Grunde und untersuchen, welche unter den durch die auf der Fläche liegende gerade Linie:

$$X=0,\quad Y=0$$

gelegten Ebenen

$$X=lY$$

die Fläche noch in einem Geradenpaare schneiden. Substituirt man diesen Werth von X in die Gleichung der Fläche, so erhält man:

$$l^3Y^2(1-16k)+3l(Y^2+Z^2+W^2)+6ZW=0.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen einen Kegelschnitt dar, der aber in fünf Fällen in zwei gerade Linien zerfällt. Diese sind:

1) $l=0$. Es ergiebt sich hierbei die schon mehrfach erwähnte, die Fläche in drei geraden Linien schneidende Ebene $X=0$.

2) $l=\pm 1$. Man erhält hier die in § 13. besprochenen geraden Linien. Die Gleichungen derselben sind übrigens unter Zugrundelegung der neuen Coordinaten, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{16k-4}{3}}=f$$

setzt, die folgenden:

$$\begin{aligned} X=&\quad Y,\quad fY+Z+W=0;\\ X=&\quad Y,\quad fY-Z-W=0;\\ X=&-Y,\quad fY+Z-W=0;\\ X=&-Y,\quad fY-Z+W=0. \end{aligned}$$

3) Zwei gerade Linien erhält man endlich auch, wenn:

$$l^2(1-16k)+3=0,$$

also

$$l=\pm\sqrt{\frac{3}{16k-1}}.$$

Die zwei hierdurch bestimmten Ebenen, welche aber nur reell sind, sobald

$$k>\frac{1}{16},$$

schneiden die Fläche in je zwei geraden Linien, deren Schnittpunkte nicht mehr, wie im zweiten Falle, auf der Kante $X=0$, $Y=0$, sondern auf der gegenüberliegenden Kante $Z=0$, $W=0$ liegen. Die Gleichungen dieser beiden Geraden sind:

$$l(Y^2+Z^2)+2WZ=0.$$

Wird nun, wie im Folgenden stets geschehen soll:

$$\sqrt{\frac{3}{16k-1}}=l,$$

$$\frac{-1+\sqrt{1-l^2}}{l} = \frac{\sqrt{16k-4}-\sqrt{16k-1}}{\sqrt{3}} = f - \frac{1}{l} = \varrho$$

gesetzt, so sind die Gleichungen der vier auf der Fläche liegenden geraden Linien, welche hiernach noch die Gerade $X=0$, $Y=0$ schneiden:

$$\begin{aligned} X &= lY, & Z &= \varrho W, \\ X &= lY, & W &= \varrho Z, \\ X &= -lY, & Z &= -\varrho W, \\ X &= -lY, & W &= -\varrho Z. \end{aligned}$$

Ein reelles Pentaeder vorausgesetzt, sind diese Geraden nur reell, wenn

$$k > \tfrac{1}{4}.$$

In gleicher Weise erhält man vier gerade Linien, welche der Geraden $X=0$, $Z=0$, und vier weitere, welche $X=0$, $W=0$ begegnen; die jetzt gefundenen 12 und die bereits früher nachgewiesenen 15 geraden Linien machen die 27 Geraden der Fläche aus.

16. Die 12 Geraden des vorigen § lassen sich in folgender Weise in zwei Gruppen von je sechs Linien zerlegen:

$$\begin{aligned} &X = lY, \quad Z = \varrho W; && X = -lY, \quad W = -\varrho Z; \\ &X = -lY, \quad Z = -\varrho W; && X = lY, \quad W = \varrho Z; \\ &X = lZ, \quad W = \varrho Y; && X = -lZ, \quad Y = -\varrho W; \\ &X = -lZ, \quad W = -\varrho Y; && X = lZ, \quad Y = \varrho W; \\ &X = lW, \quad Y = \varrho Z; && X = -lW, \quad Z = -\varrho Y; \\ &X = -lW, \quad Y = -\varrho Z. && X = lW, \quad Z = \varrho Y. \end{aligned}$$

Bei dieser Zusammenstellung durchschneidet jede Gerade der einen Gruppe die übrigen Geraden derselben Gruppe und die nebenstehende Gerade der andern Gruppe nicht; dagegen durchschneidet sie die übrigen 5 Geraden der andern Gruppe. Die 12 geraden Linien bilden daher das, was Schläfli zuerst eine *Doppelsechs* genannt hat und es gilt somit der Satz:

Schneiden sich auf einer Fläche dritten Grades sechsmal drei gerade Linien in einem Punkte, so sind hierbei 15 *gerade Linien der Fläche betheiligt und die* 12 *unbetheiligten Linien bilden eine Doppelsechs.*

Die übrigen 35 Doppelsechsen der Fläche enthalten theils gerade Linien der einen, theils solche der andern Art.

17. Die 45 Dreiecksebenen, welche die Fläche besitzt, theilen sich in zwei Gruppen. Bei der ersten Gruppe, welche 30 Ebenen umfasst, sind in jeder Ebene zwei Gerade der eben gefundenen Doppelsechs und eine weitere von den 15 übrigen Linien enthalten; bei der zweiten Gruppe liegen in jeder Ebene drei von diesen 15 Geraden.

Zu der ersten Gruppe gehören die sechs Ebenen:

$$X = \pm lY, \quad X = \pm lZ, \quad X = \pm lW,$$

und ausser ihnen noch 24 weitere Ebenen, von denen durch jede der 12 Geraden der Doppelsechs vier gehen. Die durch die Gerade:

$$X = lY, \quad Z = \varrho W$$

z. B. gehenden vier Ebenen sind, wie sich sehr leicht aus dem vorigen § ergiebt:

$$\begin{aligned} X - lY + lZ - l\varrho W &= 0, \\ X - lY - lZ + l\varrho W &= 0, \\ X - lY - l\varrho^{-1} Z + lW &= 0, \\ X - lY + l\varrho^{-1} Z - lW &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung einer jeder von diesen 24 Ebenen kann überhaupt auf die eine oder die andere der beiden nachstehenden Formen gebracht werden:

$$\begin{aligned} X \pm l(P+Q) + l\varrho^{\pm 1} R &= 0, \\ X + l(P-Q) + l\varrho^{\pm 1} R &= 0, \end{aligned}$$

wobei P, Q, R mit den drei Werthen Y, Z, W, nur in beliebiger Aufeinanderfolge, übereinstimmen.

Die zweite Gruppe von 15 Ebenen enthält zunächst die Ebene

$$X = 0,$$

sodann die sechs Ebenen:

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

und endlich 8 weitere Ebenen, von denen durch jede der 12 geraden Linien, die in den letzteren Ebenen ausser ihren Durchschnittslinien mit $X = 0$ noch liegen, zwei gehen. Die Gleichungen dieser acht Ebenen sind:

$$\begin{aligned} (1 \pm f) X + P + Q - R &= 0, \\ (1 \pm f) X - Y - Z - W &= 0. \end{aligned}$$

Geht man zu den früheren Coordinaten zurück, so stellt sich heraus, dass die Gleichungen der oben zusammengestellten 24 Ebenen sämmtlich die Form:

$$2(p+q+lr-ls) \pm fl(p+q-r-s) = 0,$$

diejenigen der letzten 8 Ebenen dagegen die andere:

$$2(p+q+r-s) \pm f(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$$

haben, wobei die Grössen p, q, r, s die vier Coordinaten in beliebiger Reihenfolge darstellen.

Es würde in gleicher Weise nicht schwer sein, die Coordinaten aller 135 Eckpunkte der 45 auf der Fläche liegenden Dreiecke zu finden.

18. Die in den vorigen § ausgeführten Rechnungen sind unter Anderem auch aus dem Grunde von Wichtigkeit, weil sich mit Hülfe derselben leicht die Frage nach der Realität der auf der Fläche liegenden 27 geraden Linien und der zugehörigen Dreiecksebenen entscheiden lässt. Die Untersuchung wird sich dabei nicht allein auf den oben nahezu erledigten Fall zu beschränken haben, in welchem die sämmtlichen vier Ebenen α, β, γ, δ reell sind, da auch in gewissen Fällen bei imaginären Ebenen reelle Flächen hervorgehen. Man erhält solche überhaupt in folgenden drei Fällen:

I. Sämmtliche vier Ebenen α, β, γ, δ sind reell.

II. Zwei Ebenen sind reell, die übrigen conjugirt imaginär.

III. Die vier Ebenen sind paarweise conjugirt imaginär.

In jedem dieser drei Fälle ist die Ebene X reell; die übrigen sind im ersten Falle auch sämmtlich reell; im zweiten Falle sind zwei conjugirt imaginär und die dritte ist reell, z. B.

$$Y = L + Mi = 0\,,$$
$$Z = L - Mi = 0\,.$$

Im dritten Falle endlich sind zwar auch sämmtliche Ebenen Y, Z, W reell, aber die Gleichungen von zweien unter ihnen erscheinen mit einem rein imaginären Factor multiplicirt, z. B.

$$Y = Li = 0,$$
$$Z = Mi = 0.$$

Nach § 15. werden wir sodann zu unterscheiden haben, ob die Grösse k grösser ist als $\frac{1}{4}$, ob sie zwischen $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{16}$ liegt, oder ob sie endlich kleiner ist als $\frac{1}{16}$. Die beiden Grenzfälle $k = \frac{1}{4}$ und $k = \frac{1}{16}$ liefern Flächen mit resp. vier oder einem Knotenpunkt, welche sogenannte binäre Geradè besitzen. Wir untersuchen diese beiden Fälle hier nicht näher und nur den zweiten später.

Die für die Grössen l, ϱ und f gegebenen Bestimmungsgleichungen zeigen, dass für

$$k > \frac{1}{4}$$

l, ϱ und f reell, für

$$\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$$

l reell, ϱ complex und f imaginär und für

$$k < \frac{1}{16}$$

l, ϱ und f imaginär sind. Wir gehen nun die einzelnen möglichen Fälle der Reihe nach durch.

I. *Sämmtliche Ebenen α, β, γ, δ, und somit auch die vier Ebenen X, Y, Z, W sind reell.*

A. $k > \frac{1}{4}$. Sämmtliche 27 gerade Linien und die 45 Dreiecksebenen sind reell.

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$. Reell sind nur drei gerade Linien, nämlich diejenigen, welche in der Ebene $X = 0$ liegen; von den Dreiecksebenen sind 13 reell, und zwar die Ebene $X = 0$, die sechs Ebenen

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

sowie die weiteren sechs Ebenen

$$X = \pm lY, \quad X = \pm lZ, \quad X = \pm lW.$$

C. $k < \frac{1}{16}$. Reell sind wieder die nämlichen drei Geraden, wie unter B.; von den Dreiecksebenen sind ausser der Ebene $X = 0$ nur die folgenden 6:

$$X = \pm Y, \quad X = \pm Z, \quad X = \pm W,$$

also im Ganzen 7 reell.

II. *Die zwei Ebenen α und β sind reell, die beiden anderen γ und δ conjugirt imaginär.* Alsdann sind auch die beiden Ebenen

$$X = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$
$$Y = \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0$$

reell, die beiden anderen dagegen

$$Z = \alpha - \beta + \gamma - \delta = 0,$$
$$W = \alpha - \beta - \gamma + \delta = 0$$

conjugirt imaginär, also

$$Z = L + Mi = 0,$$
$$W = L - Mi = 0.$$

A. $k > \frac{1}{4}$. Reell sind nur die drei geraden Linien:

$$X = 0, \quad Y = 0;$$
$$X = Y, \quad fY + Z + W = 0,$$
$$X = Y, \quad fY - Z - W = 0,$$

welche in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte durchschneiden.

Von den Dreiecksebenen sind 13 reell, nämlich die folgenden:

$$X = 0,$$
$$X = \pm Y,$$
$$X = \pm lY,$$
$$X + l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z + W) = 0;$$
$$(1 \pm f)X - Y + Z + W = 0;$$
$$(1 \pm f)X - Y - Z - W = 0.$$

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$. Reell sind 7 gerade Linien, nämlich ausser den drei folgenden:

$$X = 0, \qquad X = 0,$$
$$X = -Y, \quad fY + Z - W = 0,$$
$$X = -Y, \quad fY - Z + W = 0,$$

noch die vier in den Ebenen

$$X = \pm lY$$

liegenden Linien. Die letzteren sind es, weil wegen

$$\varrho = f - \frac{1}{l}$$

z. B. die Gleichung

$$Z = -\varrho W$$

übergeht in

$$L\left(1 + f - \tfrac{1}{l}\right) + Mi\left(1 - f + \tfrac{1}{l}\right) = 0,$$

woraus durch Multiplication mit

$$1 - f - \frac{1}{l}$$

entsteht:

$$L\left(1 - \tfrac{2}{l} + \tfrac{1}{l^2} - f^2\right) + Mi\left(1 - 2f + f^2 - \tfrac{1}{l^2}\right) = 0.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{1}{l^2} - f^2 = 1,$$

weshalb diese Gleichung sich vereinfacht zu:

$$L\left(\tfrac{1}{l} - 1\right) + fMi = 0.$$

Diese Gleichung ist aber reell, weil l reell und f rein imaginär ist. Unter den Dreiecksebenen sind 5 reelle vorhanden, nämlich:

$$X = 0, \quad X = \pm W, \quad X = \pm lW.$$

C. $k < \frac{1}{16}$. Reell sind die drei unter B. zuerst aufgeführten geraden Linien, sowie die 7 Dreiecksebenen:

$$X = 0,$$
$$X = \pm Y,$$
$$X - l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z - W) = 0.$$

III. *Die Ebenen α und β, sowie γ und δ sind conjugirt imaginär.* Alsdann sind zwar sämmtliche vier Ebenen X, Y, Z, W reell, aber zwei von ihnen, nämlich Z und W, enthalten in ihren Gleichungen einen auszuscheidenden rein imaginären Factor, also

$$Z = Li = 0,$$
$$W = Mi = 0.$$

A. $k > \frac{1}{4}$. Reell sind 7 gerade Linien, nämlich die drei in $X = 0$ liegenden und die vier, welche sich in den beiden Ebenen

$$X = \pm lY$$

vorfinden. Von den Dreiecksebenen sind die folgenden 5 reell:

$$X = 0, \quad X = \pm Y, \quad X = \pm lY.$$

B. $\frac{1}{4} > k > \frac{1}{16}$. Reell sind wieder 7 gerade Linien, nämlich die die drei Linien in $X = 0$ und die vier in den Ebenen

$$X = \pm Y,$$

reell sind ferner die nämlichen 5 Dreiecksebenen, wie unter A.

C. $k < \frac{1}{16}$. Reell sind 15 gerade Linien, nämlich die drei in $X = 0$, die vier in $X = \pm Y$, sowie 8 Gerade der in § 16. erwähnten Doppelsechs. Reell sind ferner 15 Ebenen, und zwar:

$$X = 0,$$
$$X = \pm Y,$$
$$X = \pm lZ,$$
$$X = \pm lW,$$
$$X + l\varrho^{\pm 1} X \pm l(Z + W) = 0,$$
$$X - l\varrho^{\pm 1} Y \pm l(Z - W) = 0.$$

Man erkennt somit, dass sämmtliche von Schläfli gefundenen 5 Arten von Flächen 3. Grades auch unter den betrachteten speciellen Flächen vertreten sind. Es haben sich ergeben die Art:

I. (27 Gerade und 45 Ebenen reell) in I. A.
II. (15 Gerade und 15 Ebenen reell) in III. C.
III. (7 Gerade und 5 Ebenen reell) in II. B., III. A. und B.
IV. (3 Gerade und 13 Ebenen reell) in I. B. und II. A.
V. (3 Gerade und 7 Ebenen reell) in I. C. und II. C.

19. Wir haben bereits früher (§ 11.) dargethan, dass jede Ebene, welche aus einer Fläche dritten Grades drei sich in einem Punkte treffende gerade Linien ausschneidet, ihre Hesse'sche Fläche längs einer Pentaederkante berührt und in zwei geraden Linien durchschneidet. Auf der Hesse'schen Fläche, welche zu der in den letzten § betrachteten Fläche gehört, liegen daher ausser den 10 Pentaederkanten noch 12 gerade Linien, die sich zu je zweien in einer Pentaederecke durchschneiden. Damit man diese Linien bequem untersuchen könne, ist es zweckmässig, auch in die Gleichung der Hesse'schen Fläche

$$k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 1$$

die neuen Coordinaten X, Y, Z, W einzuführen. Geschieht dies, oder bestimmt man die Gleichung der Hesse'schen Fläche direct aus der Gleichung der Fläche dritten Grades, so erhält man:

$$(1-16k)X[X^3-X(Y^2+Z^2+W^2)+2WYZ]+Y^4+Z^4+W^4$$
$$-2(Y^2Z^2+Z^2W^2+W^2Y^2)-X^2(Y^2+Z^2+W^2)+6XYZW=0.$$

Wird nun in dieser Gleichung

$$X=Y$$

gesetzt, so geht hervor:

$$-(1-16k)Y^2(Z-W)^2+(Z^2-W^2)^2-3Y^2(Z-W)^2=0.$$

Diese Gleichung, welche durch $(Z-W)^2$ theilbar ist, zeigt, dass die durch $X=Y$ dargestellte Ebene die Hesse'sche Fläche längs der geraden Linie

$$X=Y,\quad Z=W$$

berührt und überdies in der Curve

$$(16k-4)Y^2+(Z+W)^2=0,$$

d. i. in zwei geraden Linien durchschneidet, deren Gleichungen getrennt

$$fY\sqrt{-3}+Z+W=0,$$
$$fY\sqrt{-3}-Z-W=0$$

sind. Die Gleichungen der 12 geraden Linien, welche hiernach auf der Fläche ausser den Pentaederkanten liegen, sind auf eine der folgenden Formen zu bringen:

$$X=P,\qquad \pm fP\sqrt{-3}+Q+R=0;$$
$$X=-P,\quad \pm fP\sqrt{-3}+Q-R=0,$$

wo P, Q, R die aus § 17. bekannte Bedeutung haben.

Jede dieser 12 Geraden durchschneidet fünf andere, ohne dass sich deshalb dieselben zu einer Art Doppelsechs zusammenstellen lassen. Sie geben Veranlassung zu sechs Ebenen, den bereits betrachteten

$$X=\pm P,$$

in denen je zwei, und zu acht Ebenen, in denen je drei dieser Linien liegen.

Die Gleichungen dieser letzteren Ebenen können auf die eine oder die andere der beiden folgenden Formen gebracht werden:

$$(1\pm fi\sqrt{3})X+P+Q-R=0,$$
$$(1\pm fi\sqrt{3})X-Y-Z-W=0.$$

Bemerkenswerth ist, dass bei einem reellen Pentaeder die 12 geraden Linien der Hesse'schen Fläche imaginär sind, sobald die in den mehrfach erwähnten sechs Ebenen liegenden geraden Linien der Fläche

dritten Grades reell sind und umgekehrt. Die fraglichen 12 geraden Linien der Fläche

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3-k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=0$$

fallen mit den 12 Geraden der Hesse'schen Fläche

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}-\frac{3}{(k-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}=0$$

zusammen, denn f ist für die erste Fläche genau dasselbe, was $fi\sqrt{3}$ für die zweite Fläche ist. Beide Flächen durchschneiden sich daher in 12 geraden Linien.

20. Jede gerade Linie, welche auf einer Fläche n^{ten} Grades liegt, berührt die Hesse'sche Fläche in sämmtlichen Punkten, welche sie mit derselben gemeinschaftlich hat, also in $2(n-2)$ Punkten. Für die Fläche dritten Grades sind die sich auf diese Weise ergebenden 54 Punkte von Steiner mit dem Namen *„Asymptotenpunkte"* bezeichnet worden.

Die Bestimmung dieser Punkte ist eine sehr einfache für diejenigen geraden Linien, welche in einer Diagonalebene des Pentaeders liegen. Jede dieser Linien geht durch eine Ecke des Pentaeders und schneidet die gegenüberliegende Kante desselben; es sind daher, da die Kanten und Ecken des Pentaeders der Hesse'schen Fläche angehören, jene Ecke und jener Schnittpunkt die Asymptotenpunkte der betreffenden geraden Linie.

Für die übrigen 12 geraden Linien der Fläche wird am zweckmässigsten die Rechnung benutzt. Substituirt man z. B. in die Gleichung der Hesse'schen Fläche

$$X=lY,\quad Z=\varrho W$$

und reducirt hinreichend, indem man besonders die Identität

$$l^2(1-16k)=-3$$

benutzt, so erhält man schliesslich

$$(lY^2-\varrho W^2)^2=0,$$

so dass für die beiden Asymptotenpunkte jener geraden Linie

$$Y\sqrt{l}\pm W\sqrt{\varrho}=0$$

ist. Genau dieselbe Bestimmungsgleichung würde man für die beiden Asymptotenpunkte der Linie

$$X=-lY,\quad Z=-\varrho W$$

erhalten.

Die Coordinaten für die beiden Asymptotenpunkte der zuerst betrachteten geraden Linie sind hiernach gegeben durch die beiden Proportionen:

$$X:Y:Z:W=1:l^{-1}:\quad l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{1}{2}}:\quad l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{-\frac{1}{2}},$$
$$X:Y:Z:W=1:l^{-1}:-l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{\frac{1}{2}}:-l^{-\frac{1}{2}}\varrho^{-\frac{1}{2}}.$$

Geht man von den neuen Coordinaten zu den alten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ über, so findet man für den ersten Asymptotenpunkt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \frac{(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{-\frac{1}{2}})(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{1}{2}})}{4} : \frac{(l^{-\frac{1}{2}}-\varrho^{-\frac{1}{2}})(l^{-\frac{1}{2}}-\varrho^{\frac{1}{2}})}{4}$$
$$: \frac{(\varrho^{-\frac{1}{2}}-l^{-\frac{1}{2}})(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{1}{2}})}{4} : \frac{(l^{-\frac{1}{2}}+\varrho^{-\frac{1}{2}})(\varrho^{\frac{1}{2}}-l^{-\frac{1}{2}})}{4}.$$

Für den anderen Asymptotenpunkt ergeben sich die nämlichen Werthe, nur dass $l^{\frac{1}{2}}$ darin negativ zu setzen ist. Bemerkenswerth ist, dass das Product aus je zwei gleichbenannten Coordinaten der beiden Asymptotenpunkte einer und derselben geraden Linie constant ist und zwar gleich k. Die vier oben gefundenen Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kann man als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung auffassen. Bildet man diese Gleichung wirklich, so erhält man das einfache Resultat:

$$x^4 - x^3 + \frac{2k+1}{3} x^2 - kx + k^2 = 0,$$

also eine Gleichung, welche sich als eine reciproke Gleichung allgemeinerer Art auffassen lässt. Das besonders Eigenthümliche an dieser Gleichung ist aber, dass diese Gleichung weder l noch ϱ enthält und dass sie sich also ebenfalls ergeben würde, wenn man die Coordinaten irgend eines andern Asymptotenpunktes als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung auffassen wollte. Die 24 Asymptotenpunkte, um deren Bestimmung es sich handelte, sind danach gegeben durch

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = p : q : r : s,$$

worin p, q, r und s die vier Wurzeln der oben aufgestellten biquadratischen Gleichung in beliebiger Aufeinanderfolge bedeuten.

Zu jeder Wurzel giebt es eine andere, welche mit ihr multiplicirt das Product k giebt; der Punkt

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = kp^{-1} : kq^{-1} : kr^{-1} : ks^{-1}$$

liefert mit dem durch die vorhergehende Proportion bestimmten Punkt verbunden eine gerade Linie der Fläche.

Für $k = 1$, d. i. für die zuerst von Clebsch untersuchte Diagonalfläche, wird die biquadratische Gleichung:

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

und die Grössen p, q, r, s werden fünfte Wurzeln der Einheit. Wir kommen auf diesen Fall später ausführlicher zurück.

Für die allgemeinere Fläche liegen, da für jeden der 24 Asymptotenpunkte

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1,$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{2k+1}{3},$$

diese Punkte sämmtlich auf der Fläche zweiten Grades:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{4k-1}{3}\varepsilon^2 = 0$$

oder

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + f^2\varepsilon^2 = 0,$$

wo f die frühere Bedeutung hat.

Ebenso liegen dieselben auf der Fläche dritten Grades

$$\beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta + \alpha\beta\gamma = k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3,$$

welche nach § 14. von derselben Art ist wie die ursprüngliche Fläche.

21. Zwei Flächen der von uns betrachteten Art wollen wir *conjugirt* nennen, wenn die Ebenen α, β, γ, δ der einen bei der andern durch die Ebenen

$$-\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0 \text{ u. s. w.}$$

ersetzt, die Coefficienten k aber für beide Flächen gleich sind. Es ist somit die zu

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 = 0$$

conjugirte Fläche bestimmt durch

$$(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 + (\alpha-\beta+\gamma+\delta)^3 + (\alpha+\beta-\gamma+\delta)^3 + (\alpha+\beta+\gamma-\delta)^3 = 8k(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3.$$

Durch Einführung der Coordinaten X, Y, Z, W gehen diese Gleichungen über in

$$X^3(1-16k) + 3X(Y^2+Z^2+W^2) + 6YZW = 0$$

und

$$X^3(1-16k) + 3X(Y^2+Z^2+W^2) - 6YZW = 0.$$

Man erkennt somit, da beide Gleichungen nur in dem Vorzeichen des letzten Gliedes verschieden sind, dass die Durchschnittslinie beider Flächen in den drei Ebenen

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad W = 0$$

liegen muss. Jede dieser drei Ebenen schneidet aber eine jede der beiden Flächen in einer geraden Linie und in einem Kegelschnitt; der gegenseitige Durchschnitt der beiden conjugirten Flächen besteht hiernach aus drei geraden Linien, welche in der Ebene

$$X = 0$$

liegen und ein Dreieck bilden, und aus drei Kegelschnitten, welche auf der Fläche zweiten Grades

$$X^2(1-16k) + 3(Y^2+Z^2+W^2) = 0$$

oder

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \frac{8k+1}{6}\varepsilon^2 = 0$$

liegen. Die sechs Ebenen, deren jede aus der Fläche dritten Grades drei sich in einem Punkte treffende gerade Linien schneidet, sind für die beiden conjugirten Flächen dieselben.

Auch die Hesse'schen Flächen der beiden conjugirten Flächen sind nur wenig in ihren Gleichungen verschieden, indem diese nur in dem Vorzeichen des Gliedes $XYZW$ differiren. Beide Gleichungen sind nämlich

$$(1-16k)X[X^3-X(Y^2+Z^2+W^2)\pm 2YZW]+Y^4+Z^4+W^4$$
$$-2(Y^2Z^2+Z^2W^2+W^2Y^2)-X^2(Y^2+Z^2+W^2)\pm 6XYZW=0.$$

Sonach liegt der gesammte Durchschnitt der beiden Hesse'schen Flächen in den vier Ebenen

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\quad W=0.$$

Der in der ersteren Ebene liegende Theil besteht aus den vier geraden Linien

$$Y\pm Z\pm W=0,$$

welche nichts Anderes sind, als die Seiten des auf der Ebene $X=0$ durch die vier Ebenen α, β, γ, δ ausgeschnittenen vollständigen Vierseits. Die in den übrigen drei Ebenen Y, Z und W enthaltenen Theile der Durchschnittslinie sind Curven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten. Für den speciellen Fall

$$k=\frac{1}{4}$$

werden die Gleichungen der beiden Hesse'schen Flächen vollständig identisch, da hier der Coefficient von $XYZW$ verschwindet; *die beiden conjugirten Flächen besitzen somit dieselbe Hesse'sche Fläche.*

22. Clebsch hat im 65. Bande von Crelle's Journal von der Grassmann'schen Erzeugungsweise der Flächen dritten Grades ausgehend analytisch gezeigt, wie eine solche Fläche eindeutig auf eine Ebene abgebildet werden kann, d. h. so, dass jedem Punkte der Fläche ein einziger Punkt der Ebene und umgekehrt entspricht. Später hat er im 5. Bande der mathematischen Annalen rein geometrische Mittel für die Ausführung dieser Abbildung gegeben.

Sind nämlich A und B zwei gerade Linien auf der Fläche dritten Grades, welche sich nicht treffen, und ist C eine gerade Linie der Fläche, welche A und B durchschneidet, so geschieht die Abbildung auf eine beliebige Ebene, welche durch C geht und die projicirende Linie irgend eines Punktes der Fläche ist die Gerade, welche durch diesen Punkt geht und A und B durchschneidet. — Ausser der Linie C giebt es noch vier gerade Linien, welche sowohl A als auch B durchschneiden; für jeden Punkt einer derartigen Linie ist diese selbst die projicirende Gerade, so dass sich diese vier geraden Linien als Punkte abbilden. Ferner bilden sich auch diejenigen zwei Linien als Punkte ab, welche mit A und C, resp. mit B und C ein Dreieck bilden, und zwar liegen die Bilder da, wo resp. B und A der Bildebene begegnen.

Die vier geraden Linien, welche weder A noch B durschneiden, bilden sich als Kegelschnitte ab, da für sie der geometrische Ort der projicirenden Linien ein Hyperboloid ist. Auch die zwei Linien A und B bilden sich als Kegelschnitte ab, da z. B. die geraden Linien, welche die Fläche dritten Grades in einem Punkte von A berühren und zugleich die Linie B durchschneiden, ein Hyperboloid bilden. Die 12 Geraden nun, welche sich in Punkten und Kegelschnitten abbilden, lassen sich stets zu einer Doppelsechs gruppiren, so dass die sich in Punkten abbildenden die eine Hälfte, die übrigen die andere Hälfte derselben ausmachen. Daraus geht ohne Weiteres hervor, dass jeder Kegelschnitt fünf der Fundamentalpunkte enthält, da ja jede Gerade der einen Sechs 5 Gerade der anderen Sechs durchschneidet. Die übrigen 15 geraden Linien der Fläche bilden sich als gerade Linien ab, deren jede zwei der 6 Fundamentalpunkte verbindet.

Wählt man nun für die Abbildung der in den letzten § betrachteten speciellen Fläche dritten Grades die beiden Geraden A und B aus derselben Hälfte der schon mehrfach erwähnten Doppelsechs, so ergeben sich sechs Fundamentalpunkte, welche die specielle Eigenschaft besitzen, dass sechsmal je drei ihrer Verbindungslinien sich in einem Punkte schneiden, *dass sie also sechsmal in verschiedener Reihenfolge zu einem Brianchon'schen Sechseck angeordnet werden können.*

Legt man bei der Abbildung eine andere Doppelsechs zu Grunde, so bekommen die Fundamentalpunkte eine vollständig andere Lage zu einander; es werden sich dann weniger als sechsmal drei gerade Verbindungslinien derselben in einem Punkte schneiden, dafür wird einigemal ein Kegelschnitt, welcher durch 5 Fundamentalpunkte geht, durch eine Gerade berührt, welche einen dieser Punkte mit dem sechsten Fundamentalpunkt verbindet.

23. Wir wenden uns nun der Untersuchung einiger speciellen Flächen zu und betrachten zunächst *die Fläche dritten Grades mit einem Knotenpunkte, auf welcher sich sechsmal drei unäre* (nicht durch den Knotenpunkt gehende) *gerade Linien in einem Punkte treffen.* (Vergl. § 7. und 14.) Dieselbe entspricht dem speciellen Werthe $k = \frac{1}{16}$ und hat somit die Gleichung

$$16(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3) - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3 = 0,$$

oder, wenn die Coordinaten X, Y, Z, W eingeführt werden:

$$X(Y^2+Z^2+W^2) + 2YZW = 0.$$

Bemerkenswerth ist die Fläche zunächst wegen eines einfachen Zusammenhanges mit der *Steiner'schen Fläche.* In einem Aufsatze, welcher zuerst im Programme der Realschule zu Reichenbach 1869 und später im Auszuge im 5. Bande der mathematischen Annalen veröffent-

licht worden ist, habe ich für räumliche Gebilde diejenige Transformation untersucht, welche man erhält, wenn man in der homogenen Gleichung eines Gebildes die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Es ist dies, beiläufig bemerkt, dieselbe Transformation, welche Cayley als *Inversion der Coordinaten* bezeichnet und in einem Aufsatze, welcher der neuesten Auflage von Salmon's analytischer Geometrie der höheren ebenen Curven einverleibt worden ist, mit besonderem Erfolge bei der Untersuchung der Curven vierten Grades mit drei Doppelpunkten verwendet hat. Wird diese Transformation in der obigen Gleichung vorgenommen, so erhält man

$$Y^2Z^2 + Z^2W^2 + W^2Y^2 + 2XYZW = 0,$$

also die Gleichung einer Steiner'schen Fläche, welche die Schnittlinien der drei Ebenen Y, Z und W als Doppellinien besitzt. Aus der bekannten Eigenthümlichkeit dieser Fläche, durch jede Tangentialebene in zwei Kegelschnitten getroffen zu werden, lässt sich ohne Schwierigkeit auch eine Eigenschaft unsrer Fläche dritten Grades ableiten, die allerdings nicht ihr allein zukommt.

Bei Anwendung der oben angegebenen Transformation entspricht im Allgemeinen einer beliebigen Ebene eine Fläche dritten Grades, welche die vier Fundamentalpunkte zu Knotenpunkten hat. Einem beliebig im Raume liegenden Kegelschnitt entspricht im Allgemeinen eine Curve sechsten Grades, welche in den vier Fundamentalpunkten Doppelpunkte besitzt. Sobald aber der Kegelschnitt eine Kante des Fundamentaltetraeders schneidet, so erniedrigt sich der Grad der entsprechenden Curve um 1, während die beiden Endpunkte derjenigen Kante, welche der getroffenen gegenüber liegt, nur einfache Punkte der Curve sind. Wenn daher der Kegelschnitt drei in einem Punkte zusammenstossende Kanten des Tetraeders trifft, so entspricht ihm eine Curve dritten Grades, welche jenen Punkt zum Doppelpunkt haben und daher eben sein muss. Da nun die zwei Kegelschnitte, in welchen die Steiner'sche Fläche durch eine Tangentialebene geschnitten wird, die drei Doppelgeraden der Fläche schneiden, so ergiebt sich aus vorstehenden Betrachtungen der Satz:

Jede Fläche dritten Grades, welche die vier Ecken des Tetraeders X, Y, Z, W zu Knotenpunkten hat und dabei unsere Fläche berührt, durchschneidet dieselbe zugleich in zwei ebenen Curven dritten Grades mit einem Doppelpunkte (und in drei geraden Linien). *Vier derartige Flächen giebt es, welche unsere Fläche längs einer Curve dritten Grades berühren.*

Diese Eigenschaft gilt, wie bereits oben gesagt, auch für eine allgemeinere Classe von Flächen dritten Grades, nämlich für diejenigen, deren Gleichung sich auf die Form bringen lässt:

$$XK + YZW = 0,$$

wo $K = 0$ die Gleichung eines Kegels zweiten Grades ist, welcher die Ecke $Y = 0$, $Z = 0$, $W = 0$ zum Scheitel hat. Diese Classe aber umfasst alle Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte, da die Gleichung einer derartigen Fläche sich sofort auf die obige Form bringen lässt, sobald man nur zur Ebene X eine Dreiecksebene wählt, welche allein unäre Gerade enthält, und zu den Ebenen Y, Z, W diejenigen Ebenen, welche diese drei Linien mit dem Knotenpunkte verbinden.

Da es 15 Dreiecksebenen giebt, welche nur unäre Gerade enthalten, so giebt es auch 15 Schaaren von Flächen dritten Grades mit vier Knotenpunkten, welche die oben erwähnte Eigenschaft besitzen.

24. Die sechs Geraden der einen Hälfte der in § 16. erwähnten Doppelsechs fallen mit den sechs Geraden der andern Hälfte zusammen und gehen sämmtlich durch den Knotenpunkt, welcher durch

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

bestimmt ist. Es sind dies die sogenannten *binären geraden Linien* der Fläche, und jede von ihnen vertritt die Stelle von zwei Geraden. Sie liegen zu je zweien in den drei Ebenen Y, Z, W vertheilt und haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y = 0, &\quad Z \pm Wi = 0, \\ Z = 0, &\quad Y \pm Wi = 0, \\ W = 0, &\quad Y \pm Zi = 0, \end{aligned}$$

wo

$$i = \sqrt{-1}.$$

Die 15 übrigen geraden Linien der Fläche sind diejenigen, in welchen die 15 durch je zwei binäre Gerade zu legenden Ebenen der Fläche weiter begegnen. Drei davon sind die Linien in $X = 0$; die Gleichungen der übrigen 12 lassen sich sämmtlich auf die Form bringen:

$$p + q = 0, \quad i(r+s) + 2(r-s) = 0,$$

wo p, q, r, s die vier Coordinaten α, β, γ, δ in beliebiger Reihenfolge bedeuten. Bei Entscheidung der Frage nach der Realität der 21 auf der Fläche liegenden geraden Linien hat man dieselben drei Fälle zu unterscheiden, wie bei der allgemeinen Fläche.

1) Die vier Ebenen α, β, γ, δ, also auch die Ebenen X, Y, Z, W sind reell. Dann können nur drei unäre Gerade reell sein, nämlich diejenigen in der Ebene $X=0$. Der Knoten ist also isolirt und sein Tangentialkegel ist imaginär. Die Fläche enthält 10 reelle Dreiecksebenen, von denen drei, weil in ihnen zwei binäre Gerade liegen, doppelt zu zählen sind; sie ist daher ein besonderer Fall der Flächen mit drei reellen geraden Linien und 13 reellen Dreiecksebenen.

2) Sind α und β conjugirt imaginär, also

$$\alpha = \varphi + \psi i = 0,$$
$$\beta = \varphi - \psi i = 0,$$

so sind X und Y reell, Z und W dagegen conjugirt imaginär:

$$Z = L + Mi = 0,$$
$$W = L - Mi = 0,$$

Von den binären Geraden sind die in $Y=0$ liegenden reell, da

$$Z \pm Wi = (L \pm M)(1 + i).$$

Reell sind ferner die unären Geraden

$$X = 0, \quad Y = 0;$$
$$\gamma + \delta = 0, \quad i(\alpha+\beta) \pm 2(\alpha-\beta) = 0.$$

Die Fläche ist daher ein specieller Fall der Flächen mit 7 reellen geraden Linien. Der Knoten ist reell, ebenso sein Tangentialkegel.

3) Sind α und β, sowie γ und δ conjugirt imaginär, so sind X und Y reell und Z und W ebenfalls, die Gleichungen der letzteren aber mit einem rein imaginären Factor multiplicirt, also

$$Z = Li = 0, \quad W = Mi = 0.$$

Auf der Fläche

$$X(Y^2 - L^2 - M^2) - 2LMY = 0$$

sind dann vier binäre Gerade reell, nämlich die in $L=0$ und $M=0$ liegenden, reell sind ferner die drei unären Geraden in $X=0$ und die vier Geraden in den Ebenen

$$\alpha + \beta = 0$$

und

$$\gamma + \delta = 0.$$

Die Fläche gehört danach zu denen mit 15 reellen geraden Linien; ihr Knoten ist reell, wie derjenige im vorigen Falle.

25. Die eindeutige Abbildung auf eine Ebene geschieht bei den Flächen dritten Grades mit einem Knotenpunkte bekanntlich durch Centralprojection vom Knotenpunkte aus. Alsdann entsprechen den sechs binären Geraden der Fläche sechs Punkte der Ebene, die in einem Kegelschnitt liegen. Dieser ist die Spur des im Knotenpunkte an die Fläche gelegten Tangentialkegels und kann somit als Bild des Knotenpunktes selbst angesehen werden. Die 15 unären Geraden bilden sich ab als die Verbindungslinien der Fundamentalpunkte.

Für unsere specielle Fläche dritten Grades schneiden sich diese Verbindungslinien sechsmal zu je dreien in einem Punkte, und es geht daher der bemerkenswerthe Satz hervor: *In jedem Kegelschnitte kann man sechs Punkte so wählen, dass sich dieselben sechsmal zu einem*

Brianchon'schen Sechseck verbinden lassen. Auf welche Weise sechs derartige Punkte zu finden sind, ergiebt sich sehr leicht durch folgende Betrachtung:

Die Spuren der drei Ebenen Y, Z und W auf der Bildebene durchschneiden den Kegelschnitt in den sechs Fundamentalpunkten. Nun ist aber das von jenen Ebenen gebildete Trieder in Bezug auf den Tangentialkegel des Knotenpunktes, da dessen Gleichung

$$Y^2 + Z^2 + W^2 = 0$$

ist, sich selbst conjugirt; folglich besitzt die nämliche Eigenschaft auch das von den Spuren jener Ebenen gebildete Dreieck in Bezug auf den erwähnten Kegelschnitt. *Um daher sechs Punkte in gedachter Lage zu erhalten, durchschneide man den Kegelschnitt durch die Seiten eines in Bezug auf denselben sich selbst conjugirten Dreiecks; die sechs Durchschnittspunkte besitzen die fragliche Eigenschaft.* Freilich ist hierbei zu bemerken, dass niemals sämmtliche sechs Punkte, sondern höchstens vier derselben reell sein können.

Die Fläche

$$X(Y^2+Z^2+W^2) - 2\,YZW = 0,$$

welche wir in § 21. die conjugirte Fläche zu

$$X(Y^2+Z^2+W^2) + 2\,YZW = 0$$

genannt haben, hat mit der letzteren die sechs binären Geraden, sowie die drei Linien in der Ebene $X = 0$ gemeinschaftlich; die geraden Linien beider Flächen werden sich daher als dieselben Punkte und Linien abbilden.

26. Die Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 = 0,$$

wo

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0,$$

auf welcher sich nach § 4. die 27 Geraden 10mal zu je dreien in einem Punkte schneiden, ist von Clebsch im 4. Bande der mathematischen Annalen näher untersucht und die *Diagonalfläche* des Pentaeders

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

genannt worden. Diese Benennung stützt sich auf die Eigenschaft der betreffenden Fläche, dass in ihr die Diagonalen der sämmtlichen vollständigen Vierecke enthalten sind, die auf den Pentaederebenen durch die übrigen ausgeschnitten werden. Denn die Gleichung der Fläche und die zwischen den 5 Coordinaten bestehende Relation werden, da die Summe zweier Cuben stets durch die Summe der Basen theilbar ist, z. B. erfüllt, wenn:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \delta + \varepsilon = 0.$$

Diese drei Gleichungen, von denen die eine eine Folge der beiden andern ist, stellen aber eine gerade Linie dar, welche den Punkt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

mit dem andern:

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0$$

verbindet, also eine Diagonale einer Seitenfläche des Pentaeders. In gleicher Weise liegen auf der Fläche die gleichfalls in der Ebene $\alpha = 0$ befindlichen geraden Linien:

$$\alpha = 0, \quad \beta + \delta = 0, \quad \gamma + \varepsilon = 0,$$
$$\alpha = 0, \quad \beta + \varepsilon = 0, \quad \gamma + \delta = 0.$$

Ausser der Fläche, deren Gleichung oben angegeben ist, geht durch die 15 Diagonalen der Seitenflächen des Pentaeders keine weitere Fläche dritten Grades, da diese sonst mit jener 15 gerade Linien gemeinsam haben müsste, was unmöglich ist; die Diagonalfläche ist daher durch das Pentaeder vollständig bestimmt.

Bemerkt mag werden, dass man die Gleichung der nämlichen Fläche auch noch in folgender Form schreiben kann:

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon = 0.$$

Ausser den 15 Diagonalen enthält die Fläche noch 12 weitere gerade Linien, welche eine Doppelsechs bilden. Die Gleichungen derselben können aus § 16. direct entnommen werden, wenn man noch folgende Werthe der dort vorkommenden Constanten berücksichtigt:

$$f = 2, \quad l = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \varrho = 2 - \sqrt{5}.$$

Man wird dann z. B. durch geeignete Combination der zwei Gleichungen:

$$X = lY, \quad Z = \varrho W$$

finden, dass die hierdurch dargestellte gerade Linie der Durchschnitt der 5 Ebenen ist:

$$\omega(\gamma + \varepsilon) + \alpha = 0,$$
$$\omega(\delta + \varepsilon) + \beta = 0,$$
$$\omega(\alpha + \delta) + \gamma = 0,$$
$$\omega(\beta + \gamma) + \delta = 0,$$
$$\omega(\alpha + \beta) + \varepsilon = 0,$$

wobei

$$\omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Clebsch hat diese 12 geraden Linien auf folgende sehr einfache Weise gefunden, indem er zuerst ihre Asymptotenpunkte bestimmte.

Die 3 Gleichungen:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\,\varepsilon=0\,,$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3=0\,,$$
$$\beta\gamma\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon\alpha+\delta\varepsilon\alpha\beta+\varepsilon\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\delta=0\,,$$

von denen die erste die zwischen den Coordinaten bestehende Relation, die zweite die Gleichung der Diagonalfläche, die dritte die Gleichung ihrer Hesse'sche Fläche darstellt, werden sämmtlich erfüllt, sobald man für die 5 Coordinaten die verschiedenen fünften Wurzeln der Einheit setzt, also:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=q_1:q_2:q_3:q_4:q_5\,,$$

wobei die Grössen q eben diese Wurzeln in beliebiger Reihenfolge sind. Da dann auch die Grössen $\frac{1}{q}$ sämmtliche fünfte Wurzel der Einheit darstellen, so folgt, dass auch der Punkt:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=q_1^{-1}:q_2^{-1}:q_3^{-1}:q_4^{-1}:q_5^{-1}$$

auf der Diagonalfläche und der Hesse'schen Fläche liegt. Die Verbindungslinie der beiden durch diese Proportionen dargestellten Punkte gehört dann aber auch ganz der Diagonalfläche an, denn die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Verbindungslinie sind, wenn k und l beliebige Constanten bedeuten, bestimmt durch:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon=kq_1+lq_1^{-1}:kq_2+lq_2^{-1}:\cdots\cdots$$

und der Gleichung der Diagonalfläche wird genügt, sobald in derselben diese Werthe eingeführt werden, da:

$$\Sigma\left(kq_n+lq_n^{-1}\right)^3=(k^3+l^3)\,\Sigma q_n^3+3kl\,(k+l)\,\Sigma q_n=0\,.$$

Es giebt nun 24 verschiedene Punkte, deren Coordinaten sich wie die fünften Wurzeln der Einheit verhalten, also giebt es 12 gerade Linien der eben gefundenen Art und jene 24 Punkte sind, da sie zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, ihre Asymptotenpunkte.

27. Die Dreiecksebenen der Fläche zerfallen in zwei Gruppen. Die eine umfasst die 5 Pentaederebenen und die 10 Diagonalebenen und enthält daher nur solche Ebenen, in welchen nur Diagonalen liegen; die andere dagegen besteht aus 30 Ebenen, deren jede eine Diagonale und zwei der eben bestimmten 12 Linien enthält. Die Gleichungen der letzteren sind von der Form:

$$w\,(p+q)+r=0\,,$$

wo p, q, r drei der Coordinaten α, β u. s. w. sind und:

$$w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Man könnte sie auch auf die Form bringen:

$$w_1 (p+q) - r = 0 ,$$

wobei aber

$$w_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} .$$

Je zwei dieser Ebenen gehen durch dieselbe Diagonale; und zwar stellen die beiden aufgestellten Gleichungen zwei derartige Ebenen dar, wenn in beiden für p, q und r dieselben Coordinaten eingeführt werden.

Die Anzahl der reellen geraden Linien auf der Diagonalfläche kann direct aus § 18. abgelesen werden, da hier offenbar die dortige Constante:

$$k > \frac{1}{4}$$

ist. Es ergiebt sich daraus: *Sind sämmtliche Pentaederebenen reell, so sind auch sämmtliche* 27 *geraden Linien reell*; *sind drei Pentaederebenen reell und die übrigen conjugirt imaginär, so hat die Fläche* 3 *reelle gerade Linien und* 13 *reelle Dreiecksebenen*; *ist endlich nur eine Ebene des Pentaeders reell, während die andern paarweise conjugirt imaginär sind, so hat die Fläche* 7 *reelle gerade Linien.*

Legt man bei der Abbildung der Fläche die mehrerwähnte Doppelsechs zu Grunde, so erhält man, mag man von der einen oder der andern Hälfte derselben ausgehen, die sechs Fundamentalpunkte in der Lage, *dass sie sich* 10*mal zu einem Brianchon'schen Sechseck verbinden lassen.* Die Existenz derartiger, auch vollständig reeller Sechsecke ist durch die Existenz der Diagonalfläche bedingt; Clebsch hat in der bereits citirten Arbeit gezeigt, dass sämmtliche Sechsecke dieser Art aus einander durch Centralprojection abgeleitet werden können.

28. Wir wenden uns endlich zu der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0 ,$$

auf welcher nach § 6. sich 18mal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Die 27 geraden Linien dieser Fläche ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung derselben; sie lassen sich in drei Gruppen zusammenstellen und zwar so, dass die 9 Geraden jeder Gruppe die gegenseitigen Durchschnittslinien zweier Büschel von je drei Ebenen sind, nämlich:

$$\alpha^3 + \beta^3 = 0 , \quad \gamma^3 + \delta^3 = 0 ,$$
$$\alpha^3 + \gamma^3 = 0 , \quad \beta^3 + \delta^3 = 0 ,$$
$$\alpha^3 + \delta^3 = 0 , \quad \beta^3 + \gamma^3 = 0 .$$

Die Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

kann natürlich auch hier als die fünfte Pentaederebene angesehen werden; da aber die Gleichung der Fläche sich nicht ändert, wenn α mit

$\alpha\mu'$, β mit $\beta\mu''$ u. s. w. vertauscht wird, wo die Grössen μ dritte Wurzeln der Einheit bedeuten, so sieht man, dass man jene Ebene überhaupt durch eine der Ebenen:

$$\alpha\mu + \beta\mu' + \gamma\mu'' + \delta\mu''' = 0$$

ersetzen kann, wo die Grössen μ beliebige dritte Wurzeln der Einheit sind. Wie nun die Ebene:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

drei gerade Linien der Fläche, und zwar:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = 0, \quad \gamma + \delta = 0, \\ \alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \delta = 0, \\ \alpha + \delta = 0, \quad \beta + \gamma = 0 \end{aligned}$$

enthält, so gilt das Gleiche auch für jede dieser Ebenen, deren Gesammtzahl 27 ist. Diese 27 Ebenen bilden mit den 18 anderen, welche zu den sechs oben erwähnten Büscheln gehören, *die* 45 *Dreiecksebenen der Fläche.*

Der Flächengleichung wird ebenfalls genügt, sobald man setzt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = v : v' : v'' : v''',$$

wo zwei der Grössen v dritte Wurzeln der positiven Einheit, die anderen aber solche der negativen Einheit bedeuten. Durch die nämliche Substitution werden aber auch stets die Gleichungen zweier gerader Linien der Fläche identisch, so dass die durch obige Proportionen dargestellten Punkte für unsere Fläche die *Eckpunkte von Liniendreiecken* sind. Es giebt $3^4 = 81$ derartige Punkte; fügt man hierzu die 18 Schnittpunkte von je drei geraden Linien der Fläche, jeden dreifach gerechnet, so erhält man sämmtliche 135 Ecken der auf der Fläche liegenden Dreiecke.

Die Asymptotenpunkte jeder geraden Linie der Fläche liegen offenbar da, wo dieselbe zwei gegenüberstehende Kanten des von den vier Ebenen α, β, γ, δ gebildeten Tetraeders trifft.

29. Die Anzahl der reellen geraden Linien der Fläche ergiebt sich unmittelbar aus § 18. *Die Fläche hat demnach, wenn die vier Ebenen α, β, γ, δ reell oder wenn nur zwei derselben reell und die beiden übrigen conjugirt imaginär sind,* 3 *reelle Gerade und* 7 *reelle Dreiecksebenen, sind aber die vier Ebenen paarweise conjugirt imaginär, so sind* 15 *gerade Linien reell.*

Unter den 27 geraden Linien der Fläche ist im Allgemeinen keine vor den übrigen ausgezeichnet; gleiches gilt von den 36 Doppelsechsen. Es wird daher völlig gleichgiltig sein, welcher Sechs man sich bei der Abbildung bedient. Eine der Doppelsechsen ist die folgende, bei welcher wir entsprechende Gerade neben einander gestellt und mit entsprechen-

den Ziffern versehen haben und unter μ eine beliebige dritte Wurzel der Einheit verstehen:

1)	$\alpha\mu + \delta = 0$, $\beta\mu + \gamma = 0$.	I)	$\alpha + \gamma\mu = 0$, $\beta + \delta\mu = 0$.
2)	$\alpha + \delta\mu = 0$, $\beta + \gamma\mu = 0$.	II)	$\alpha\mu + \gamma = 0$, $\beta\mu + \delta = 0$.
3)	$\alpha\mu + \beta = 0$, $\gamma\mu + \delta = 0$.	III)	$\alpha + \delta\mu = 0$, $\gamma + \beta\mu = 0$.
4)	$\alpha + \beta\mu = 0$, $\gamma + \delta\mu = 0$.	IV)	$\alpha\mu + \delta = 0$, $\gamma\mu + \beta = 0$.
5)	$\alpha\mu + \gamma = 0$, $\delta\mu + \beta = 0$.	V)	$\alpha + \beta\mu = 0$, $\delta + \gamma\mu = 0$.
6)	$\alpha + \gamma\mu = 0$, $\delta + \beta\mu = 0$.	VI)	$\alpha\mu + \beta = 0$, $\delta\mu + \gamma = 0$.

Wird die erste Hälfte dieser Doppelsechs bei der Abbildung der Fläche zu Grunde gelegt, so bilden sich bekanntlich die Geraden derselben als Punkte, die Geraden der andern Hälfte dagegen als Kegelschnitte ab, welche durch fünf dieser Punkte gehen (I durch 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w.). Die übrigen 15 geraden Linien der Fläche finden dagegen ihre Abbildung in den 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte und zwar in folgender Weise:

12)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma + \delta = 0$.
13)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta\mu + \gamma = 0$.
14)	$\alpha\mu + \delta = 0$,	$\beta\mu + \gamma = 0$.
15)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta + \delta\mu = 0$.
16)	$\alpha + \gamma\mu = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
23)	$\alpha + \delta\mu = 0$,	$\beta + \gamma = 0$.
24)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta + \gamma\mu = 0$.
25)	$\alpha\mu + \gamma = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
26)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta\mu + \delta = 0$.
34)	$\alpha + \gamma = 0$,	$\beta + \delta = 0$.
35)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma\mu + \delta = 0$.
36)	$\gamma + \delta = 0$,	$\alpha\mu + \beta = 0$.
45)	$\gamma + \delta = 0$,	$\alpha + \beta\mu = 0$.
46)	$\alpha + \beta = 0$,	$\gamma + \delta\mu = 0$.
56)	$\alpha + \delta = 0$,	$\beta + \gamma = 0$.

Die 27 geraden Linien der Fläche durchschneiden sich aber 18mal zu je dreien in einem Punkte und die Lage der 6 Fundamentalpunkte ist dadurch besonderen Bedingungen unterworfen. Untersucht man genauer, so findet man, dass sich 6mal drei gerade Linien in einem Punkte treffen, welche sich ebenfalls als gerade Linien abbilden, und 12mal solche Linien, von denen sich die eine als Punkt, die andere als Kegelschnitt und die dritte als gerade Linie abbilden. Im ersteren Falle müssen sich dann selbstverständlich auch die drei Abbildungen

in einem Punkte schneiden, während im zweiten Falle die gerade Linie den Kegelschnitt in dem betreffenden Punkte berühren muss. Ohne Schwierigkeit findet man, dass sich in einem Punkte die folgenden neben einander stehenden Linien treffen:

12, 35, 46;
12, 36, 45;
34, 15, 26;
34, 16, 25;
56, 13, 24;
56, 14, 23;

so dass drei Linien zweimal, die übrigen dagegen nur einmal betheiligt sind.

Die übrigen 12 Bedingungen lassen sich in folgende 6 zusammenziehen:

1 ist der Pol von 56 in Bezug auf I;
2 „ „ „ „ 56 „ „ „ II;
3 „ „ „ „ 12 „ „ „ III;
4 „ „ „ „ 12 „ „ „ IV;
5 „ „ „ „ 34 „ „ „ V;
6 „ „ „ „ 34 „ „ „ VI.

Ist die zweite Gruppe von Bedingungen erfüllt, so ist es die erste von selbst, da ausser der vorliegenden keine Fläche dritten Grades existirt, auf welcher sich 12mal drei gerade Linien in einem Punkte treffen.

Auch bei dieser Fläche können nie sämmtliche sechs Fundamentalpunkte zu gleicher Zeit reell sein.

30. Durch die Untersuchungen von Geiser (Math. Annalen Bd. I) ist es möglich geworden, aus den Lehrsätzen über die 27 geraden Linien einer Fläche dritten Grades solche über die 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades abzuleiten. An dem angegebenen Orte ist nämlich folgender Lehrsatz erwiesen worden: *Von einem Punkte einer Fläche dritten Grades geht ein allgemeiner Berührungskegel vierten Grades an dieselbe, dessen 28 Doppeltangentialebenen aus der Berührungsebene der Fläche im Scheitel und aus den 27 Ebenen bestehen, welche diesen mit den 27 geraden Linien der Fläche verbinden.* Indem man diesen Lehrsatz zu Grunde legt, kann man aus den in den vorigen § gefundenen Eigenschaften specieller Flächen dritter Ordnung Lehrsätze über specielle ebene Curven vierten Grades ableiten.

Es sei zunächst die Fläche eine solche, auf welcher sich nur einmal drei gerade Linien in einem Punkte schneiden, also ihre Gleichung

$$\alpha^3 + \beta^3 + k\gamma^3 + l\delta^3 + m\varepsilon^3 = 0;$$

die Lage des Kegelscheitels auf der Fläche sei eine willkürliche, ebenso diejenige der Ebene, durch welche die berührende Kegelfläche durchschnitten wird. *Dann schneiden sich vorerst in der entsprechenden Curve vierten Grades drei Doppeltangenten*, die Bilder jener drei geraden Linien der Fläche, *in einem Punkte a*. Die Ebenen, welche den Kegelscheitel mit diesen drei Linien verbinden, schneiden aus der Fläche dritten Grades drei Kegelschnitte aus, durch welche sich bekanntlich eine Fläche zweiten Grades legen lässt; die sechs Punkte, worin diese Fläche jenen drei geraden Linien begegnet, *bilden sich als die Berührungspunkte der Doppeltangenten ab, welche somit in einem Kegelschnitte A liegen*. Die Curve ist also eine solche, bei welcher drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen, sich in einem Punkte schneiden, und zwar ist sie die allgemeinste Curve dieser Art.

In dem Kegelschnitt A liegen auch noch die zwei Berührungspunkte derjenigen Doppeltangente t, welche aus der Berührungsebene im Kegelscheitel entspringt. Jene Fläche zweiten Grades schneidet nämlich aus der Fläche dritten Grades drei Kegelschnitte aus, welche sich im Kegelscheitel treffen, so dass beide Flächen in diesem eine gemeinsame Berührungsebene besitzen. Diese Ebene durchschneidet die Fläche zweiten Grades in zwei geraden Linien, die für die andere Fläche die Inflexionstangenten im Kegelscheitel darstellen und auf denen die Berührungspunkte der Doppeltangente t liegen. Hieraus geht aber die Richtigkeit obiger Behauptung unmittelbar hervor.

Durch den Punkt a gehen an die Curve noch sechs Tangenten, deren Berührungspunkte ebenfalls in einem Kegelschnitt B liegen. Verbindet man nämlich den Kegelscheitel mit dem Schnittpunkt der drei auf der Fläche liegenden geraden Linien, so durchschneidet die Verbindungslinie die Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

in einem Punkte, von welchem aus sich an die in dieser Ebene und der Fläche liegende Curve dritten Grades sechs Tangenten legen lassen, deren Berührungspunkte in der ersten Polaren jenes Punktes, also in einem Kegelschnitte liegen. Jene 6 durch a gehenden Tangenten und der Kegelschnitt B sind nun nichts Anderes als die Centralprojectionen der eben erwähnten Linien. *Auch der Kegelschnitt B geht durch die Berührungspunkte der Doppeltangente t* nach dem Satze: Wenn von den 16 Schnittpunkten zweier Curven vierter Ordnung 8 auf einem Kegelschnitte liegen, so liegen die 8 übrigen ebenfalls auf einem solchen. Man hat, um diesen Satz anwenden zu können, als zweite Curve vierten Grades nur diejenige zu wählen, welche sich aus den ersten Polaren von a in Bezug auf die erste Curve und aus der Doppeltangente t zusammensetzen lässt.

Die Curve dritten Grades selbst, welche in der Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

liegt, bildet sich wieder als eine solche ab; *die Abbildung C berührt die 6 von a ausgehenden einfachen Tangenten in ihren Berührungspunkten und geht überdies nach* § 9. *und* 10. *durch die Schnittpunkte von* 12 *Paaren von Doppeltangenten.*

31. Wesentlich ändern sich die Resultate des vorigen §, wenn der Kegelscheitel in der Curve dritten Grades liegt, welche die mehrerwähnte Ebene:

$$\alpha - \beta = 0$$

mit der Fläche gemeinsam hat. Alsdann geht die Berührungsebene der Fläche im Kegelscheitel auch durch den Schnittpunkt der drei geraden Linien auf der Fläche und *es wird somit durch die Projection a dieses Schnittpunktes noch eine vierte Doppeltangente der Curve gehen. Die Projection jener Curve dritten Grades wird zu einer geraden Linie l, so dass die Berührungspunkte der vier einfachen Tangenten, welche durch a gehen, in gerader Linie liegen.* Daraus ergiebt sich, dass die erste Polare des Punktes a in Bezug auf die Curve vierten Grades eine solche dritten Grades sein muss, welche jene gerade Linie l als Theil enthält und daher in diese und einen Kegelschnitt zerfällt. In dem letzteren liegen dann die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten, *so dass unsere Curve vierten Grades eine solche ist, von welcher sich vier Doppeltangenten, deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen, in einem Punkte treffen.* Auch sie ist eine allgemeine Curve dieser Art. *Endlich werden* 12 *Schnittpunkte von je zwei Doppeltangenten der Curve in der geraden Linie l liegen.*

Die Fälle, in welchen der Kegelscheitel auf einer oder mehreren geraden Linien der Fläche liegt und die Curve vierten Grades somit einen oder mehrere Doppelpunkte bekommt, übergehen wir und bemerken nur noch, dass die beiden in den letzten § betrachteten Curven auch aus der allgemeinen Fläche dritten Grades erhalten werden können. Eine Curve der ersten Art geht hervor, wenn man drei gerade Linien der Fläche sucht, unter denen sich zwei schneiden, durch den Schnittpunkt und einen Punkt der dritten Linie eine weitere gerade Linie zieht und den Kegelscheitel in den Punkt legt, den diese Linie fernerhin mit der Fläche gemeinsam hat. Eine Curve der zweiten Art erhält man, wenn man durch eine gerade Linie der Fläche zwei Berührungsebenen an dieselbe führt und den Kegelscheitel dahin legt, wo die Verbindungslinie der zwei Berührungspunkte die Fläche durchschneidet.

32. Auch die in § 5. und 6. untersuchten Flächen dritten Grades liefern interessante Curven dritten Grades.

Ist die Gleichung der Fläche:

$$\delta^3 + K = 0,$$

wo $\delta = 0$ eine Ebene und $K = 0$ einen Kegel dritten Grades darstellt, dessen Scheitel nicht in jener Ebene liegt, so entspricht derselben, wenn der Scheitel des Berührungskegels beliebig auf der Fläche liegt, *eine Curve vierten Grades mit sechs Inflexionstangenten, welche sich in einem Punkte schneiden.* Diese sind die Spuren derjenigen Tangentialebenen, welche durch den Kegelscheitel an den osculirenden Kegel gelegt werden können. Die sechs entsprechenden Inflexionspunkte liegen in einem Kegelschnitte; zugleich geht durch dieselben eine Curve dritten Grades, welche in ihnen von den Inflexionstangenten berührt wird. *In jedem der 9 Inflexionspunkte dieser Curve schneiden sich drei Doppeltangenten der Curve vierten Grades.* Der Kegelschnitt, in welchem 6 Inflexionspunkte liegen, geht auch durch die Berührungspunkte der 28ten Doppeltangente. Bemerkenswerth ist noch die Hesse'sche Curve der vorerwähnten Curve dritten Grades; *von jedem Punkte derselben aus kann man nämlich an die Curve vierten Grades 12 Tangenten legen, deren Berührungspunkte zu je 6 in zwei Kegelschnitten liegen.*

Wenn der Kegelscheitel in einem Punkte der Berührungscurve des Osculationskegels liegt, so hat man vorläufig nur *vier sich in einem Punkte treffende Inflexionstangenten, deren Berührungspunkte aber in gerader Linie liegen. In dieser Linie schneiden sich auch 27 Doppeltangenten der Curve neunmal zu je dreien; die 28te Doppeltangente geht ebenfalls durch den Schnittpunkt der Inflexionstangenten, sie wird aber,* da ihre beiden Berührungspunkte zusammenfallen, *zu einer dreipunktig berührenden oder undulirenden Geraden; der Undulationspunkt liegt ebenfalls auf der oben gedachten geraden Linie.*

Es sei ferner die Gleichung der Fläche:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0$$

(vergl. § 6., 28., 29.); die Lage des Kegelscheitels auf der Fläche sei willkürlich. *Alsdann lassen sich die 24 Inflexionstangenten der entsprechenden Curve vierten Grades so in vier Gruppen zu je sechs anordnen, dass die sechs Tangenten derselben Gruppe sich in einem Punkte schneiden. Durch die Berührungspunkte derselben Gruppe geht ein Kegelschnitt*; die vier so entstehenden Kegelschnitte schneiden die Curve in denselben zwei Punkten, und zwar in den Berührungspunkten der Doppeltangente, welche aus der Tangentialebene des Kegelscheitels entspringt. *Die übrigen 27 Doppeltangenten schneiden sich 18mal zu je dreien in einem Punkte; die 18 Schnittpunkte liegen zu je dreien auf den sechs Seiten des vollständigen Vierecks, welches seine Ecken in den Schnittpunkten der Inflexionstangenten hat. Von einem jeden Punkte*

dieser sechs Seiten gehen 12 *Tangenten an die Curve, deren Berührungspunkte in zwei Kegelschnitten liegen.*

Ist endlich die Gleichung der Fläche:

$$A\alpha^2\beta + \gamma^3 + \delta^3 = 0$$

(vergl. § 8.), so entspricht dem uniplanaren Knotenpunkte der Fläche ein *dreifacher Punkt* der Curve, dessen drei Tangenten die Centralprojectionen derjenigen Geraden der Fläche sind, welche sich im Knotenpunkte schneiden. Den drei übrigen geraden Linien der Fläche entsprechen *drei Doppeltangenten der Curve, sie sich in einem Punkte treffen und deren Berührungspunkte in einem Kegelschnitte liegen.*

Die Spur der Tangentialebene, welche im Kegelscheitel an die Fläche gelegt wird, ist die vierte Doppeltangente; ihre Berührungspunkte liegen in dem nämlichen Kegelschnitte. *Endlich hat die Curve sechs Inflexionstangenten, welche sich zweimal zu je dreien in einem Punkte treffen; die Verbindungslinie der Schnittpunkte geht dabei durch den dreifachen Punkt.* Die gedachten Eigenschaften kommen allen Curven vierten Grades mit einem dreifachen Punkte zu, bei welchen sich drei Doppeltangenten in einem Punkte treffen.

Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids.

Von H. Zügе in Hildesheim.

Um die Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen materiellen Punkt zu bestimmen, hat Hr. F. Grube in Hamburg eine neue Methode angewandt, bei der das Potential einer elliptischen Fläche zu Hülfe genommen wird*). Er zerlegt das Ellipsoid durch parallele Ebenen, die senkrecht auf der kleinsten Axe stehen, in unendlich dünne elliptische Scheiben, bestimmt zunächst unter Annahme des Newton'schen Gesetzes die Anziehung eines solchen Körperelements und summirt dann die Anziehungen aller. Die Anziehungscomponenten des Ellipsoids ergeben sich als einfache Integrale.

Es lag nahe, zu derselben Aufgabe Kreisschnitte zu verwenden, das Ellipsoid also in Scheiben mit kreisförmiger anstatt mit elliptischer Basis zu zerlegen. Wie aber die Bestimmung des Potentials einer elliptischen Fläche wesentliche Schwierigkeiten bereitete, so vereinfachte auch der Ausdruck für dasselbe sich nicht sehr, wenn man die Ellipse in einen Kreis übergehen liess. Erst als das Kreispotential von Herrn E. Heine in Halle a. S. direct und auf einfachere Weise abgeleitet war**), erschien die Zuhülfenahme desselben zur Bestimmung der Anziehung des Ellipsoids geeignet.

Herr E. Heine hatte die Güte, meine Aufmerksamkeit auf diese Art der Behandlung des Problems zu lenken.

Zunächst soll im Folgenden das Potential***) eines Ellipsoids, dessen Dichtigkeit wir überall gleich 1 setzen, in angedeuteter Weise ermittelt werden. Die Endformel für das Kreispotential, wie wir sie oben erwähntem Aufsatze entnehmen, enthält folgende Grössen:

---

*) Borchardt's Journal Bd. 69, S. 359—364. Ueber Anziehung eines homogenen Ellipsoids von Herrn F. Grube in Hamburg.

**) In dem Aufsatze „Das Potential eines homogenen Kreises" Borchardt's Journal Bd. 76, S. 271.

***) Der Ausdruck „Potential" soll hier und auch später nur in Bezug auf das Newton'sche Anziehungsgesetz gebraucht werden.

1. den Radius des Kreises;
2. das von dem angezogenen Punkte auf die Kreisebene gefällte Loth;
3. die Entfernung des Endpunktes dieses Lothes vom Kreismittelpunkte.

Da nun die durch parallele Ebenen erzeugten Kreisschnitte im Ellipsoid sich nicht senkrecht über einander lagern, d. h. da die Verbindungslinie der Mittelpunkte nicht senkrecht auf den Ebenen steht, so werden obige Grössen von Schnitt zu Schnitt zugleich sich ändern. Doch leuchtet auch ein, dass sie bei dieser Aenderung in gewisser Abhängigkeit von einander stehen. Es wird darauf ankommen, diese Abhängigkeit aufzusuchen, um eine Grösse zu gewinnen, nach der summirt werden kann, und dann das erhaltene Integral auf ein einfaches zurückzuführen. Schliesslich ist noch der Ausdruck des Potentials in die übliche Form zu bringen. (Abschnitt I—IV.)

Herr Mehler in seiner Arbeit über die „Anziehung einer von zwei Flächen zweiten Grades begrenzten Schaale“*), in der er die gefundenen Resultate auch speciell auf das homogene Ellipsoid überträgt, geht von vorn herein von einer Verallgemeinerung des Newton'schen Gesetzes aus, indem er die Anziehungskraft proportional der Masse und umgekehrt proportional einer beliebigen Potenz der Entfernung annimmt. Da auch mit Hülfe der Kreisschnitte die Anziehung für solche Fälle zu bestimmen ist, so soll das Verfahren, wenigstens für ganze Potenzen der Entfernung, hier angegeben und für die dritte, vierte und fünfte Potenz die Kräftefunctionen als einfache Integrale dargestellt werden (Abschnitt V. und VI.).

I.

Die Gleichung des Ellipsoids mit den Halbaxen $a\,b\,c$ in rechtwinkligen Coordinaten lautet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

und hier mag die Relation gelten

$$a>b>c.$$

Durch das Ellipsoid seien unendlich nahe parallele Ebenen gelegt, welche Kreisschnitte ergeben. Dieselben müssen bekanntlich der y-Axe parallel gehen, und derjenige Schnitt, der diese Axe selbst enthält, soll Hauptschnitt genannt werden. Von den beiden Richtungen, nach denen die Zerlegung geschehen kann, wählen wir die, bei welcher

*) Borchardt's Journal Bd. 60.

die Ebenen mit der xy-Ebene einen Winkel φ machen, dessen Tangente der Bedingung genügt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Denselben Winkel machen offenbar alle Kreis-Durchmesser, die in der xz-Ebene liegen, und derjenige, welcher zugleich durch den Coordinatenanfang geht, wird die Länge $2b$ haben. Derselbe ist auch Durchmesser der Ellipse, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Suchen wir zu ihm in der Ellipse den conjugirten Durchmesser, so ist dieser der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise*). Die Länge desselben soll mit 2α bezeichnet werden.

Auf diese beiden conjugirten Durchmesser 2α und $2b$ als ξ- und ζ-Axe bezogen lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

wobei wir die positive ξ-Axe zwischen der negativen z- und der positiven x-Axe, die positive ζ-Axe zwischen der positiven x-Axe und der positiven z-Axe liegend annehmen. Es ist dann $\angle(\xi x) = \varphi$ und $\angle(\xi x)$ werde mit χ bezeichnet. (Vergleiche Figur.) Bekannte Sätze über conjugirte Durchmesser ergeben dann

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\chi = \frac{c^2}{a^2} \tag{3}$$

und

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2. \tag{4}$$

II.

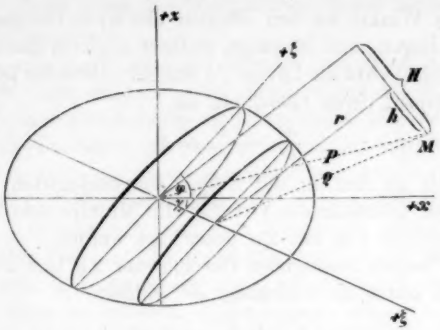
Vom angezogenen Punkte aus denken wir uns jetzt eine Linie gezogen, die senkrecht auf den Schnittebenen steht. Die Länge der-

*) Nach einem bekannten Satze liegen die Centra paralleler Schnitte in Flächen zweiten Grades in demjenigen Durchmesser der Fläche, welche der Lage der Schnittebenen conjugirt ist. (S. Elemente der analytischen Geometrie des Raumes von Salmon und Fiedler, Art. 95.) Die Ebene unseres Hauptschnittes ist also Diametralebene zu dem Orte der Kreiscentra. Ein anderer Satz (ebendaselbst Art. 67) besagt, dass, wenn die einer gegebenen Richtung conjugirte Diametralebene eine andere Richtung enthält, die dieser letzten Richtung conjugirte Diametralebene auch die erste Richtung enthält. Wenn wir also in der Ebene des Hauptschnittes als neue Richtung die y-Axe annehmen, so muss die dazu gehörige Diametralebene, nämlich die xz-Ebene, den Ort der Centra enthalten. Derselbe ist daher Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und conjugirter Durchmesser zu der Richtung der Kreisdurchmesser, die zugleich Sehnen der Ellipse sind.

selben bis zu einer Schnittebene werden mit h, die Entfernung des Fusspunktes vom Mittelpunkte des Kreises mit r bezeichnet (Figur). Die zur Abscisse des Mittelpunktes ξ in der Gleichung der Ellipse (2)



zugehörige Ordinate ξ ist gleich dem Radius des Kreises. Das Potential der Kreisfläche lautet dann nach der Heine'schen Formel

$$V = 2\,\xi^2 \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{h^2}{s} - \frac{r^2}{s+\xi^2}} \cdot \frac{ds}{(s+\xi^2)\sqrt{s}},$$

wobei s_0 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{h^2}{s} + \frac{r^2}{s+\xi^2} = 1$$

ist. Formen wir etwas um, indem wir $\xi^2 s$ für s schreiben, so geht V über in

$$V = 2 \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{\xi^2 s(s+1) - s(h^2+r^2) - h^2}\; \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet ϱ die Entfernung des angezogenen Punktes vom Kreismittelpunkte, so ist

$$h^2 + r^2 = \varrho^2,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$u = \sqrt{\xi^2 s(s+1) - s\varrho^2 - h^2}, \tag{5}$$

so erhält man

$$V = 2 \int_{s_0}^{\infty} u\, \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}, \tag{6}$$

wobei s_0 die positive Wurzel aus $u = 0$ ist. Diese Formel gilt auch für einen Punkt der Ebene, also für $h = 0$. Liegt derselbe auf der Peripherie oder innerhalb des Kreises, so wird $s_0 = 0$.

Mit $d\xi$ werde nun die Entfernung der Mittelpunkte zweier benachbarter Kreisschnitte bezeichnet; dann ist der senkrechte Abstand derselben

$$dh = d\xi \sin(h\xi).$$

Es ist aber

$$\sin(h\xi) = \sin(\varphi + \chi) = k. \tag{7}$$

Mit dem Abstande dh muss man V multipliciren, um das Potential des Körperelementes zu erhalten. Dasselbe wird daher lauten

$$V' = 2k d\xi \int_{s_0}^{\infty} u \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

III.

Dass die Grössen, die in u enthalten sind, sich als Functionen von ξ darstellen lassen, ist leicht ersichtlich. Bezeichnet man die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte des Ellipsoids mit P, von der Ebene des Hauptschnittes mit H, so ist

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho^2 = P^2 + \xi^2 - 2P\xi\cos(P\xi), \\ h^2 = (H - \xi k)^2 \\ \text{und} \\ \xi^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\xi^2 \end{array}\right. \tag{8}$$

ergiebt sich aus der Gleichung der Ellipse (2). Denken wir uns diese Substitutionen gemacht, so können wir jetzt V' nach ξ von $-\alpha$ bis $+\alpha$ summiren, um das Potential des Ellipsoids zu erhalten.

1. Der angezogene Punkt liege ausserhalb des Ellipsoids. Das Potential lautet

$$U = 2k \int_{-\alpha}^{\alpha} d\xi \int_{s_0}^{\infty} u \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier ist also für ein festgehaltenes ξ nach s zu summiren von dem aus $u = 0$ sich ergebenden Werthe s_0 bis ins Unendliche, dann nach ξ von $-\alpha$ bis $+\alpha$. Aus

$$s_0 = \frac{\varrho^2}{2\zeta^2} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varrho^2}{2\zeta^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + h^2}$$

ergiebt sich, dass für $\xi = \pm\alpha$, wo $\zeta = 0$ ist, s_0 über alle Grenzen wächst. Denken wir uns also $u = 0$ als Curve dargestellt, so läuft sie an diesen beiden Stellen ins Unendliche. Ferner ist ersichtlich aus den Relationen (5) und (8), dass die Function u^2 nach ξ vom zweiten Grade ist und der Coefficient von ξ^2 negativ. Nach Potenzen dieser Grösse geordnet wollen wir die Function schreiben

(9) $$u^2 = m + 2n\xi - p\xi^2,$$

wobei mnp Functionen von s sind und p jedenfalls positiv ist. Aus der Gleichung erhält man nun für jedes s zwei Werthe für ξ, ausser für dasjenige, bei dem

$$\xi = \frac{n}{p} \text{ und } mp + n^2 = 0$$

ist. An dieser Stelle existirt ein Minimum der Curve und wir bezeichnen den dazu gehörigen Werth von s durch σ.

Kehrt man die Integrationsfolge um, so ist für ein festgehaltenes s nach ξ zu summiren zwischen den beiden aus $u = 0$ sich ergebenden Werthen ξ_1 und ξ_2, dann nach s von σ bis ins Unendliche.

So erhält man

$$U = 2k \int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} u\, d\xi.$$

Es ist nun

$$\int u\, d\xi = \frac{p\xi - n}{2p} \cdot u + \frac{mp + n^2}{2p\sqrt{p}} \left[\operatorname{artg} \frac{p\xi - n}{\sqrt{p} \cdot u}\right].$$

Da ξ_1 und ξ_2 die Werthe für ξ sind, bei welchen u verschwindet, so fällt der erste Theil zwischen jenen Grenzen fort. Ferner ist

$$p\xi_1 - n = -\sqrt{mp + n^2},$$
$$p\xi_2 - n = \sqrt{mp + n^2}.$$

Wächst ξ von ξ_1 bis ξ_2, so durchläuft $\operatorname{tg} \frac{p\xi - n}{\sqrt{p} \cdot u}$ stetig die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, also der arcustangens die Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$.

Man erhält daher

$$U = k\pi \int_{\sigma}^{\infty} \frac{mp + n^2}{s \cdot p\,(s+1)} \frac{ds}{\sqrt{p\,(s+1)}},$$

und hier ist σ ein aus $mp + n^2 = 0$ sich ergebender Werth, der positiv sein muss.

2. Liegt der Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids oder im Innern desselben, so ist für jeden Kreisschnitt $s_0 > 0$ ausser für denjenigen, auf dessen Peripherie oder innerhalb desselben der Punkt liegt. Für diesen nimmt es den Werth 0 an und daher denselben Werth auch die untere Grenze des Integrals.

Das Potential lautet dann

$$U = k\pi \int_{0}^{\infty} \frac{mp + n^2}{sp\,(s+1)} \frac{ds}{\sqrt{p(s+1)}}.$$

IV.

Um den Ausdruck des Potentials in die übliche Form zu bringen, bestimmen wir zunächst die Grössen $m\,n\,p$ aus der Function u^2 mit Hülfe der Relationen (8). Es ist

$$(10)\qquad \begin{cases} m = b^2 s(s+1) - sP^2 - H^2, \\ n = sP\cos(P\xi) + Hk, \\ p = \frac{b^2}{a^2}s(s+1) + s + k^2. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus den Formeln (1), (3) und (4)

$$(11)\qquad \sin^2(\varphi+\chi) = k^2 = \frac{a^2c^2}{a^2b^2}$$

und daher

$$(12)\qquad p = \frac{(a^2+b^2s)(c^2+b^2s)}{a^2b^2}.$$

Die Grössen, welche bisher die Lage des Punktes bestimmten, könnten wir durch die rechtwinkligen Coordinaten desselben ausdrücken und so die Transformation bewerkstelligen. Ohne jedoch diese etwas langwierige Rechnung auszuführen, beachten wir nur Folgendes:

Da

$$P^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, ferner H und $P\cos(P\xi)$ (die Projection der Länge P auf die ξ-Axe) lineare Functionen der Coordinaten $x\,y\,z$ sind, so wird die Function $mp + n^2$ überhaupt nur ganze und nicht höhere als die zweiten Potenzen dieser Coordinaten enthalten können.

Von derselben Function ergiebt sich ferner ohne Weiteres aus der Beschaffenheit der Grössen $m\,n\,p$, dass sie vom vierten Grade nach s ist und s als Factor in ihr vorkommt. Sie kann daher geschrieben werden $sF(s)$. Dann ist, wenn wir setzen:

$$\Delta(s) = (a^2+b^2s)(b^2+b^2s)(c^2+b^2s),$$

$$\frac{mp+n^2}{b^2sp(s+1)} = a^2b^2\frac{F(s)}{\Delta(s)}.$$

Da hier Zähler und Nenner vom dritten Grade nach s sind, so können wir uns den Ausdruck in folgender Weise in Partialbrüche zerlegt denken:

$$a^2b^2\frac{F(s)}{\Delta(s)} = K + \frac{A}{a^2+b^2s} + \frac{B}{b^2+b^2s} + \frac{C}{c^2+b^2s},$$

worin K, ebenso wie $A\,B\,C$, kein s mehr enthält und bestimmt werden kann, wenn man s über alle Grenzen wachsen lässt. Man erhält nämlich

$$K = \lim_{s=\infty} a^2b^2\frac{F(s)}{\Delta(s)} = \lim_{s=\infty}\frac{mp+n^2}{p^2}\cdot\frac{p}{b^2s(s+1)}.$$

Da man aber setzen kann

$$\frac{mp+n^2}{p^2} = \frac{1}{4}(\xi_1 - \xi_2)^2,$$

wobei ξ_1 und ξ_2 ihre frühere Bedeutung haben (Seite 278), und da für $s = \infty$ $\xi_1 = -\alpha$ $\xi_2 = +\alpha$ ist, ferner

$$\lim_{s=\infty} \frac{p}{b^2 s(s+1)} = \frac{1}{\alpha^2},$$

so ergiebt sich für K der Werth 1.

Es war nun σ eine Wurzel aus der Gleichung:

$$mp + n^2 = sF(s) = 0.$$

Da für Punkte ausserhalb des Ellipsoids $\sigma > 0$ sein muss, so wird der Werth sich ergeben aus $F(s) = 0$. Da ferner das Potential für äussere Punkte stetig in das für Punkte der Oberfläche übergeht, so muss für diese auch der Werth $\sigma = 0$ sich aus $F(s) = 0$ ergeben. Ferner kann, da σ nicht allein von den Axen abhängen darf, $\Delta(s)$ nicht für $s = \sigma$ verschwinden. Wir können daher auch σ als eine Wurzel der Gleichung:

$$a^2 b^2 \frac{F(s)}{\Delta(s)} = 1 + \frac{A}{a^2 + b^2 s} + \frac{B}{b^2 + b^2 s} + \frac{C}{c^2 + b^2 s} = 0$$

betrachten. Dieselbe ist bezüglich der Coordinaten des angezogenen Punktes vom zweiten Grade, wie aus früheren Bemerkungen hervorgeht, und da für alle Punkte der Oberfläche $\sigma = 0$ ist, so muss:

$$1 + \frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} + \frac{C}{c^2} = 0$$

die Gleichung unseres Ellipsoids in rechtwinkligen Coordinaten sein. Daraus ergiebt sich die Beschaffenheit der Grössen ABC, nämlich:

$$A = -x^2, \quad B = -y^2, \quad C = -z^2,$$

und es ist

$$(13) \quad a^2 b^2 \frac{F(s)}{\Delta(s)} = \frac{mp+n^2}{b^2 sp(s+1)} = 1 - \frac{x^2}{a^2 + b^2 s} - \frac{y^2}{b^2 + b^2 s} - \frac{z^2}{c^2 + b^2 s}$$

Bei Benutzung dieses Resultats erhält man schliesslich, wenn man vorher noch $b^2 s = \tau$ setzt, das Potential in der Form:

$$U = abc\pi \int_{\tau_0}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{a^2+\tau} - \frac{y^2}{b^2+\tau} - \frac{z^2}{c^2+\tau}\right] \frac{d\tau}{\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)(c^2+\tau)}},$$

und hier ist τ_0, sowie in allen folgenden Formeln, die positive Wurzel aus der Gleichung

$$1 = \frac{x^2}{a^2+\tau} + \frac{y^2}{b^2+\tau} + \frac{z^2}{c^2+\tau}.$$

Für Punkte auf der Oberfläche und innere Punkte ist die untere Grenze gleich 0 zu setzen.

V.

Wir nehmen jetzt an, dass zwei Massentheilchen proportional der Masse und umgekehrt proportional einer beliebigen ganzen Potenz der Entfernung sich anziehen.

Die Potenz sei zunächst eine gerade $2q$ und wir bestimmen zuerst die Kräftefunction des Kreises

$$V = \frac{1}{2q-1} \int \frac{dm}{\mu^{2q-1}}.$$

Hierbei bedeutet dm das Flächenelement des Kreises, μ die Entfernung des angezogenen Punktes von einem Punkte der Kreisfläche. Wird μ^{-1} $q-1$ mal nach μ^2 differenzirt, so ergiebt sich:

$$\frac{d^{q-1}}{(d\mu^2)^{q-1}} \left(\frac{1}{\mu}\right) = (-1)^{q-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2q-3}{2^{q-1}} \cdot \frac{1}{\mu^{2q-1}}.$$

Setzt man

$$(-1)^{q-1} \frac{2^q}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2q-1} = C,$$

so ist

$$V = \frac{C}{2} \int \frac{d^{q-1}}{(d\mu^2)^{q-1}} \left(\frac{1}{\mu}\right) dm.$$

Ist M der angezogene Punkt, M_1 der Punkt der Kreisfläche, h das von M auf die Kreisebene gefällte Loth, l die Entfernung des Fusspunktes desselben von M_1, so ist

$$\mu^2 = h^2 + l^2.$$

Wir erhalten daher dasselbe Resultat, wenn wir oben μ^{-1} anstatt nach μ^2 nach h^2 differenziren; und da h für den Kreis constant ist, können wir vor dem Integralzeichen differenziren. Es wird daher

$$V = \frac{C}{2} \frac{d^{q-1}}{(dh^2)^{q-1}} \int \frac{dm}{\mu}.$$

So ist die Kräftefunction auf das Potential zurückgeführt. Aus der Formel (6) für das letztere ergibt sich nun

$$V = C \frac{d^{q-1}}{(dh^2)^{q-1}} \int_{s_0}^{\infty} u \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{14}$$

Mit Rücksicht auf die Differentiation nach h^2 schreiben wir hier

$$u = \sqrt{\xi^2 s(s+1) - s r^2 - (s+1) h^2}.$$

Sei zunächst $q = 2$, also die Potenz der Anziehung die vierte, so ist nur eine einmalige Differentiation des Integrals in (14) nöthig. Da h^2 in s_0 enthalten ist, muss man erst über die untere Grenze, dann unter dem Integralzeichen differenziren. Der erste Theil fällt weg, weil u für $s = s_0$ verschwindet; es bleibt, da hier $C = -\frac{4}{3}$ ist:

$$V = \frac{2}{3}\int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{us\sqrt{s+1}}.$$

Denken wir uns hier durch die Formeln (8) die Grösse ξ eingeführt, so erhält man durch Summation nach derselben die Kräftefunction des Ellipsoids:

$$U = \frac{2}{3}k\int_{-a}^{a} d\xi \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{us\sqrt{s+1}},$$

oder nach der in III. angegebenen Umkehr der Integrationenfolge:

$$U = \frac{2}{3}\int_{0}^{\infty} \frac{ds}{s\sqrt{s+1}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{u}.$$

Es ist:

$$\int \frac{d\xi}{u} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left[\operatorname{arctg}\frac{p\xi - n}{\sqrt{p}\cdot u}\right].$$

Zwischen den Grenzen ξ_1 und ξ_2 hat dieses Integral den Werth π; daraus folgt

$$U = \frac{2}{3}k\pi\int_{a}^{\infty} \frac{ds}{s\sqrt{p\,(s+1)}},$$

aus den Formeln (11) und (12) und der Substitution $b^2 s = \tau$ ergibt sich schliesslich:

$$U = \frac{2}{3}abc\pi\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{(a^2+\tau)\,(b^2+\tau)\,(c^2+\tau)}}.$$

In (14) können wir die übrigen Differentiationen nicht in gleicher Weise, wie die erste, ausführen. Es ist aber:

$$\frac{u}{\sqrt{s+1}} = \sqrt{\zeta^2 s - \frac{s}{s+1}r^2 - h^2}.$$

Setzt man nun:

$$\zeta^2 s - \frac{s}{s+1}r^2 = v,$$

so geht die Formel (14) über in:

$$V = C\frac{d^{q-1}}{(dh^2)^{q-1}}\int_{h^2}^{\infty} \sqrt{v - h^2}\,\frac{dv}{v + \zeta^2 s^2},$$

wobei s^2 als Function von v zu betrachten ist.

Differenzirt man hier einmal, so fällt der Theil, bei welchem über die untere Grenze integrirt ist, weg. Bei der Differentiation unter dem Integralzeichen erhält man dasselbe Resultat, wenn man anstatt nach h^2 nach v differenzirt und dabei das Vorzeichen umkehrt. Also ist:

$$V = -C\frac{d^{q-2}}{(dh^2)^{q-2}}\int_{h^2}^{\infty} d\frac{\sqrt{v-h^2}}{dv}\frac{dv}{v+\xi^2 s^2}.$$

Nach einer Integration durch Theile, bei welcher der vom Integralzeichen freie Theil verschwindet, geht dieser Ausdruck über in:

$$V = C\frac{d^{q-2}}{(dh^2)^{q-2}}\int_{h^2}^{\infty}\sqrt{v-h^2}\,\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v+\xi^2 s^2}\right)dv.$$

Auf diese Weise kann man auch die übrigen Differentiationen ausführen, und so ergibt sich bei der letzten ohne die theilweise Integration:

$$V = -\frac{C}{2}\int_{h^2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{v-h^2}}\frac{d^{q-2}}{(dv)^{q-2}}\left(\frac{1}{v+\xi^2 s^2}\right)dv.$$

Bezeichnet man den $q-2^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $\frac{1}{v+\xi^2 s^2}$ mit $F(v)$, und denkt man sich dann überall wieder v durch s ersetzt, so nimmt die Kräftefunction die Gestalt an:

$$V = -\frac{C}{2}\int_{s_0}^{\infty}\frac{F(s)}{u}\,ds.$$

Wird hier nun die Grösse ξ eingeführt und nach derselben summirt, so erhält man als Kräftefunction des Ellipsoids:

$$U = -\frac{C}{2}k\int_{-a}^{a} d\xi\int_{s_0}^{\infty}\frac{F(s\xi)}{u}\,ds,$$

oder nach Umkehr der Integrationenfolge:

$$U = -\frac{C}{2}k\int_{0}^{\infty} ds\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{F(s\xi)}{u}\,d\xi.$$

VI.

Ist die Potenz der Anziehung eine ungerade und zwar vorerst die dritte, so suchen wir wieder die Kräftefunction:

$$V = \frac{1}{2}\int\frac{dm}{\mu^2}$$

zunächst für den Kreis zu bestimmen.

Die Grössen ξ, h, r, ϱ sollen ihre frühere Bedeutung beibehalten und die Entfernung eines Punktes der Kreisfläche M_1 vom Mittelpunkte O sei $OM_1 = l$. Dann ist:

$$\mu^2 = \overline{MM_1}^2 = h^2 + r^2 + l^2 - 2rl\cos(rl).$$

Bezeichnen wir $\angle (rl)$ mit w und erinnern uns, dass $h^2+r^2=\varrho^2$ ist, so können wir die Kräftefunction schreiben

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{\xi} l\,dl \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\varrho^2+l^2-2rl\cos w}$$

oder nach Ausführung einer Integration*)

$$V=\pi\int_0^{\xi}\frac{l\,dl}{\sqrt{(\varrho^2+l^2)^2-4r^2l^2}}$$

und daraus erhält man:

$$V=\frac{\pi}{2}\lg R$$

worin R eine Function von der Beschaffenheit, dass $R-1$ die positive Wurzel der Gleichung:

(15) $$\xi^2-(\varrho^2-\xi^2)(R-1)-h^2(R-1)^2=0$$

ist. Führt man hier die Grösse ξ durch die bekannten Relationen (8) ein und summirt dann nach ξ, so erhält man als Kräftefunction des Ellipsoids:

$$U=\frac{\pi}{2}k\int_{-a}^{a}\lg R\,d\xi\,.$$

Eine Integration durch Theile ergiebt:

$$U=\left[\frac{\pi}{2}k\xi\lg R\right]_{-a}^{a}-\frac{\pi}{2}k\int_{-a}^{a}\xi\frac{d\lg R}{d\xi}\,d\xi\,.$$

Für $\xi=\mp\alpha$, wo $\zeta=0$ ist, wird $R=1$. Der vom Integralzeichen freie Theil fällt daher weg. Im andern führen wir eine neue Grösse s für ξ ein dergestalt, dass $R-1=\frac{1}{s}$ ist. Die aus Formel (15) sich ergebende Substitutionsformel lautet dann:

(16) $$\xi^2 s(s+1)-s\varrho^2-h^2=0;$$

die linke Seite ist unsere mit u^2 bezeichnete Function. Wir wissen nun aus der früheren Discussion der Gleichung $u^2=0$, dass, während ξ von $-\alpha$ bis $+\alpha$ wächst, s von ∞ bis zu einem gewissen Werth σ abnimmt und von da wieder bis in's Unendliche wächst. Ferner sind die zu demselben s gehörigen beiden Werthe von ξ:

$$\xi=\frac{n}{p}\mp\sqrt{\frac{mp+n^2}{p^2}}\,.$$

Da ausserdem $\frac{d\lg R}{d\xi}d\xi=-\frac{ds}{s(s+1)}$ ist, so geht die Formel über in:

*) Diese Integrationen sind dieselben, welche auch zur Ableitung des Kreispotentials dienen.

$$U = \frac{\pi}{2} k \int_{\infty}^{a} \left(\frac{n}{p} - \frac{\sqrt{mp+n^2}}{p} \right) \frac{ds}{s(s+1)} + \frac{\pi}{2} k \int_{o}^{\infty} \left[\frac{n}{p} + \frac{\sqrt{mp+n^2}}{p} \right] \frac{ds}{s(s+1)}$$

und daraus folgt:

$$U = \pi k \int_{o}^{\infty} \frac{\sqrt{mp+n^2}}{sp(s+1)} ds .$$

Mit Hülfe aber der Formeln (11), (12) und (13) und der Substitution $b^2 s = \tau$ erhält man U in der Form

$$U = abc\pi \int_{\tau_0}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2+\tau} - \frac{y^2}{b^2+\tau} + \frac{z^2}{c^2+\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)(c^2+\tau)}} .$$

Für noch höhere ungerade Potenzen schreiben wir die Kräftefunction des Kreises zuerst wieder in der allgemeinen Form

$$V = \frac{1}{2q} \int \frac{dm}{\mu^{2q}} .$$

Es ist

$$\frac{d^{q-1}}{(d\mu^2)^{q-1}} \left(\frac{1}{\mu^2} \right) = (-1)^{q-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q-1}{\mu^{2q}}$$

und setzt man

$$K = (-1)^{q-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q-1 \cdot q} ,$$

so geht obiger Ausdruck für V über in

$$V = \frac{K}{2} \int \frac{d^{q-1}}{(d\mu^2)^{q-1}} \left(\frac{1}{\mu^2} \right) dm .$$

Wie früher (Abschn. V.) erhält man auch hier dasselbe Resultat, wenn man anstatt nach μ^2 nach h^2 differenzirt und findet dann in ähnlicher Weise

$$V = K \frac{d^{q-1}}{(dh^2)^{q-1}} \left(\frac{1}{2} \int \frac{dm}{\mu^2} \right) .$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2} \int \frac{dm}{\mu^2} = \frac{\pi}{2} \lg R$$

und daher

$$V = \frac{\pi}{2} K \frac{d^{q-1} \lg R}{(dh^2)^{q-1}} .$$

Denkt man sich die Differentiation ausgeführt, so kann man nach der Grösse ξ summiren und erhält als Kräftefunction des Ellipsoids

$$U = \frac{\pi}{2} K \cdot k \int_{-a}^{a} \frac{d^{q-1} \lg R}{(dh^2)^{q-1}} d\xi .$$

Für den speciellen Fall $q=2$, wenn also die Anziehung nach der fünften Potenz der Entfernung wirkt, hat man in der letzten Formel nur einmal zu differenziren. Es ist hierbei $K=-\frac{1}{2}$ und es wird

$$U=k\frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a}\frac{R-1}{2h^2(R-1)+\varrho^2-\zeta^2}d\xi\,.$$

Wir führen hier wieder durch die Substitution (16) für ξ die Grösse s ein. Um $d\xi$ durch ds zu ersetzen, muss man $u^2=0$ total differenziren. Mit Beachtung der beiden Formen, in denen u^2 geschrieben wurde, erhält man

$$2(n-p\xi)d\xi+(2\zeta^2 s+\zeta^2-\varrho^2)ds=0\,,$$

und die Function unter dem Integralzeichen wird schliesslich

$$\frac{1}{2s(p\xi-n)}\,.$$

Es ist aber

$$p\xi-n=\pm\sqrt{mp+n^2}\,,$$

und für die negativen Werthe ist von ∞ bis zu einem Werthe σ, für die positiven von σ bis ∞ zu integriren. Also ist:

$$U=k\frac{\pi}{4}\left\{\int_{\infty}^{\sigma}-\frac{ds}{2s\sqrt{mp+n^2}}+\int_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{2s\sqrt{mp+n^2}}\right\}$$

folglich:

$$U=k\frac{\pi}{4}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{s\sqrt{mp+n^2}}\,,$$

oder nach bekannter Umformung

$$U=\frac{abc\pi}{4}\int_{\tau_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2+\tau}-\frac{y^2}{b^2+\tau}-\frac{z^2}{c^2+\tau}}}\frac{d\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)(c^2+\tau)}}\,.$$

Lettre de M. Ch. Hermite à M. P. Gordan.

M'étant occupé comme vous le savez des fractions continues algébriques, j'y ai rattaché comme il suit la relation importante découverte par Jacobi, à savoir:

$$D_x^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{n}\sin[n \arccos x].$$

Je remarque que le développement de l'expression: $(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances décroissantes de la variable, se composera d'une partie entière de degré $2n-1$, et d'une série infinie de la forme:

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^3}+\frac{\alpha''}{x^5}+\cdots,$$

de sorte qu'on peut écrire:

$$D_x^n(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \mathsf{P}+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+3}}+\cdots.$$

P étant un polynôme de degré $n-1$. Or les dérivées successives de $(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$, montrent facilement qu'on a:

$$D_x^n(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Pi}{\sqrt{x^2-1}},$$

ou Π est une fonction entière de degré n, et ce résultat rapproché du précédent, donne la relation

$$\frac{\Pi}{\sqrt{x^2-1}} = \mathsf{P}+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+3}}+\cdots$$

qui prouve que $\frac{\mathsf{P}}{\Pi}$ est la n^e réduite du développement en fraction continue de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Mais on sait que les deux termes de cette réduite, sont à un facteur constant près:

$$\mathsf{P} = \frac{\sin[n \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\Pi = \cos[n \arccos x],$$

c'est même une conséquence immédiate, de ce qu'en faisant:

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n = \Pi + P\sqrt{x^2-1}$$

on en déduit:

$$(x-\sqrt{x^2-1})^n = \Pi - P\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x^n} + \cdots$$

d'ou:

$$\frac{\Pi}{\sqrt{x^2-1}} - P = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{x^n} + \cdots\right) = \frac{1}{x^{n+1}} + \cdots.$$

Posons donc en désignant par N un facteur constant:

$$D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = N\frac{\cos[n \arccos x]}{\sqrt{x^2-1}},$$

ou encore:

$$D_x^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^n N\frac{\cos[n \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

on en ténu en intégrant:

$$D_x^{n-1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1} N\frac{\sin[n \arccos x]}{n} + C.$$

C'est la relation découverte par Jacobi, et il ne reste plus qu'à déterminer les constantes N et C. La première s'obtient en égalant les termes en x^{n-1} dans l'équation:

$$D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = N\frac{\cos[n \arccos x]}{\sqrt{x^2-1}};$$

ayant en effet: $\cos[n \arccos x] = 2^{n-1}x^n + \cdots$, on en conclut:

$$2^{n-1}N = (2n-1)(2n-2)\cdots n,$$

donc:

$$\begin{aligned} N &= \frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n-1\cdot 2^{n-1}} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n-2} \\ &= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1). \end{aligned}$$

Et quant à la seconde, elle est évidemment nulle, le premier membre, s'évanouissant pour $x=1$, ainsi que $\sin[n \arccos x]$.

Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe.

Von Ernst Schröder in Darmstadt.

Seit ein paar Jahren beschäftige ich mich damit, die formalen Beziehungen einfachster Art, welche zwischen einer Operation und deren Umkehrungen bestehend gedacht werden können, in ihrer logischen Abhängigkeit von einander zu untersuchen, und habe ich bei einem früheren Anlasse schon eine vorläufige Mittheilung*) über Ergebnisse dieser Untersuchungen gemacht. Einer systematischen Darstellung, wie ich sie nun bald zu verwirklichen hoffe, soll indessen durch den vorliegenden Aufsatz noch in gewissem Sinne vorgearbeitet werden, insoferne nämlich einiges Material darin ausgebildet wird, auf welches ich wünschen muss mich beziehen zu können als auf ein anschauliches Beispiel oder einen Beleg dafür, welcher interessanten Art des realen Inhaltes die von mir betrachteten abstracten Operationen fähig sein werden. Im Hinblick auf diesen speciellen Zweck erschien es allerdings nöthig, in die Darstellung auch einige Betrachtungen, die an sich bekannt sind, zu verflechten.

Als durch die anregende Arbeit des Herrn Lüroth**) mit der Theorie der Würfe mir ein wesentlicher Theil der v. Staudt'schen Betrachtungsweisen näher gerückt wurde, legte ich mir die Frage vor, welche analytischen Beziehungen wohl den geometrischen Constructionen jenes Calculs zu Grunde liegen, resp. in welcher Weise die hierauf bezüglichen l. c. synthetisch***) hergeleiteten Ergebnisse sich auch durch rein analytische Methoden deduciren lassen möchten.

---

*) Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgart, Schweizerbart, 1874.

**) Ueber das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Göttinger Nachr. 1873, S. 767 sqq., und ausführlicher diese Annalen Bd. VIII, S. 145–214.

***) Ebenso auch in dem seitdem erschienenen Aufsatze des Herrn Sturm über die v. Staudt'schen Würfe, diese Annalen Bd. IX, p. 333–346.

Die Multiplication und die Addition der Würfe nebst deren inversen Operationen, welche in den citirten Abhandlungen unter dem Gesichtspunkt der Associativität, Commutativität und des distributiven Zusammenhanges immer blos als geometrische Operationen betrachtet werden, müssen analog, wenn man sie als arithmetische Operationen an dem Parameter t der unicursalen Curven auffasst, auch ein analytisches Beispiel für einen den vier Species entsprechenden Operationskreis liefern. Derjenige Parameter, welcher dem v. Staudt'schen (symbolischen) Producte, resp. der Summe, zweier Wurfpunkte entspricht, ist in der That eine gewisse bilineare Function (15) von den Parametern dieser Operationsglieder, eine Function sogar, die durch lineare Transformation geradezu auf das arithmetische Product, resp. auf die arithmetische Summe selbst, zurückgeführt werden kann.

Mit der Lieferung der hierauf bezüglichen Nachweise, und dann auch mit der Ausdehnung der dabei in Verwendung kommenden Determinantensätze auf beliebig viele Dimensionen, beschäftigt sich nun der erste Theil meiner Arbeit.

Der zweite, mit § 8. beginnende Theil derselben ist dagegen dem Zusammenhange und Analogieen gewidmet, welche zwischen den bisherigen und meinen eingangs erwähnten Untersuchungen zu Tage treten, und wird erst in Verbindung mit den letzteren vollends zu beurtheilen sein.

Ich werde bei der Darlegung von der Vorstellung reeller („neutraler") Würfe einer krummen Punktreihe (eines Kegelschnittes) ausgehen, wenngleich den in Betracht gezogenen Zahlen natürlich ebensogut auch beliebige complexe Werthe beigelegt und diesen — in Gestalt von mit einem „Sinn" begabten Involutionen — ein anderweitiges reales Substrat untergelegt werden könnte.

§ 1.

Man denke sich den (bei Ausschluss eines Geradenpaares) beliebigen Kegelschnitt als *„unicursale"* Curve dargestellt, dadurch, dass für einen beliebigen Punkt $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ desselben die homogenen Coordinaten gegeben sind als rationale Functionen zweiten Grades von einem Parameter t vermittelst der Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2, \\ y = B(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2, \\ z = C(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2, \end{cases}$$

Die Zahlenwerthe von t und die Punkte der Curve werden alsdann in bekannter Weise einander eindeutig entsprechen, und mögen demnach auch immer übereinstimmend bezeichnet werden.

Wenn nun so die Zahlzeichen t_0, t_1 und t_∞ drei feste ein für allemal beliebig gewählte *„Grundpunkte“* vorstellen, so werden wir in Gestalt der Zusammenstellung t_0, t_1, t_∞, t — oder, da die drei ersten Punkte stets als dieselben gedacht werden sollen, kürzer in Gestalt von t selbst — einen v. Staudt'schen *Punktwurf* vor uns haben.

Die dem v. Staudt'schen *„Producte“* zweier beliebigen Punktwürfe t_a und t_b zugehörige Zahl will ich mit t_{ab} oder

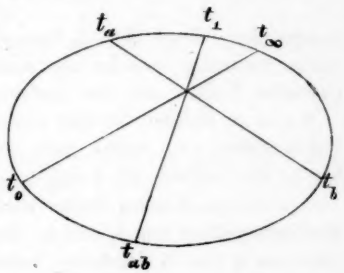
$$t_c = t_a (\times) t_b \tag{2}$$

in der That als ein symbolisches Product bezeichnen.

Die geometrische Construction dieses Productes ist dann einfach ausgesprochen durch die Forderung, dass die Verbindungsgeraden der drei Punktepaare:

$$t_0 \text{ und } t_\infty; \quad t_a \text{ und } t_b; \quad t_1 \text{ und } t_c \tag{3}$$

sich in *einem* Punkte schneiden sollen, dass also das Sechseck dieser 6 Punkte zugleich ein Pascal'sches und ein Brianchon'sches sei — wenn auch das letztere in Bezug auf einen andern als den hier zu Grunde liegenden Kegelschnitt.



Die v. Staudt'sche *„Summe“* der beiden Punktwürfe t_a und t_b werde entsprechend durch t_{a+b} oder $t_a(+)t_b$ dargestellt. Die *symbolische Addition*, welche uns dieselbe liefert, *lässt sich als specieller Fall der vorerwähnten Multiplication behandeln*; sie wird aus dieser erhalten durch eine Abänderung der Grundpunkte, indem man nämlich erst t_0 in t_∞ übergehen lässt (wodurch die Verbindungslinie zu der l. c. S. 189 erwähnten Tangente wird) und hernach t_1 durch t_0 ersetzt.

Es genügt daher, wenn wir nur für die Multiplication die Aufgabe lösen, zunächst t_c durch t_a und t_b analytisch auszudrücken.

§ 2.

Mit Rücksicht auf (1) ist in den laufenden Coordinaten $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ die Gleichung der Verbindungsgeraden von t_a und t_b:

$$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ A(t_a), & B(t_a), & C(t_a) \\ A(t_b), & B(t_b), & C(t_b) \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

Es ist nun bemerkenswerth, dass diese Gleichung, welche in der zweiten und dritten Zeile der Determinante lauter Elemente von so complicirtem Bau wie die Ausdrücke (1) enthält, sich durch Ordnungserhöhung („Rändern“) und Unterdrückung eines Factors auf die weit einfachere Gestalt bringen lässt:

$$(5)_{a,b} \qquad \begin{vmatrix} 0 & , X, & Y, & Z \\ 1 & , \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ -t_a - t_b, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ t_a\, t_b & , \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man nämlich die hier zur Linken stehende Determinante colonnenweise mit der folgenden:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & t_a^2, & t_b^2, & -1 \\ 0, & t_a, & t_b, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix},$$

welche den Werth $t_b - t_a$ besitzt, so ergiebt sich eine Determinante vierter Ordnung, welche aus dem Schema von (4) mit links davorgesetzten Nullen und der darunter geschriebenen Zeile -1, $-\alpha_2$, $-\beta_2$, $-\gamma_2$ besteht, welche also durch Ordnungserniedrigung auf die Determinante (4) selbst ganz unmittelbar hinausläuft. (Vergleiche hierzu den Schluss des § 6.)

In entsprechender Weise wird sich nun die Gleichung $(5)_{0,\infty}$ der Verbindungslinie von t_0 und t_∞, desgleichen die $(5)_{1,c}$ der Verbindungslinie von t_1 und t_c darstellen, nämlich aus $(5)_{a,b}$ hervorgehen, indem wir die Indices a und b von t einfach durch 0 und ∞ resp. 1 und c ersetzen. Sollen dann die drei Verbindungslinien sich in *einem* Punkte schneiden, so muss es ein System von Werthen X, Y, Z geben, für welches die drei Gleichungen

$$(7) \qquad (5)_{a,b}, \quad (5)_{0,\infty} \text{ und } (5)_{1,c}$$

gleichzeitig erfüllt werden, und handelt es sich demnach darum, dieses Werthsystem — oder also die beiden Coordinaten $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ des Schnittpunktes unserer drei Verbindungslinien — aus diesen drei Gleichungen zu eliminiren.

§ 3.

Durch einen Kunstgriff, welcher dem in der Determinantenlehre bei den adjungirten Systemen gebrauchten ähnlich ist, ergiebt sich die gesuchte Eliminationsresultante sogleich in der einfachen Zerlegung:

$$D^2 \cdot \Theta = 0, \tag{8}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta = \begin{vmatrix} 1, & t_1 + t_c, & t_1 t_c \\ 1, & t_a + t_b, & t_a t_b \\ 1, & t_\infty + t_0, & t_\infty t_0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

bedeutet.

Wird nämlich die Determinante in $(5)_{a,b}$ mit $D^{a,b}(X, Y, Z)$ bezeichnet, und D, $-D_\alpha^{a,b}$, $D_\beta^{a,b}$, $-D_\gamma^{a,b}$ deren Unterdeterminanten nach den Elementen der ersten Zeile genannt, so können wir die Gleichungen (7) bequem nach den Elementen der ersten Zeile geordnet hinschreiben, und muss die Determinante dieser drei homogenen Gleichungen verschwinden, d. h. es muss:

$$\begin{vmatrix} D_\alpha^{a,b}, & D_\beta^{a,b}, & D_\gamma^{a,b} \\ D_\alpha^{0,\infty}, & D_\beta^{0,\infty}, & D_\gamma^{0,\infty} \\ D_\alpha^{1,c}, & D_\beta^{1,c}, & D_\gamma^{1,c} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

sein.

Wenn man aber die Entwickelung der aus $(5)_{a,b}$ abzulesenden Determinanten

$$D^{a,b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad D^{a,b}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad D^{a,b}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

nach den Elementen ihrer ersten Zeile je vergleicht mit ihrer Entwickelung nach den Elementen ihrer ersten Colonne, so ergeben sich die Relationen:

$$\begin{cases} \alpha_2 D_\alpha^{a,b} + \beta_2 D_\beta^{a,b} + \gamma_2 D_\gamma^{a,b} = -1 \cdot D, \\ \alpha_1 D_\alpha^{a,b} + \beta_1 D_\beta^{a,b} + \gamma_1 D_\gamma^{a,b} = (t_a + t_b) \cdot D, \\ \alpha_0 D_\alpha^{a,b} + \beta_0 D_\beta^{a,b} + \gamma_0 D_\gamma^{a,b} = -t_a t_b \cdot D, \end{cases} \tag{11}$$

und entsprechend für die Indices $0, \infty$ und $1, c$ statt a, b.

Wird mit Rücksicht auf diese Relationen die Determinante (10) mit dem Ausdruck (9) von D zeilenweise multiplicirt, so entsteht die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -1 \cdot D, & (t_a + t_b) D, & -t_a t_b D \\ -1 \cdot D, & (t_\infty + t_0) D, & -t_\infty t_0 D \\ -1 \cdot D, & (t_1 + t_c) D, & -t_1 t_c D \end{vmatrix} = 0,$$

deren linke Seite auf $D^3 \cdot \Theta$ hinauskommt. Die Determinante (10) ist daher in der That $= D^2 \cdot \Theta$ und damit die Richtigkeit des angegebenen Eliminationsergebnisses (8) dargethan.

Wofern also nur D von 0 verschieden ist, d. h. wofern nur der Kegelschnitt nicht etwa in eine Gerade*) degenerirt, kommt darnach unser Eliminationsergebniss auf

$$\Theta = 0 \tag{12}$$

selbst hinaus und bringt so den geometrisch anderweitig leicht nachzuweisenden Umstand zum Ausdruck, dass die drei Punktepaare (3) in einer Involution in Bezug auf den Kegelschnitt liegen.

In Betreff einer noch moderneren Deduction des Eliminationsresultates (12) vergleiche man § 7.

§ 4.

Aus der Gleichung (12), die sich — nebenbei gesagt — auch auf die bemerkenswerthe Form bringen lässt:

$$\begin{vmatrix} t_c+t_1 & , & 1 & , & 0 \\ t_1^2 & , & t_1 & , & 1 \\ t_a t_b(t_\infty+t_0)-t_\infty t_0(t_a+t_b), & & t_a t_b-t_\infty t_0, & & t_a+t_b-t_\infty-t_0 \end{vmatrix} = 0,$$

können wir nun t_c als Function von t_a und t_b berechnen, und finden:

$$t_c = \begin{vmatrix} 1, & t_1 & , & 0 \\ 1, & t_a+t_b, & & t_a t_b \\ 1, & t_\infty+t_0, & & t_\infty t_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0, & -1 & , & -t_1 \\ 1, & t_a+t_b, & & t_a t_b \\ 1, & t_\infty+t_0, & & t_\infty t_0 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

oder eleganter:

$$t_a(\times)t_b = \begin{vmatrix} t_1, & t_a, & t_b \\ t_0, & t_a, & t_0 \\ t_\infty, & t_\infty, & t_b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_1, & t_1 \\ 1, & t_0, & t_b \\ 1, & t_a, & t_\infty \end{vmatrix} = t_b(\times)t_a, \tag{14}$$

und völlig entwickelt:

$$t_a(\times)t_b = \frac{t_a t_b(t_1-t_\infty-t_0)+(t_a+t_b)t_\infty t_0-t_0 t_1 t_\infty}{-t_a t_b+(t_a+t_b)t_1-t_0 t_1-t_1 t_\infty+t_\infty t_0}. \tag{15}$$

Das symbolische Product zweier Zahlen ist darnach eine *bilineare gebrochene* Function der beiden Factoren. Die *Commutativität* dieser Operation ist aus der Symmetrie des Ausdruckes bezüglich t_a und t_b ohne Weiteres ersichtlich. Es wird daher auch nur *eine* inverse Operation zu jener geben, und können wir in entsprechender Weise den von ihr resultirenden Ausdruck symbolisch als einen Quotienten anschreiben — zur Unterscheidung von dem „eigentlichen" Quotienten nur mit eingeklammertem Divisionszeichen. Indem man die Gleichung

*) Das Geraden*paar* ist von allen Curven zweiten Grades die einzige nicht unicursale.

$t_a\,(\cdot)\,t_b = t_c$ nach t_a auflöst und hernach c durch a ersetzt, findet man als das zu (14) inverse Operationsergebniss:

$$(16)\qquad \left(\frac{t_a}{t_b}\right) = \begin{vmatrix} t_1, & t_a, & t_b \\ t_0, & t_a, & t_0 \\ t_1, & t_\infty, & t_\infty \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_1, & t_0 \\ 1, & t_\infty, & t_a \\ 1, & t_b, & t_b \end{vmatrix} = t_a\,(:)\,t_b\,.$$

Nach dem in § 1. Gesagten ergibt sich die zu der symbolischen Multiplication (14) gehörende symbolische Addition nun ohne Weiteres:

$$(17)\qquad t_a(+)t_b = \begin{vmatrix} t_0, & t_a, & t_b \\ t_\infty, & t_a, & t_\infty \\ t_\infty, & t_\infty, & t_b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_0, & t_0 \\ 1, & t_\infty, & t_b \\ 1, & t_a, & t_\infty \end{vmatrix}$$
$$= \frac{(t_0-2t_\infty)\,t_a t_b + t_\infty{}^2(t_a+t_b) - t_0 t_\infty{}^2}{-t_a t_b + t_0(t_a+t_b) + t_\infty{}^2 - 2\,t_0 t_\infty}$$

als ein Specialfall von jener. Desgleichen hat man für die symbolische Subtraction:

$$(18)\qquad t_a(-)t_b = \begin{vmatrix} t_0, & t_a, & t_b \\ t_\infty, & t_a, & t_\infty \\ t_0, & t_\infty, & t_\infty \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_0, & t_\infty \\ 1, & t_\infty, & t_a \\ 1, & t_b, & t_b \end{vmatrix}.$$

Dass diese beiden directen Operationen (14) und (17) in der That auch *associativ* sind, nämlich den Gesetzen:

$$t_a(\times)\left\{t_b(\times)t_c\right\} = \left\{t_a(\times)\,t_b\right\}(\times)\,t_c,$$

und desgleichen für das (+)-Zeichen, bei beliebig gegebenen t_a, t_b, t_c, für sich Genüge leisten, und ferner, dass sie miteinander wirklich in dem etwa durch die Gleichung:

$$\left\{t_a(+)\,t_b\right\}(\times)\,t_c = \left\{t_a(\times)\,t_c\right\}(+)\left\{t_b(\times)\,t_c\right\}$$

ausgedrückten *distributiven* Zusammenhang stehen — dieses auf Grund der Ausdrücke (14) und (17) nachzuweisen wäre nunmehr allerdings blos eine Rechenaufgabe der allerelementarsten Art; doch würde sich die Durchführung der Rechnung immerhin noch sehr umständlich gestalten.

§ 5.

Ich ziehe vor, statt dessen den folgenden Weg einzuschlagen.

In der Gleichung (1) des Kegelschnitts kann man statt t einen neuen Parameter τ einführen durch die linear gebrochene Substitution:

$$(19)\qquad t = \frac{(t_0-t_1)t_\infty\tau + t_0(t_1-t_\infty)}{(t_0-t_1)\tau + t_1 - t_\infty},$$

die so gewählt ist, dass den Werthen t_0, t_1, t_∞ des alten Parameters die:

$$\tau_0 = 0,\quad \tau_1 = 1,\quad \tau_\infty = \infty$$

des neuen entsprechen.

Umgekehrt wird dann:

$$\tau = \frac{t_0 - t}{t_\infty - t} : \frac{t_0 - t_1}{t_\infty - t_1} \tag{20}$$

das *Doppelverhältniss* vorstellen, welches vier von *irgend einem* Punkte des Kegelschnitts aus nach den Punkten t_0, t_1, t_∞, t hin gezogenen Strahlen zukommt.

[Obwohl dies anderweitig bekannt ist, will ich doch in Kürze zeigen, wie leicht sich der Beweis dieser Behauptung mit Hülfe der in der Form (5) geschriebenen Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte führen lässt.

Bezeichnen wir in der That mit $f(t_a, t_b)$ die linke Seite dieser Gleichung, so sind:

$f_0 = f(T, t_0) = 0$, $f_1 = f(T, t_1) = 0$, $f_\infty = f(T, t_\infty) = 0$ und $f = f(T, t) = 0$

die Gleichungen der 4 Strahlen, welche aus einem beliebigen fünften Punkt T des Kegelschnitts nach den schon mehrfach erwähnten vier Punkten hingezogen sind. Hier muss nun sein:

$$f = \mu f_0 + \lambda f_\infty, \quad f_1 = \mu_1 f_0 + \lambda_1 f_\infty$$

und da die drei Determinanten f (resp. f_1), f_0 und f_∞ sich nur durch ihre erste Colonne unterscheiden, so kann man die nämliche lineare Relation zwischen den correspondirenden Elementen ihrer ersten Colonne ansetzen. Dies giebt für μ und λ vier Gleichungen, die sich unter Wegfall von T auf die beiden: $\mu + \lambda = 1$ und $\mu t_0 + \lambda t_\infty = t$ reduciren, wonach denn

$$\mu = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}, \qquad \lambda = \frac{t_0 - t}{t_0 - t_\infty}$$

gefunden ist, also:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{t_0 - t}{t - t_\infty}$$

und entsprechend:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_\infty}.$$

Hieraus fliesst aber für das Doppelverhältniss:

$$\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \tau$$

genau der in (20) angegebene Werth, durch dessen Unabhängigkeit von T sich zugleich die charakteristische Eigenschaft der Kegelschnitte für die unicursalen Curven zweiten Grades bewiesen findet.]

Bilden wir durch Einsetzung des in t_a und t_b linearen Ausdruckes (14) von t_c zunächst den Quotienten:

$$\frac{t_0 - t_c}{t_\infty - t_c} = \frac{t_\infty - t_1}{t_0 - t_1} \cdot \frac{t_0 - t_a}{t_\infty - t_a} \cdot \frac{t_0 - t_b}{t_\infty - t_b}$$

und bezeichnen mit $\tau_c = \tau_{ab} = \tau_a (\cdot) \tau_b$ den t_c zugehörigen Werth von τ, so erkennt man augenblicklich, dass:

$$\tau_a (\cdot) \tau_b = \tau_a \cdot \tau_b , \tag{21}$$

hier also *das symbolische Product mit dem wirklichen identisch* wird.

Was die symbolische Addition betrifft, so kann deren Ergebniss in Bezug auf die τ aus dem eben für die Multiplication gewonnenen keineswegs wieder als Specialfall (durch den Process der Ersetzung von t_0 durch t_∞, hierauf von t_1 durch t_0) abgeleitet werden, weil die hierzu erforderliche Abänderung der Grundpunkte nur einseitig — in der Basis, dem Substrat, (14) der Substitution, nicht aber in der Substitution (19) oder (20) selbst — vorzunehmen ist. Daher haben wir für diesen Fall auf Grund der alsdann für t_{a+b} geltenden Formel (17) die Rechnung von neuem zu machen, und finden:

$$\frac{t_0 - t_{a+b}}{t_\infty - t_{a+b}} = \frac{t_0 - t_a}{t_\infty - t_a} + \frac{t_0 - t_b}{t_\infty - t_b} ,$$

und darnach:

$$\tau_{a+b} = \tau_a + \tau_b , \tag{22}$$

d. h. auch *die symbolische Summe ist dann einerlei mit der wirklichen, gewöhnlichen.*

Für die τ braucht darnach die Associativität der beiden Operationen, sowie ihr distributiver Zusammenhang nicht mehr besonders nachgewiesen zu werden; nur wird man noch zu zeigen haben, dass diese Eigenschaften von den τ auf die t — gewissermassen von dem Doppelverhältniss selbst auf ein Element desselben — sich übertragen.

Nach (19) ist nun t eine eindeutige Function von τ:

$$t = \varphi(\tau) ,$$

somit:

$$t_{a(bc)} = \varphi \left\{ \tau_{a(bc)} \right\} , \quad t_{(ab)c} = \varphi \left\{ \tau_{(ab)c} \right\} .$$

Da aber:

$$\tau_{a(bc)} = \tau_a \cdot \tau_b \cdot \tau_c = \tau_{(ab)c} ,$$

so folgt auch: $t_{a(bc)} = t_{(ab)c}$, und ist die Operation mit den t als eine associative erwiesen. Aehnliches gilt für die Addition. In derselben Weise folgt endlich aus:

$$t_{a(b+c)} = \varphi \left\{ \tau_{a(b+c)} \right\} = \varphi \left\{ \tau_a (\tau_b + \tau_c) \right\} = \varphi (\tau_a \tau_b + \tau_a \tau_c) =$$
$$= \varphi (\tau_{ab} + \tau_{ac}) = \varphi (\tau_{ab+ac}) = t_{ab+ac}$$

der distributive Zusammenhang zwischen den beiden Operationen.

§ 6.

Obwohl mit dem Vorangegangenen die Aufgabe, die wir uns hauptsächlich gestellt, erledigt ist, scheint es mir doch nicht überflüssig

noch hervorzuheben, dass die in den Paragraphen 2. und 3. zu Tage getretenen Determinanteneigenschaften auch entsprechend gebauten Determinanten von beliebig hoher Ordnung zukommen, und dann für unicursale Mannigfaltigkeiten in Räumen von mehr als zwei Dimensionen einer analogen Deutung fähig sind.

Sind nämlich in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen:

$$\frac{x_1}{x_0}, \quad \frac{x_2}{x_0}, \cdots \frac{x_n}{x_0}$$

die Coordinaten eines variabeln Punktes, so bestimmt die für $a = 0, 1, 2, \cdots n$ getroffene Festsetzung:

$$x_a = A_a(t) = \sum_{b=0}^{b=n} \alpha_{a,b} t^b \tag{23}$$

eine *unicursale* Mannigfaltigkeit von *einer* Dimension und vom n^{ten} Grade.

Stellen weiter $t_1, t_2, \cdots t_n$ irgend welche n Punkte dieser letzteren vor, so erscheint die Gleichung der sie verbindenden linearen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen („$n-1$-Ebene") zunächst bekanntlich in der Gestalt:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} X_0 , & X_1 , \cdots & X_n \\ A_0(t_1), & A_1(t_1), \cdots & A_n(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_0(t_n), & A_1(t_n), \cdots & A_n(t_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

und es wird nun der *erste* unserer Determinantensätze aussagen, dass, wenn unter Δ das Differenzenproduct:

$$\begin{aligned} \Delta = (t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1) \cdots (t_n - t_1), \\ \cdot (t_3 - t_2) \cdots (t_n - t_2), \\ \cdots \\ \cdot (t_n - t_{n-1}) \end{aligned} \tag{25}$$

verstanden wird, diese Gleichung sich auch auf die Form bringen lässt:

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot \frac{\mathfrak{D}}{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 , & X_0 , & X_1 , & \cdots & X_n \\ 1 , & \alpha_{0,n} , & \alpha_{1,n} , & \cdots & \alpha_{n,n} \\ -C_1, & \alpha_{0,n-1}, & \alpha_{1,n-1}, & \cdots & \alpha_{n,n-1} \\ C_2, & \alpha_{0,n-2}, & \alpha_{1,n-2}, & \cdots & \alpha_{n,n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^r C_r, & \alpha_{0,n-r}, & \alpha_{1,n-r}, & \cdots & \alpha_{n,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^n C_n, & \alpha_{0,0} , & \alpha_{1,0} , & \cdots & \alpha_{n,0} \end{vmatrix} = 0, \tag{26}$$

worin C_r für $r = 1, 2, \cdots n$ die Summe der Combinationen ohne Wiederholung zur r^{ten} Classe aus den Elementen $t_1, t_2, \cdots t_n$ bedeutet (diese Combinationen als Producte aufgefasst), mit andern Worten die (von Gauss so genannten) „grundsymmetrischen" Functionen der Wurzeln oder die Coefficienten der nach Potenzen von t geordneten Gleichung:

$$(27)\quad (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_n) = t^n - C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n = 0.$$

Für diesen Satz sind mir zwei Beweise bekannt, und will ich auf dieselben etwas näher eingehen.

Es ist *einerseits* möglich, die Gleichung (24) ganz direct — durch *„lineale Aenderung"* — in die Form (26) überzuführen, nämlich nach dem Satze*), dass die Determinante ungeändert bleibt, wenn man die Elemente einer Reihe vermehrt um die mit beliebigen aber durchweg denselben Factoren multiplicirten correspondirenden Elemente paralleler Reihen — und zwar in folgender theoretisch wohl nicht uninteressanten Weise.

Man lasse die Anfangszeile in dem Schema (24) immerfort ganz unverändert stehen; die folgenden Zeilen numerire man etwa mit $(1)_1$, $(2)_1$, $(3)_1$, $\cdots$ $(n)_1$, und vermindere alle unterhalb $(1)_1$ stehenden Zeilen um $(1)_1$; diese letzteren werden sich dann bezüglich durch $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, $\cdots$ $t_n - t_1$ dividiren lassen, und sollen sie nach vollzogener Division mit $(2)_2$, $(3)_2$, $\cdots$ $(n)_2$ numerirt werden. Wenn wir nun ebenso die unter $(2)_2$ stehenden Zeilen um $(2)_2$ vermindern, so lassen diese bezüglich durch $t_3 - t_2, \cdots t_n - t_2$ sich kürzen und mögen $(3)_3, \cdots (n)_3$ die Zeilen genannt werden, in welche sie dadurch übergehen. Fährt man in dieser Weise fort, bis die vorletzte Zeile von der letzten abgezogen, letztere alsdann durch $t_n - t_{n-1}$ dividirt, somit in $(n)_n$ übergeführt ist, so wird $\mathfrak{D}$ im Ganzen durch Δ dividirt sein, und sind $(1)_1, (2)_2, \cdots (n)_n$ die unter der Anfangszeile stehenden Zeilen dieser Determinante geworden.

In einer jeden von diesen Zeilen haben alle Elemente völlig gleichen Bau; sie unterscheiden sich allein durch den ersten Index der in ihnen auftretenden α Coefficienten. Daher genügt es, wenn wir von diesem Index vorläufig ganz absehen und nur eine einzige Colonne ins Auge fassen — eine Bemerkung, durch die man sich schon das Verfolgen der bis hierher ausgeführten Operationen sehr erleichtern konnte.

---

*) Gewiss ist zu wünschen, dass man für ein so häufig zur Umformung von Determinanten angewendetes und nur so umständlich citirbares Verfahren einen kurzen Namen besitze. Da meines Wissens kein Name dafür üblich ist, erlaube ich mir die obige von Hermann Grassmann in einem wesentlich verwandten Sinne gebrauchte Bezeichnungsweise vorzuschlagen.

Durch diese Operationen wird nun in der gedachten Colonne unfehlbar:

$$\alpha_{n-1} + \alpha_n(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) = \alpha_{n-1} + \alpha_n C_1$$

das Element $(n)_n$ der letzten Zeile geworden sein. Die vorletzte Zeile $(n-1)_{n-1}$ enthält die Coefficienten α_{n-2}, α_{n-1}, α_n und kann man aus ihr α_{n-1} durch lineale Aenderung, d. h. dadurch eliminiren, dass man die mit einem geeigneten (und nur die t enthaltenden) Factor multiplicirte Zeile $(n)_n$ von ihr abzieht; sie möge dann als $(n-1)_n$ numerirt werden und sie wird heissen: $\alpha_{n-2} - \alpha_n C_2$.

Fährt man so fort, successive aus jeder Zeile $(n-2)_{n-2}, \cdots (2)_2, (1)_1$ je mit Hülfe der auf sie folgenden Zeilen alle die Coefficienten α zu eliminiren, welche zwischen dem höchsten und dem niedersten in ihr vorkommenden α liegen, so erweist sich fortwährend dasselbe Gesetz bestätigt, und die Elemente der aufeinanderfolgenden Zeilen in der gedachten Colonne werden einfach

$$\text{in } (1)_n : \alpha_0 + (-1)^{n-1}\alpha_n C_n, \quad \text{in } (2)_n : \alpha_1 + (-1)^{n-2}\alpha_n C_{n-1},$$
$$\cdots \text{ in } (n-1)_n : \alpha_{n-2} - \alpha_n C_2, \quad \text{in } (n)_n : \alpha_{n-1} + \alpha_n C_1.$$

Der genaue Nachweis, dass dies allgemein so sein muss, würde sich wegen der Schwerfälligkeit der Summenzeichen für ein ganz unbestimmtes n nur umständlich darstellen lassen, weshalb ich (obwohl ich ihn auch in seiner Allgemeinheit auf diesem Wege leistete) an dieser Stelle von der Mittheilung desselben Abstand nehmen will. Dagegen ist für $n = 2, 3, 4, \cdots$ dieser Nachweis ungemein einfach durchzuführen. Schreibt man schliesslich, indem man die Ordnung der Determinante um 1 erhöht, unter die Elemente der letzten Zeile lauter Nullen, und hierauf vor die der ersten Colonne beziehungsweise:

$$0, \ (-1)^n C_n, \ (-1)^{n-1} C_{n-1}, \cdots C_2, \ -C_1, \ 1,$$

wodurch zur Determinante nur der Factor $(-1)^{n+1}$ hinzutritt, so ergibt sich die von uns angestrebte Form (26) dieser Determinante sogleich, indem man die Elemente jeder Colonne vermehrt um die mit dem zugehörigen α_n multiplicirten Elemente der neuen Anfangscolonne. Nur die auf die Anfangszeile von (26) folgenden Zeilen werden so erst in der entgegengesetzten Ordnung erhalten, und es kann die in (26) vorgezogene Anordnung hergestellt werden, wenn man zugleich mit $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ multiplicirt.

Bei vorstehendem Verfahren, welches auch zum Beweis der anderweitig bekannten auf das Differenzenproduct bezüglichen Determinantensätze verwendbar wäre, wurde die Ordnungserhöhung der Determinante erst ganz zuletzt ausgeführt.

Ungleich bequemer führt *andrerseits* ein Beweisverfahren zum Ziel, bei welchem dieselbe früher vollzogen und dann nur das Multiplicationstheorem der Determinanten angewendet wird — ein Verfahren, welches ich leicht auffand, nachdem Herr Voss mich darauf aufmerksam gemacht hatte, dass durch geeignete Anwendung der Methode des Ränderns überhaupt bezüglich der Unterdeterminanten von (24) jeder wünschbare Aufschluss erhältlich ist. Das Raisonnement des § 2. bildet nur eine Illustration zu gedachtem Verfahren.

Versieht man allgemein die den Kern des nachstehenden Schemas bildende Determinante, welche bekanntlich $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \Delta$ ist, mit dem darum herumgeschriebenen Rand, dessen Hinzutreten ohne Einfluss auf ihren Werth bleibt:

$$(28) \qquad \left|\begin{array}{c|ccc|c} 1, & 0, & 0, & \cdots 0, & 0 \\ 0, & t_1^n, & t_2^n, & \cdots t_n^n, & (-1)^n \\ 0 & t_1^{n-1}, & t_2^{n-1}, & \cdots t_n^{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & t_1^2, & t_2^2, & \cdots t_n^2 & 0 \\ 0 & t_1, & t_2, & \cdots t_n & 0 \\ 0 & 1, & 1, & \cdots 1 & 0 \end{array}\right|,$$

und multiplicirt sie colonnenweise mit der Determinante (26), so erhält man eine Determinante, die geradezu aus dem Schema (24) mit davorgeschriebenen Nullen [wegen (27)] und mit daruntergesetzter Zeile:

$$(-1)^n, \quad (-1)^n \alpha_{0,n}, \cdots (-1)^n \alpha_{n,n}$$

besteht, also durch Ordnungserniedrigung sogleich auf die negativ genommene (24) hinauskommt.

§ 7.

Der *zweite* Determinantensatz behauptet, dass die Elimination der Grössen $X_0, X_1, \cdots X_n$ aus $n+1$ homogenen Gleichungen der Form (26), welche in den Coefficienten α übereinstimmen, dagegen andere und andere t-Systeme in den Combinationssummen der ersten Colonne enthalten, als Resultante eine Gleichung liefert, die erhalten wird, indem man die unter dem Anfangselement 0 in den sämmtlichen Determinanten vom Schema (26) stehenden Elemente als Colonnen zu einer neuen Determinante zusammenfügt und letztere gleich 0 setzt. Vorauszusetzen ist indess hierbei, dass die Determinante der Coefficienten α für sich nicht verschwinde.

Der Beweis dieses zweiten Satzes lässt sich genau so wie in § 3. ohne Weiteres leisten; jedoch sei mir gestattet, einen anderen Beweis hier auszuführen, den ich abermals Herrn Voss verdanke, und der — wenn er auch nicht eben einer kürzeren Darstellung fähig sein möchte — doch in Hinsicht auf Eleganz den Vorzug zu verdienen scheint.

Sei für $x = 0, 1, 2, 3, \cdots n$:

$$(29) \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0, & X_0, & X_1, & \cdots & X_n \\ U_{x0}, & a_{00}, & a_{10}, & \cdots & a_{n0} \\ U_{x1}, & a_{01}, & a_{11}, & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{xn}, & a_{0n}, & a_{1n}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

das System der $n+1$ linearen Gleichungen, aus welchen die Grössen $X_0, X_1, \cdots X_n$ eliminirt werden sollen, so betrachte man folgende aus den D_x durch eine gewisse Art von Ränderung hervorgehende Determinante:

$$(30) \qquad R = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \cdots & 0, & a_{01}, & a_{11}, & \cdots & a_{n1} \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & a_{02}, & a_{12}, & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & a_{0n}, & a_{1n}, & \cdots & a_{nn} \\ 0, & 0, & \cdots & 0, & X_0, & X_1, & \cdots & X_n \\ U_{00}, & U_{10}, & \cdots & U_{n0}, & a_{00}, & a_{10}, & \cdots & a_{n0} \\ U_{01}, & U_{11}, & \cdots & U_{n1}, & a_{01}, & a_{11}, & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{0n}, & U_{1n}, & \cdots & U_{nn}, & a_{0n}, & a_{1n}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

in welcher die $n(n+1)$ Grössen a vorläufig noch willkürliche sein mögen.

Nach einem bekannten Satze zerfällt R in das Product:

$$(31) \qquad (-1)^{n+1} R = P \cdot Q,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$(32) \qquad P = \begin{vmatrix} a_{01}, & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0n}, & \cdots & a_{nn} \\ X_0, & \cdots & X_n \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} U_{00}, & \cdots & U_{n0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{0n}, & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sobald aber die Gleichungen (29) erfüllt sind, kann man — wie ich zeigen werde — über die Grössen a so disponiren, dass $R = 0$ wird, ohne dass P verschwindet. Alsdann muss also auch die Gleichung $Q = 0$ erfüllt sein, und diese wird, da sie die Grössen X nicht mehr enthält, dann selbst die gesuchte Eliminationsresultante vorstellen.

Obiges ist in der That durch folgende Betrachtung einzusehen.

Da die Determinante $(n+2)^{ter}$ Ordnung $D_\varkappa$ gleich 0 ist, so sind die Elemente ihrer Colonnen linear von einander abhängig und giebt es ein System von Werthen:

$$D,\ \mu_{\varkappa 0},\ \mu_{\varkappa 1},\ \cdots\ \mu_{\varkappa n}, \tag{33}$$

welches die Gleichungen erfüllt:

$$\begin{cases} D\cdot 0 + \mu_{\varkappa 0} X_0 + \mu_{\varkappa 1} X_1 + \cdots + \mu_{\varkappa n} X_n = 0, \\ D\cdot U_{\varkappa\lambda} + \mu_{\varkappa 0}\alpha_{0\lambda} + \mu_{\varkappa 1}\alpha_{1\lambda} + \cdots + \mu_{\varkappa n}\alpha_{n\lambda} = 0, \\ \text{für } \lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots n. \end{cases} \tag{34}$$

Man darf z. B. unter den Grössen (33) die auf die Elemente der ersten Zeile von $D_\varkappa$ bezüglichen ersten Unterdeterminanten dieser Determinante verstehen, natürlich mit abwechselnden Zeichen genommen; die erste, D, derselben, die auf das Anfangselement 0 bezügliche Unterdeterminante von $D_\varkappa$, wird alsdann die nämliche sein für alle Indices $\varkappa$; es ist das eben die Determinante der Substitutionscoefficienten α, welche hier von 0 verschieden gedacht werden sollte.

Zur Abkürzung setzen wir noch allgemein, d. h. für $\varkappa = 0,\ 1,\ \cdots n$ und $\lambda = 1,\ 2,\ \cdots n$:

$$\mu_{\varkappa 0}a_{0\lambda} + \mu_{\varkappa 1}a_{1\lambda} + \cdots + \mu_{\varkappa n}a_{n\lambda} = b_{\varkappa\lambda}. \tag{35}$$

Dies vorausgesetzt multipliciren wir die Determinante R (30) in ihrer ersten Colonne mit D, vermehren die so veränderte Colonne um die bezüglich mit den Factoren $\mu_{00},\ \mu_{01},\ \cdots \mu_{0n}$ multiplicirten $n+1$ letzten Colonnen und verfügen über die willkürlichen Grössen a so, dass:

$$b_{02} = 0,\quad b_{03} = 0,\ \cdots\ b_{0n} = 0$$

wird, während b_{01} beliebig von 0 verschieden bleibe. Darnach werden alle Elemente der ersten Colonne Null geworden sein bis auf das Anfangselement b_{01}, und geht also die (mit D multiplicirte) R durch Ordnungserniedrigung über in b_{01} mal der zu diesem Anfangselement gehörigen Unterdeterminante.

Auf diese letztere, also auf die von ihrer ersten Zeile und Colonne befreite Determinante (30) lässt sich aber dasselbe Verfahren noch weiter anwenden. Wir addiren die resp. mit $\mu_{10},\ \mu_{11},\ \cdots \mu_{1n}$ multiplicirten $n+1$ letzten Colonnen zu der nunmehrigen wiederum mit dem Factor D versehenen Anfangscolonne, indem wir uns über die Grössen a weiter so verfügt denken, dass

$$b_{13} = 0,\ \cdots\ b_{1n} = 0$$

ist, während b_{12} beliebig von 0 verschieden bleibe. Im Hinblick auf (34) leuchtet alsdann ein, dass sich abermals die Ordnung der Determinante erniedrigen lässt, und erhalten wir $D^2\cdot R = b_{01}\cdot b_{12}$ mal der von ihren zwei ersten Horizontal- und Verticalreihen befreiten Determinante R.

Führt man so fort, bis man die a noch der Bedingung unterwirft:

$$b_{n-3,n-1} = 0, \quad b_{n-3,n} = 0$$

und schliesslich:

$$b_{n-2,n} = 0,$$

bis man also die (n^{te}) Anfangscolonne mit dem Factor D versehen und um die mit $\mu_{n-1,0}$, $\mu_{n-1,1}$, $\cdots$ $\mu_{n-1,n}$ multiplicirten $n+1$ letzten Colonnen vermehrt hat, so kommt nach Vollzug der Ordnungserniedrigung:

$$D^n R = b_{01} b_{12} b_{23} \cdots b_{n-1,n} D_n, \tag{36}$$

folglich wegen $D_n = 0$ (29) auch

$$R = 0, \tag{37}$$

was wir in erster Linie zu beweisen hatten.

In dem Ausdruck (32) von P haben aber die $n+1$ Grössen a der ersten Zeile gar keine, die der zweiten eine etc., die der vorletzten Zeile haben nur $n-1$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen, nämlich die Grössen $a_{0\lambda}, a_{1\lambda}, \cdots a_{n\lambda}$ überhaupt für $\lambda = 2, 3, \cdots n$ die folgenden Bedingungen:

$$b_{0\lambda} = 0, \quad b_{1\lambda} = 0, \cdots b_{\lambda-2,\lambda} = 0 \tag{38}$$

während $b_{\lambda-1,\lambda}$ jeweils von 0 verschieden sein muss.

Darnach würde es nicht schwer sein nachzuweisen, dass P keineswegs zu verschwinden braucht, sodass also $R = 0$ auch

$$Q = 0 \tag{39}$$

nach sich zieht, q. e. d.

Einfachstes Exempel. Um aus

$$D_0 = \begin{vmatrix} 0, & X, & Y \\ U_0, & \alpha_0, & \beta_0 \\ U_1, & \alpha_1, & \beta_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } D_1 = \begin{vmatrix} 0, & X, & Y \\ V_0, & \alpha_0, & \beta_0 \\ V_1, & \alpha_1, & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

nach dieser Methode X, Y zu eliminiren, betrachte man:

$$R = \begin{vmatrix} 0, & 0, & a, & b \\ 0, & 0, & X, & Y \\ U_0, & V_0, & \alpha_0, & \beta_0 \\ U_1, & V_1, & \alpha_1, & \beta_1 \end{vmatrix},$$

worin a und b beliebig sind und es auch bleiben werden. Man denke nun etwa μ, ν so bestimmt, dass:

$$\mu X + \nu Y = 0, \quad U_0 + \mu \alpha_0 + \nu \beta_0 = 0, \quad U_1 + \mu \alpha_1 + \nu \beta_1 = 0,$$

was nach der ersten Gleichung möglich ist, woferne nur $D = \begin{vmatrix} \alpha_0, & \beta_0 \\ \alpha_1, & \beta_1 \end{vmatrix}$ nicht etwa verschwindet. Vermehrung der ersten Colonne um die mit μ, ν multiplicirte dritte und vierte giebt

$$R = (\mu a + \nu b) \cdot D_1 = 0;$$

aber es ist auch:

$$R = \begin{vmatrix} U_0, & V_0 \\ U_1, & V_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & b \\ X, & Y \end{vmatrix}; \text{ somit muss } \begin{vmatrix} U_0, & V_0 \\ U_1, & V_1 \end{vmatrix} = 0$$

das gesuchte Eliminationsergebniss sein.

Weiter als bis zur Aufstellung der vorstehenden beiden Determinantensätze scheint die Analogie der über rationale Mannigfaltigkeiten im Raume von 2 und von mehr als 2 Dimensionen anzustellenden Untersuchungen sich allerdings noch treiben zu lassen; doch würde mich dies von dem Ziele, das ich mir gegenwärtig gesteckt, zu weit ab führen. Die (im Allgemeinen bekanntlich unicursalen) *cubischen Raumcurven*, deren Theorie wohl auf die Betrachtung des Doppelverhältnisses als eines Parameters schon synthetisch sowie analytisch aufgebaut worden ist, bieten für den nächst höheren Grad sich als Träger der hier betrachteten Mannigfaltigkeit dar. —

§ 8.

Die als Ausdruck des symbolischen Productes gefundene bilinear gebrochene Function (15) lässt sich noch in einigen sehr bemerkenswerthen Formen darstellen; doch muss ich, um die Anführung derselben motiviren zu können, erst etwas weiter ausholen und ein weniges näher eingehen auf die am Eingange dieses Aufsatzes erwähnten Untersuchungen, bei denen ich — in der Verfolgung einer mit den vorstehenden Betrachtungen scheinbar ganz fremdartigen Tendenz — doch auf den Zusammenhang mit diesen hingedrängt wurde.

Ich bezeichne irgend eine Function $f(a, b)$ zweier Veränderlichen symbolisch als ein Product: $a\,(\cdot)\,b$, und die beiden hierzu inversen Functionen, d. h. die Auflösungen (nach a oder b) der Gleichung:

$$a\,(\cdot)\,b = c \tag{40}$$

— welche sonst etwa mit $\varphi(c, b)$ und $\psi(c, a)$ bezeichnet werden müssten — dem entsprechend symbolisch als Quotienten:

$$a = \left(\frac{c}{b}\right), \quad b = c\,(:)\,a. \tag{41}$$

Sobald die symbolische Multiplication nicht commutativ, d. h. die Function $f(a, b)$ nicht symmetrisch ist, müssen letztere Ausdrücke als „Verhältniss“ und „Bruch“ gleichwie die sie erzeugenden Operationen als „Messung“ und „Theilung“ von einander strenge unterschieden werden.

Auf die Vortheile dieser Bezeichnungsweise habe ich schon l. c. aufmerksam gemacht. Sobald eine Verwechselung unsrer drei (symbolischen) Grundoperationen mit der gewöhnlichen oder „eigentlichen" Multiplication und Division nicht zu befürchten steht, kann man die auf ihre Unterscheidung abzielende Einklammerung der Operationszeichen auch noch ersparen. Die Operationen selbst mögen vorderhand alle drei als vollkommen eindeutig (somit auch unbedingt ausführbar) vorausgesetzt werden.

Wir können nun alle allgemeinen Beziehungen, welche zwischen einer solchen Function (40) und ihren beiden inversen Functionen (41) denkbar sind, auch bezeichnen als *formale Gesetze* für die Verknüpfung von Zahlen durch unsre Grundoperationen. Umgekehrt lassen derartige formale Gesetze sich geradezu als *Functionalgleichungen* auffassen, und wird darum später auch von den *„Lösungen"* derselben gesprochen werden können.

Als zu den einfachsten in dieser Art denkbaren formalen Beziehungen gehörig sind nun vor allem ins Auge zu fassen diejenigen 9 Gleichungen, in welchen beiderseits *zwei* allgemeine Zahlen durch *eine* der drei Grundoperationen verknüpft erscheinen. Diese zerfallen in folgende 4 Gruppen von einander gegenseitig bedingenden (symbolisch gemeinten):

$$(42)\qquad \begin{cases} (C_0) & a:b = ab = \frac{b}{a}; \\ (C_1) & ab = ba, \quad a:b = \frac{a}{b}; \\ (C_2) & a:b = b:a, \quad \frac{b}{a} = ba; \\ (C_3) & \frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \quad ab = b:a. \end{cases}$$

Letztere können einerseits einzeln bestehen als vier von einander unabhängige *„Algorithmen"*, als welche sie mit den daneben gesetzten Zeichen benannt werden sollen, andererseits (indem zwei von ihnen stets die beiden andern nach sich ziehen) auch alle vier zusammen — somit einen allgemeineren Algorithmus C_{0123} constituirend. Mit dem Namen eines „Algorithmus" werde hier jedes System von Gleichungen bezeichnet, welche formale Gesetze von Operationen zum Ausdruck bringen, und also beim Studium dieser als Rechenvorschriften benutzt werden können.

Fasst man jedes der vorstehenden Systeme als eine Vorschrift auf, die eine Seite der Gleichungen jederzeit durch die andere zu ersetzen, und zwar ad (C_0) die drei Ausdrücke entweder vorwärts oder rückwärts cyklisch zu vertauschen, so entspringen daraus auch 5 *„Vertauschungsprincipien"*, durch welche aus jedem System von in logischem Zusammenhang mit einander stehendenden Formeln je geschlossen werden kann

auf ein eventuell neues System von ähnlich mit einander zusammenhängenden Formeln — wie denn z. B. nach diesen Principien auch die Gleichungen (C_2) und (C_3) aus (C_1) hervorgehen.

Es gibt nun ferner 990 Gleichungen zwischen *drei* allgemeinen, beiderseits durch *zwei* successive von unsern drei Grundoperationen verknüpften Zahlen.

150 von diesen Gleichungen gelten auch von der gemeinen Multiplication und deren Umkehrungen und werden leicht erhalten, indem man einmal alle diejenigen aus a, b und c zusammengesetzten Elementarausdrücke einander gleich setzt, welche dem Product $a\,(bc)$ gleich sind, ferner diejenigen, welche den Werth $\frac{bc}{a}$ und endlich die, welche den Werth $\frac{a}{bc}$ haben. Die Gesammtheit dieser 150 Gleichungen — nebst ihren eventuellen Consequenzen auf anderweitigen Formelgebieten — habe ich den *Algorithmus der ordinären Algebra* genannt, und werde ihn kürzehalber auch hier mit O_1 bezeichnen. Aus ihm fliessen noch zwei analoge Algorithmen O_2 und O_3 gemäss den Vertauschungsprincipien, nach deren Abzug noch 594 lediglich der extraordinären Algebra angehörige Gleichungen übrig bleiben.

Unter anderm stellte ich mir nun die Aufgabe, aus jedem System von Gleichungen in dem Gebiete der bis jetzt erwähnten 999 erschöpfend alle Consequenzen zu ziehen, welche demselben Gebiete angehören. Ein System solcher Gleichungen möge ein *vollständiges* heissen, wenn von den übrigen keine mehr aus ihnen gefolgert werden kann. Von mehreren in dem angegebenen Sinne completen Algorithmen aber sollen immer diejenigen (es sind ihrer in jedem Falle höchstens sechse) zu einerlei *Art* gerechnet werden, welche nach den Vertauschungsprincipien aus einander abgeschrieben werden können.

Indem ich in der That die sämmtlichen 2^{999} Combinationen der genannten Gleichungen zu irgendwievielen theoretisch nach ihren Consequenzen erledigte (was freilich nur zufolge des glücklichen Umstandes möglich wurde, dass die Zahl der zu untersuchenden sich unterweges fortwährend reduciren liess), stellte sich leicht heraus, dass die Anzahl der innerhalb unsres Gebietes überhaupt möglichen verschiedenen Arten von Algorithmen oder „Gruppen“ von Gleichungen *fünfzig* nicht übersteigen kann.

Eine Hauptschwierigkeit besteht nun aber darin, für die Vollständigkeit eines jeden von diesen Algorithmen auch strenge den *Beweis* zu leisten, was bis jetzt mir erst für 20 und einige Arten derselben gelungen ist; [für die übrigen denke ich wenigstens mit Sicherheit zu zeigen, dass für sie die in Anwendung gebrachte Classe von Mitteln überhaupt nicht zum Ziele führen kann].

Um derzeit einen solchen Nachweis überhaupt liefern zu können, muss man suchen, solche „Lösungen“ des Algorithmus zu entdecken, welche die demselben fremden Gleichungen nicht erfüllen.

Hierzu nun empfiehlt sich vor allem die Form:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{\delta ab + \alpha a + \beta b + \gamma}{\delta_1 ab + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1} \tag{43}$$

einer *bilinear gebrochenen* Function von a und b — als der einzigen algebraischen Function dieser Grössen, die mitsammt ihren Umkehrungen im Allgemeinen eindeutig ist.

Ich habe in der erwähnten Absicht für jeden der Algorithmen seine eventuelle in der Form (43) angebbare Lösung — vorbehaltlich einiger Controluntersuchungen — wirklich bestimmt und so nicht übermässig zahlreiche Ausdrücke von interessantem Bau erhalten, von denen ich nun im Nachfolgenden ein paar zur Sprache bringen will.

§ 9.

Es ist in der That nicht schwierig, wenn auch bisweilen umständlich, die 8 Coefficienten der Function (43) in allgemeinster Weise und unter Wahrung der Symmetrie so (als Functionen unabhängiger willkürlicher Parameter) zu bestimmen, dass irgend welchen formalen Gesetzen durch sie Genüge geleistet werde.

Löst man diese Aufgabe für irgend eine von den ausreichenden Prämissen des Algorithmus O_1, z. B. für eine von den 60 einzelnen Elementargleichungen, wie $(ab)\,c = b\,(ca)$, die ich als solche nachgewiesen habe, oder auch für das System der beiden Gleichungen $ab = ba$ und $a\,(bc) = (ab)\,c$, und andere mehr, so ergeben sich in jedem Falle Ausdrücke, die direct — durch blosse Substitutionen für die *Coefficienten* (nicht aber für die Variabeln a, b) der Form (43) — auf (15) zurückgeführt werden können — wenn anders wir nur, um diesen Ausdruck mit (43) in Einklang zu bringen, dort a und b selbst für t_a und t_b geschrieben denken. Hierin liegt nun aber der Beweis dafür, dass (15) auch die *allgemeinste* Lösung des Algorithmus O_1 im Gebiet der bilinear gebrochenen Functionen (43) sein muss.

Ich werde nun von den so erhältlichen verschiedenen Formen von (15), deren Identität miteinander oft keineswegs auf den ersten Blick erkennbar ist und von denen manche ihre eigenthümlichen Vorzüge besitzen, die bemerkenswerthesten anführen.

Die Form (15) ist homogen in Bezug auf die Parameter t_0, t_1, t_∞, aus denen ihre Coefficienten zusammengesetzt sind, und ihre Variabeln a und b *zusammen*. Eine Form, die bezüglich der Elemente der Coefficienten *für sich* homogen ist, lässt sich wie folgt ableiten.

Es ist schon l. c. von mir bemerkt worden, dass alle formalen Be-

ziehungen sich ungeändert forterhalten, wenn man die Operationsglieder a, b sowohl als deren Ergebnisse $c = a\,(\cdot)\,b$ vermittelst irgend einer sammt ihrer Umkehrung φ^{-1} eindeutigen Function φ einheitlich abbildet — was im Wesentlichen darauf beruht, dass die Zeichen dieser beiden Functionen sich gegeneinander aufheben, dass nämlich $\varphi^{-1}\cdot\varphi = \varphi\cdot\varphi^{-1} = 1$ ist. — Ich zeigte auch, dass in dieser Bemerkung eine Methode liegt, um aus particularen Lösungen eines Algorithmus deren umfassendere abzuleiten.

Speciell wissen wir nun, dass:

$$a\,(\cdot)\,b = ab \text{ und } a\,(+)\,b = a + b \tag{44}$$

richtige Lösungen aller der als Functionalgleichungen aufgefassten formalen Gesetze sind, welche die Eigenschaften der vier Species an allgemeinen Zahlen zum Ausdruck bringen, eines Calculs also, der aus den Eigenschaften O_1 für jede der beiden directen Operationen und aus den distributiven Beziehungen zwischen beiden zusammengesetzt ist.

Nach dem genannten Erweiterungsprincipe müssen daher auch:

$$a\,(\cdot)\,b = \varphi^{-1}\{\varphi(a)\cdot\varphi(b)\} \text{ und } a\,(+)\,b = \varphi^{-1}\{\varphi(a)+\varphi(b)\} \tag{45}$$

Lösungen der Gleichungen jenes Calculs sein; und benutzen wir als Abbildungsprincip die Function:

$$t = \varphi(\tau) = \frac{a_0\tau + a_1}{b_0\tau + b_1}, \text{ also } \tau = \varphi^{-1}(t) = \frac{a_1 - b_1 t}{b_0 t - a_0},$$

so ergibt sich leicht — indem wir so den Weg des § 5. gewissermassen umgekehrt gehen — für die Multiplication:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{(a_0b_1^2 + a_1b_0^2)\,ab - a_0a_1\,(b_0+b_1)\,(a+b) + a_0a_1\,(a_0+a_1)}{b_0b_1(b_0+b_1)\,ab - b_0b_1\,(a_0+a_1)\,(a+b) + a_0^2b_1 + a_1^2b_0} \tag{46}$$

und für die dazu gehörige Addition:

$$a\,(+)\,b = \frac{b_0\,(a_1b_0 - 2a_0b_1)\,ab + a_0^2b_1\,(a+b) - a_0^2a_1}{-b_0^2b_1ab + a_1b_0^2\,(a+b) + a_0\,(a_0b_1 - 2a_1b_0)}. \tag{47}$$

Setzt man in der That:

$$\varrho a_0 = (t_0 - t_1)\,t_\infty, \quad \varrho a_1 = t_0\,(t_1 - t_\infty),$$
$$\varrho b_0 = t_0 - t_1, \quad \varrho b_1 = t_1 - t_\infty,$$

somit:

$$t_0 = \frac{a_1}{b_1}, \quad t_\infty = \frac{a_0}{b_0}, \quad t_1 = \frac{a_0 + a_1}{b_0 + b_1}, \quad \varrho = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0b_1(b_0+b_1)},$$

so geht (46) in (15) und (47) in (17) über. Man kann auch $\varrho = 1$ nehmen, wenn man nur jenen Bruch durch $(t_0 - t_1)\,(t_1 - t_\infty)\,(t_\infty - t_0)$, diesen durch $(t_0 - t_1)^2\,(t_1 - t_\infty)$ reducirt.

In (46) sind — wie schon gesagt, im Gegensatz zu (15) — die Coefficienten von Zähler und Nenner homogene Functionen gleichen

Grades von den willkürlichen Constanten, und zwar sind diese Functionen hier von der dritten Dimension.

Eine Hauptform der Lösung von O_1 ist ferner die folgende durch ihre Einfachheit bemerkenswerthe, worin die homogenen Coefficienten nur vom zweiten Grade sind und p, q, r, x, y die willkürlichen Constanten bedeuten:

$$(48) \qquad a\,(\cdot)\,b = \frac{(rx+qy)ab + px\,(a+b) - py}{-qxab + qy\,(a+b) + ry + px}.$$

Die hierzu inverse Function ist:

$$a\,(:)\,b = \frac{qyab + (ry+px)a - pxb + py}{qxab - pxa + (rx+qy)b + px},$$

und stellt, wie immer, als $a\,(\cdot)\,b$ aufgefasst die Lösung von O_3 und als $b\,(\cdot)\,a$ aufgefasst die Lösung von O_2 zugleich mit vor.

In (15) geht (48) über, wenn man

$$y = t_1 x, \quad r = -(t_\infty + t_0)q, \quad p = t_\infty t_0 q$$

setzt. Umgekehrt ist $t_1 = \frac{y}{x}$, und sind t_∞ und t_0 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$qt^2 + rt + p = 0.$$

Soll die Multiplication zur Addition werden, so müssen diese beiden Wurzeln einander gleich sein, d. h. es muss die Discriminante:

$$D = r^2 - 4pq$$

verschwinden — eine Forderung, die durch die in formaler Hinsicht symmetrische Annahme: $p = \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot \frac{r}{2}$, $q = \frac{\lambda}{\varkappa} \cdot \frac{r}{2}$ auf allgemeine Weise identisch befriedigt wird. Es ist somit:

$$(49) \qquad a\,(+)\,b = \frac{(2\varkappa\lambda x + \lambda^2 y)\,ab + \varkappa^2 x\,(a+b) - \varkappa^2 y}{-\lambda^2 xab + \lambda^2 y\,(a+b) + 2\varkappa\lambda y + \varkappa^2 x}$$

die allgemeine Formel der Addition (wobei nun $t_0 = \frac{y}{x}$, $t_\infty = -\frac{\varkappa}{\lambda}$ bedeutet).

Complicirter jedoch gestaltet sich die Darstellung derjenigen Addition, welche zur Multiplication (48) in distributiver Beziehung steht; diese wird nämlich für $y = \frac{-r+\sqrt{D}}{2q}\,x$, $\varkappa = \frac{r+\sqrt{D}}{2q}\,\lambda$ erhalten:

$$a\,(+)\,b = \frac{q(r+3\sqrt{D})\,ab + (r^2 - 2pq + r\sqrt{D})\,(a+b) + p\,(r+\sqrt{D})}{-2q^2 ab + q\,(-r+\sqrt{D})\,(a+b) + r^2 - 6pq + r\sqrt{D}}.$$

§ 10.

Eine der elegantesten Formen mit im nullten Grade homogenen Coefficienten ist:

$$(50)\quad a\,(\cdot)\,b = \frac{\left(\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}\right)ab+\frac{p_1}{q_1}(a+b)-\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_3}{q_3}}{-\frac{q_1}{p_1}\cdot\frac{q_2}{p_2}\cdot\frac{q_3}{p_3}\,ab+\frac{q_1}{p_1}(a+b)+\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}}.$$

Zu dieser ergeben sich noch zwei analoge Formen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3, welche indessen nur bei dem mittleren Term in Zähler und Nenner eine Aenderung bewirken wird.

In obige der früheren Lösung (15) äquivalente Form (50) geht jene über, indem man den Bruch mit $\sqrt{t_0 t_1 t_\infty}$ kürzt und setzt:

$$\sqrt{\frac{t_1}{t_\infty t_0}}=\frac{p_1}{q_1},\quad -\sqrt{\frac{t_\infty}{t_0 t_1}}=\frac{p_2}{q_2},\quad -\sqrt{\frac{t_0}{t_1 t_\infty}}=\frac{p_3}{q_3},$$

woraus auch leicht umgekehrt t_0, t_1 und t_∞ zu berechnen.

Ein Vorzug dieser Form besteht darin, dass — unter Zusammenfassung aller dreie — der folgende conciseste Ausdruck möglich wird. Sind

$$\frac{p_1}{q_1}=w_1,\quad \frac{p_2}{q_2}=w_2,\quad \frac{p_3}{q_3}=w_3$$

die drei Wurzeln einer cubischen Gleichung:

$$(51)\qquad a_0 w^3+a_1 w^2+a_2 w+a_3=0,$$

und stellt w selbst irgend eine von diesen Wurzeln vor, so ist:

$$(52)\qquad a\,(\cdot)\,b=\frac{-\frac{a_2}{a_3}\,ab+w^1\,(a+b)+\frac{a_3}{a_0}}{\frac{a_0}{a_3}\,ab+w^{-1}(a+b)-\frac{a_1}{a_0}}$$

die allgemeine Lösung von O_1 (im Gebiet der mitsammt ihren Umkehrungen eindeutigen algebraischen Functionen).

Soll diese Multiplication in eine Addition übergehen, so müssen zwei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich werden.

Ich muss endlich noch auf eine letzte Form der Lösung von O_1 zusteuern, auf diejenige nämlich, in welcher die Analogie derselben mit den in ihrer elegantesten Fassung geschriebenen Lösungen von noch anderen Algorithmen am deutlichsten sich ausprägt — wie man dies theilweise schon aus dem Schlussparagraphen dieses Aufsatzes erkennen wird.

Zu dem Ende führe ich zunächst die Form an:

$$a\,(\cdot)\,b=\frac{q}{p}\cdot\frac{\frac{p}{q}(s_2-s_3)ab-(s_2-s_1)(a+b)+\frac{q}{p}(s_2-s_1)}{\frac{p}{q}(s_3-s_1)ab-(s_3-s_4)(a+b)+\frac{q}{p}(s_1-s_1)},$$

welche ausser den [von den früheren in (48) unabhängig zu denkenden] Grössen p und q vier arbiträre Constante zu enthalten scheint, die jedoch auf nur dreie: $s_1 - s_2$, $s_2 - s_3$, $s_3 - s_4$ hinauskommen. Setzt man:

$$\frac{s_2 - s_4}{2} = \varrho\,, \quad s_1 - \frac{s_2 + s_4}{2} = \mu\,, \quad s_3 - \frac{s_2 + s_4}{2} = \nu\,,$$

so ergibt sich die sonach nur scheinbar weniger allgemeine Form:

$$(53)\quad a\,(\cdot)\,b = \frac{q}{p} \cdot \frac{\frac{p}{q}(\varrho-\nu)ab - (\varrho-\mu)a - (\varrho-\mu)b + \frac{q}{p}(\varrho-\mu)}{\frac{p}{q}(\varrho+\nu)ab - (\varrho+\nu)a - (\varrho+\nu)b + \frac{q}{p}(\varrho+\mu)}\,,$$

welche ausser dem oben erwähnten auch noch den Vorzug besitzt, dass für sie die Lösungen von O_2 und O_3 mit der von O_1 auch äusserlich möglichst ähnlichen Bau zeigen — was z. B. ad (48) nicht so sehr der Fall ist; es stellt sich nämlich die Umkehrung derselben wiederum so dar:

$$a\,(:)\,b = \frac{q}{p} \cdot \frac{\frac{p}{q}(\varrho+\nu)ab - (\varrho+\mu)a - (\varrho-\mu)b + \frac{q}{p}(\varrho-\mu)}{\frac{p}{q}(\varrho+\nu)ab - (\varrho+\nu)a - (\varrho-\nu)b + \frac{q}{p}(\varrho-\mu)}\,.$$

In (15) geht (53) über durch die Festsetzung:

$$\frac{q}{p} = t_1\,, \quad \frac{\mu}{\varrho} = \frac{t_1 t_\infty + t_0 t_1 - 2 t_\infty t_0}{t_1 (t_\infty + t_0)}\,, \quad \frac{\nu}{\varrho} = \frac{2 t_1 - t_\infty - t_0}{t_\infty + t_0}\,,$$

und umgekehrt sind t_∞ und t_0 die Wurzeln der Gleichung:

$$(\varrho+\nu)t^2 - 2\varrho t t_1 + (\varrho-\mu)t_1^{\,2} = 0\,.$$

Die symbolische Multiplication (53) wird zur Addition, wenn

$$\varrho\mu - \varrho\nu + \mu\nu = 0 \text{ also } \varrho = \frac{\mu\nu}{\nu-\mu}$$

ist. Darnach liesse der Ausdruck von $a\,(+)\,b$ sich leicht hinschreiben; derselbe stellt sich jedoch — unbeschadet des ins Auge gefassten Zweckes — noch einfacher dar, wenn man zugleich: $\mu = i\varkappa$, $\nu = -i\lambda$, $p = \varkappa p'$, $q = \lambda q'$ setzt, und zwar wird er dann nach Weglassung der Accente:

$$(54)\qquad a\,(+)\,b = \frac{q}{p} \cdot \frac{\frac{p}{q}(2\varkappa+\lambda)ab + \varkappa(a+b) - \frac{q}{p}\lambda}{-\frac{p}{q}\varkappa ab + \lambda(a+b) + \frac{q}{p}(\varkappa+2\lambda)}\,.$$

Es erübrigt noch, ein paar Specialisirungen der gefundenen Formeln hervorzuheben.

Aus (48) folgt als Lösung von O_1 für $r = 0$:

$$(55)\qquad a\,(\cdot)\,b = \frac{qyab + px(a+b) - py}{-qxab + qy(a+b) + px}\,,$$

— eine Form, die, wenn man noch $-p$, $-x$ für p, x setzte, lauter positive Coefficienten annehmen würde.

Lässt man in (48) $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$ werden, setzt man etwa $p = nx$, $q = ny$ und um die Homogeneität zu wahren $r = m^2$, so kommt:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{(m^2x+ny^2)ab + nx^2(a+b) + nxy}{nxyab + ny^2(a+b) + nx^2 - m^2y}. \tag{56}$$

Trifft man nun die Bestimmung [die auf (48) selbst angewendet noch etwas allgemeinere Formen liefern würde], dass der letzte Coefficient im Nenner oder aber der erste im Zähler verschwinde, so ergeben sich, indem u für $\frac{m^2}{nx}$ und v für $-\frac{m^2}{ny}$ geschrieben wird, für unser symbolisches Product die interessanten Formen:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{(1+u^3)ab + u^2(a+b) + u}{uab + a + b}, \tag{57}$$

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{a+b+v}{vab + v^2(a+b) + v^3 + 1}. \tag{58}$$

§ 11.

Zum Theil als Gegenstück zu der von O_1 mögen hier noch die Lösungen der Algorithmen C abgehandelt werden. C_0 zieht 72, C_1 (desgl. C_2 und C_3) zieht 30 und C_{0123} zieht 324 von den 990 vorerwähnten Elementargleichungen nach sich, welche auf drei allgemeine Zahlen Bezug haben, und zusammen mit den respectiven Gleichungen (42) den Hauptinhalt jener fünf Algorithmen C ausmachen.

Die Lösung von C_1, für welche nur $\beta = \alpha$ und $\beta_1 = \alpha_1$ in (43) angenommen zu werden braucht, kann sogleich als bekannt vorausgesetzt werden, desgl. die von C_2 oder C_3, welche hieraus leicht abgeschrieben werden könnten.

Die allgemeine, in der Form (43) enthaltene Lösung des Algorithmus C_{0123} ist der übereinstimmende Bestandtheil, das gemeinsame Gebiet, der drei letzterwähnten Lösungen und kann wie folgt dargestellt werden:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{\delta ab - \varepsilon(a+b) + \gamma}{\eta ab - \delta(a+b) + \varepsilon}. \tag{59}$$

Die einfachste geometrische Deutung, deren dieser Ausdruck fähig ist, ist diese.

Wenn a, b und $c = a\,(\cdot)\,b$ — analog den t_a, t_b und t_{ab} des § 1. — als Punkte einer unicursalen *cubischen* Curve aufgefasst werden, so liegen die drei genannten Punkte in gerader Linie; *das symbolische Product c entspricht* also *dem Schnittpunkte der Curve mit der durch die Factorenpunkte gelegten Geraden.*

Sind nämlich:

$$(60) \qquad \begin{cases} x = \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3, \\ \text{desgleichen } y \text{ in } \beta \text{ und } z \text{ in } \gamma, \end{cases}$$

die Gleichungen der gedachten Curve, so lässt die Bedingung dafür, dass die Punkte $t = a$, $t = b$ und $t = c$ in gerader Linie liegen:

$$(61) \qquad \begin{vmatrix} \alpha(a), & \beta(a), & \gamma(a) \\ \alpha(b), & \beta(b), & \gamma(b) \\ \alpha(c), & \beta(c), & \gamma(c) \end{vmatrix} = 0$$

sich auf die Form bringen:

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} 1, & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \\ -\mathfrak{C}_1, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \mathfrak{C}_2, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ -\mathfrak{C}_3, & \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0 \end{vmatrix} = 0, \text{ in der } \begin{cases} \mathfrak{C}_1 = a + b + c, \\ \mathfrak{C}_2 = bc + ca + ab, \\ \mathfrak{C}_3 = abc \end{cases}$$

bedeutet — wie man am directesten erkennt, indem man die letzte Determinante, analog dem Verfahren des § 2., mit

$$(63) \qquad \begin{vmatrix} 1, & a^3, & b^3, & c^3 \\ 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ 0, & a, & b, & c \\ 0, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = (b-c)(a-c)(a-b)$$

colonnenweise ausmultiplicirt und bemerkt, dass das Product durch Ordnungserniedrigung auf (61) zurückkommt — wie dies übrigens schon anderweitig bekannt ist*).

Stellen D_3, D_2, D_1, D_0 bezüglich die Unterdeterminanten von (62) nach den Elementen der ersten Colonne vor, so lautet diese Gleichung:

$$0 = D_3 + \mathfrak{C}_1 D_2 + \mathfrak{C}_2 D_1 + \mathfrak{C}_3 D_0,$$

und hieraus berechnet sich denn:

$$(64) \qquad c = -\frac{D_1 ab + D_2(a+b) + D_3}{D_0 ab + D_1(a+b) + D_2},$$

ein Ergebniss, aus dessen Vergleichung mit (59) ersichtlich wird, dass die Coefficienten γ, δ, ε, η von jener Form die Bedeutung gewisser aus den Coefficienten von (60) gebildeter Determinanten dritter Ordnung haben.

Eine ähnliche Interpretation lässt, wie a priori zu sehen, der Beziehung (59) sich auch dann geben, wenn die cubische Curve keinen

---

*) Vergleiche: Rosenow, die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, Breslau 1873, und Igel, diese Annalen, Bd. VI, p. 633 sqq.

Doppelpunkt besitzt, also die Coordinaten ihrer Punkte nicht rational, sondern mittelst elliptischer Functionen durch einen Parameter t ausgedrückt werden können*).

Die angeführten geometrischen Interpretationen der den Gesetzen C_{0123} entsprechenden Operation sind zwar die einfachst denkbaren, jedoch selbstverständlich nicht die einzig möglichen. Man kann z. B. — um noch einer andern Interpretation zu erwähnen — den Ausdruck $c = a\,(\cdot)\,b$ der Gleichung (59) entsprechend auch an Würfen auf einem Kegelschnitt nach den von v. Staudt'schen Regeln construiren. Für die weiter unten hervorgehobenen Specialfälle (68) und (69), welche gewissermassen — so, wie (21) und (22) für O_1 — die kanonischen Formen der Lösung (59) vorstellen, fällt diese Construction (besonders die von $c = -a-b$) in der That noch leidlich einfach und übersichtlich aus.

§ 12.

Ich erlaube mir noch, auf eine auffallende *Analogie* zwischen den Lösungen der Algorithmen O_1 und C_{0123} aufmerksam zu machen.

Diese Analogie zeigt sich einestheils darin, dass die Form:

$$(65)\qquad a\,(\cdot)\,b = \frac{q}{p}\cdot\frac{-\frac{p}{q}\,\lambda ab + \varkappa(a+b) + \frac{q}{p}(2\varkappa+\lambda)}{\frac{p}{q}(\varkappa+2\lambda)ab + \lambda(a+b) - \frac{q}{p}\varkappa},$$

welche sich von (54) nur dadurch unterscheidet, dass die einen Factoren gewisser (der dortigen Eck-) Coefficienten ihren Platz gewechselt zu haben scheinen, sich als eine particulare Lösung von C_{0123} erweist. Und zwar repräsentirt der Ausdruck (65) vollständig die Lösung (59) für den Fall:

$$(66)\qquad (\gamma\eta - \delta\varepsilon)^2 = 4\,(\delta^2 - \varepsilon\eta)\,(\varepsilon^2 - \gamma\delta),$$

der somit gewissermassen der von v. Staudt'schen Addition hier entspricht. Ich werde diesen Fall später auch noch anderweitig als das Gegenstück von (54) zu citiren haben.

Auf der andern Seite lässt sich auch die allgemeine Lösung (59) von C_{0123} in der Form schreiben:

$$(67)\qquad a\,(\cdot)\,b = \frac{q}{p}\cdot\frac{\frac{p}{q}(\varrho-\mu)ab - (\varrho-\mu)(a+b) + \frac{q}{p}(\varrho-\nu)}{\frac{p}{q}(\varrho+\mu)ab - (\varrho+\nu)(a+b) + \frac{q}{p}(\varrho+\nu)},$$

welche zu der allgemeinen Lösung (53) von O_1, d. i. zu dem Ausdruck

*) Vergl. die Abhandlung von A. Harnack, diese Annalen Bd. IX, p. 1 sqq., und die daselbst citirten Arbeiten von Aronhold und Clebsch.

der von v. Staudt'schen Multiplication in einer ähnlichen Beziehung steht, wie (65) zu (54).

Eine auf diese Umstände gegründete Vermuthung, dass sich nun auch zwischen den obigen zwei Lösungen (65) und (67) von C_{0123} ein distributiver Zusammenhang werde herstellen lassen (dadurch, dass man die Coefficienten der einen Form in passender Art abhängig machte von denen der andern), stellt sich jedoch als unzutreffend heraus.

Der direct nur äusserst mühsam durchführbare Nachweis hiefür ist leicht auf folgendem wohl an sich nicht uninteressanten Wege zu liefern.

Durch eine passend gewählte lineare Substitution nach Art der sub (45) angegebenen kann die zwischen a, b und $a(\cdot)b = c$ angenommene specielle Beziehung (65) stets auf die ihren einfachsten Specialfall bildende Form:

$$a + b + c = 0 \tag{68}$$

gebracht werden.

Die allgemeinere Beziehung (67) oder (59) dagegen lässt so sich nur in:

$$a + b + c = k \tag{69}$$

transformiren, in welcher Gleichung die Constante k einen von 0 verschiedenen Werth besitzt.

Da nun nach der im § 9. vorangeschickten Bemerkung unsre formalen Beziehungen durch eindeutige Abbildung nicht alterirt werden, so müsste ein distributiver Zusammenhang zwischen den Operationen (65) und (67) auch einen solchen zwischen den Lösungen von (68) und (69) bedingen, und umgekehrt.

Wenn wir aber die rechte Seite 0 von (68) — noch etwas verallgemeinernd — durch eine beliebige Zahl l ersetzen und symbolisch für den Augenblick die Lösung dieser Gleichung:

$$l - a - b \text{ mit } a(+)b,$$

sowie die Lösung von (69):

$$k - a - b \text{ mit } a(\times)b$$

bezeichnen, so führt die Annahme eines distributiven Zusammenhanges zwischen diesen beiden Operationen $(+)$ und $(\times)$:

$$a(\times)\{b(+)c\} = \{a(\times)b\}(+)\{a(\times)c\}$$

zu der Gleichung:

$$k - a - (l - b - c) = l - (k - a - b) - (k - a - c)$$

oder:

$$3k = 2l + 3a,$$

welche durch keine Art der Verfügungsweise über die Constanten k und l allgemein, d. i. für alle möglichen a, b und c erfüllt werden kann.

Demnach ist überhaupt auch zwischen *irgend* zwei Lösungen von C_{0123} kein distributiver Zusammenhang möglich.

Gleichwohl erstreckt die in der Form zu Tage getretene Analogie zwischen den Lösungen von O_1 und von C_{0123} sich auf die sämmtlichen Particularlösungen der beiden, und ist z. B.

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{-qyab + px(a+b) + py}{qxab + qy(a+b) - px} \tag{70}$$

auch die zu (55) entsprechende Lösung von C_{0123}.

Ausser der in (59) mitgegebenen commutativen Lösung von C_0 gibt es noch zwei nicht commutative Lösungen dieses Algorithmus, nämlich:

$$a\,(\cdot)\,b = \frac{\delta ab + \varepsilon e^{\frac{\pi i}{3}}\, a + \varepsilon e^{-\frac{\pi i}{3}}\, b}{\delta e^{-\frac{\pi i}{3}}\, a + \delta e^{\frac{\pi i}{3}}\, b + \varepsilon}, \tag{71}^{+}$$

und $(71)^{-}$ desgleichen, $-i$ für i gesetzt, für welche indessen eine anschauliche geometrische Interpretation noch nicht aufgesucht worden ist.

Ich schliesse mit der Bemerkung, dass ungeachtet der erwähnten Verwandtschaften die angegeben Lösungen von C_0 (71), C_{0123} (59), O_1, O_2 und O_3 (15 sqq.) unter sich völlig disparat sind; sie haben kein gemeinsames Lösungsgebiet, oder die disponiblen Constanten in ihnen können nicht so bestimmt werden, dass irgend zwei derselben einander gleich werden.

Darmstadt, December 1875.

Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung.

Von H. Schubert in Hamburg.

Bekanntlich gilt bei der quadratischen Fläche F_2 der Satz, dass die Zahl derjenigen Flächen eines beliebigen einstufigen*) Systems, welche eine beliebige einfache Bedingung B_1 befriedigen, immer gleich

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

ist, wo die Zahl

μ angiebt, wieviel Flächen des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen,

ν angiebt, wieviel eine gegebene Gerade berühren,

ϱ angiebt, wieviel eine gegebene Ebene berühren,

α, β, γ aber Zahlen sind, welche nur von der Natur der Bedingung B_1 abhängen.

Dieser Satz lässt sich nun, wie beim Kegelschnitt, so auch bei der quadratischen Fläche, von einstufigen Systemen und einfachen Bedingungen, auf mehrstufige Systeme und mehrfache Bedingungen *erweitern*. Um den erweiterten Satz bequem aussprechen zu können, schicke ich die folgenden Definitionen voraus.

„Für ein a-stufiges System von quadratischen Flächen bezeichne immer das Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Zahl derjenigen Flächen des Systems, welche durch b gegebene Punkte gehen, c gegebene Gerade und $a-b-c$ gegebene Ebenen berühren. Dann sind

$$\tfrac{1}{2}(a+1)\cdot(a+2)$$

solcher Symbole möglich, und diese sollen die *a-fachen Charakteristiken* der F_2 heissen. Ferner soll ein *elementarer Modul* einer der F_2 auf-

*) Die allgemeinen Grundzüge der in dieser Abhandlung benutzten *Terminologie* und *Symbolik* habe ich im I. Abschnitt meiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie“ (Math. Ann. Bd. X, p. 1) auseinandergesetzt. Für diese oft citirte Abhandlung werde ich die Abkürzung „Beitr.“ gebrauchen.

erlegten a-fachen Bedingung B_a eine solche ganze lineare Function der a-fachen Charakteristiken bedeuten, welche in *jedem* beliebigen a-stufigen Systeme die Zahl der die Bedingung B_a befriedigenden Flächen auszudrücken vermag, oder, was dasselbe ist, welche angiebt, wieviel Flächen die Bedingung B_a und ausserdem eine ganz *beliebig* gewählte $(9-a)$-fache Bedingung Z erfüllen, sobald man für jedes in dem Modul vorhandene Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Anzahl der Flächen einsetzt, welche durch b gegebene Punkte gehen, c Gerade berühren, $a-b-c$ Ebenen berühren, und ausserdem jene Bedingung Z erfüllen."

Mit Hülfe dieser Definitionen kann man den oben erwähnten erweiterten Satz so aussprechen:

„Jede einer F_2 auferlegte a-fache Bedingung besitzt mindestens Einen elementaren Modul." *)

Ist im speciellen Falle die a-fache Bedingung aus *a einfachen*, sogenannten trennbaren, Bedingungen zusammengesetzt, so erhält man ihren elementaren Modul aus den Moduln dieser einfachen Bedingungen durch das Verfahren, welches ich in meinen Beitr. (§ 3.) *„symbolische Multiplication"* genannt habe. Ist dagegen die a-fache Bedingung nicht in Bedingungen erster Dimension zerlegbar, so ist auch die Herstellung ihrer elementaren Moduln schwieriger, und bisher wohl nur in wenigen Fällen gelungen.

Im Folgenden sind nun die elementaren Moduln einer gewissen Gruppe solcher unzerlegbarer Bedingungen abgeleitet. Wir definiren die dieser Gruppe angehörigen Bedingungen schon hier in der Einleitung.

Die beiden Schaaren der ∞^1 ganz in einer F_2 liegenden Geraden haben bekanntlich die Eigenschaft, dass jede Gerade der einen Schaar jede Gerade der andern Schaar, aber keine derselben Schaar *schneidet*. Ordnet man also jeder Geraden der einen Schaar jede Gerade der andern Schaar zu, so erhält man auf jeder quadratischen Fläche ein *zweistufiges* System von Gebilden, deren jedes aus zwei sich schneidenden Geraden, deren Schnittpunkt und deren Schnittebene besteht. Ein solches Gebilde soll *Geradenpaar* und einer F_2 *angehörig* heissen, wenn seine beiden Geraden ganz in der F_2 liegen. Da jede F_2 ∞^2 Geradenpaare besitzt, so enthält ein a-stufiges System von

*) Dieser Satz ist wohl zuerst von Halphen bemerkt (Bull. de la Soc. math. de France, Bd. II und Comptes rendus, Bd. 76, p. 1074—1077). Sein Analogon bei Kegelschnitten ist ausser von Halphen auch von Cremona (C. R. Bd. 59, p. 776), Clebsch (Math. Annalen Bd. VI, p. 1) und namentlich von Lindemann (Vorles. üb. Geom. v. Clebsch, p. 403 u. f.) behandelt.

quadratischen Flächen ein $(a+2)$-stufiges System von Geradenpaaren. Folglich ist die Bedingung, welche eine F_2 dadurch erfüllt, dass eins ihrer Geradenpaare eine $(a+2)$-fache Bedingung erfüllt, für diese F_2 a-fach. Wenn man also das Geradenpaar, welches die Constantenzahl 7 hat, allen möglichen drei- bis siebenfachen *Grundbedingungen**) unterwirft, so erwachsen dadurch in der angegebenen Weise der F_2 gewisse ein- bis fünffache Bedingungen, welche wir die *Paarbedingungen* der F_2 nennen wollen. Demgemäss kann das in dieser Abhandlung gelöste Problem so ausgesprochen werden:

„Die elementaren Moduln aller Paarbedingungen der quadratischen Fläche abzuleiten."

Ich lasse hier einen solchen Modul folgen, und füge hinzu, was er bedeutet, um so das Verständniss meiner Symbole zu erleichtern.

Die Bedingung, dass von einem Geradenpaar eine der beiden Geraden, der Schnittpunkt und die Schnittebene gegeben sei, ist für das Geradenpaar sechsfach, und ergiebt für die F_2 die vierfache Paarbedingung y, eine Gerade so zu enthalten, dass einem auf ihr gegebenen Punkte eine gegebene durch sie gehende Tangentialebene angehört. Einer der elementaren Moduln dieser Paarbedingung ist:

$$y = \tfrac{1}{4}\nu^4 - \tfrac{3}{8}\nu^3\mu - \tfrac{3}{8}\nu^3\varrho + \tfrac{3}{8}\nu^2\mu^2 + \tfrac{1}{4}\nu^2\mu\varrho + \tfrac{3}{8}\nu^2\varrho^2 - \tfrac{1}{4}\nu\mu^3 - \tfrac{1}{4}\nu\varrho^3.$$

Dies hat nun folgenden Sinn. Man erhält die Anzahl der quadratischen Flächen, welche die Bedingung y und ausserdem eine ganz beliebige einzelne oder zusammengesetzte fünffache Bedingung B_5 erfüllen, wenn man für jedes der hier vorkommenden 8 Symbole

$$\mu^b\nu^c\varrho^{4-b-c}$$

die Zahl der Flächen einsetzt, welche B_5 erfüllen, und ausserdem durch b Punkte gehen, c Gerade und $4-b-c$ Ebenen berühren. Ist z. B. B_5 die Bedingung, 5 Gerade zu berühren, so hat man zu substituiren:

für ν^4 die Zahl der 9 Gerade berührenden Flächen,

für $\nu^3\mu$ die Zahl der 8 Gerade berührenden und durch 1 gegebenen Punkt gehenden Flächen, etc. etc.,

endlich für $\nu\varrho^3$ die Zahl der 6 Gerade und 3 Ebenen berührenden Flächen.

Man erhält so

$$12$$

als die *Anzahl der quadratischen Flächen, welche 5 gegebene Gerade berühren, und eine gegebene Gerade so enthalten, dass eine gegebene*

---

*) Die 14 *Grundbedingungen* sind in § 5. und § 6. meiner Beitr. aus den 14 *Grundgebilden* abgeleitet. Die sämmtlichen Grundbedingungen, welche dem Geradenpaar auferlegt werden können, sind hier in § 2. angegeben.

durch sie gehende Ebene in einem gegebenen auf ihr liegenden Punkte berührt wird.

Die eben benutzten Zahlen, welche angeben, wieviel F_2 durch b Punkte gehen, c Gerade und $9 - b - c$ Ebenen berühren, sind die *Elementarzahlen* der quadratischen Flächen. Dieselben sind wohl zuerst von Chasles (C. R. 1865) erwähnt, dann von Zeuthen (Oversigt over d. K. V. Selsk. Forh. 1866) und später auch vom Verfasser (Borch. J. Bd. 71, p. 366) bewiesen.

Bei der Ableitung der elementaren Moduln der Paarbedingungen der F_2 sind namentlich angewendet:

1) die in § 8. und § 9. meiner Beitr. bewiesenen *allgemeinen Relationen*, welche erstens *zwischen den Grundbedingungen* eines einzigen Hauptelementes (Punkt, Ebene, Strahl), und zweitens zwischen den Grundbedingungen je zweier Hauptelemente bestehen müssen, welche die specielle Lage zu einander haben, dass das eine in dem andern liegt;
2) die im III. Abschnitt meiner Beitr. gegebene allgemeinere Auffassung des *Correspondenzprincips*, oder specieller, die aus Formel (56) in § 20. meiner Beitr. durch symbolische Multiplication hervorgehenden Formeln;
3) zur Bestätigung der gewonnenen Moduln das in § 7. der Beitr. erörterte fruchtbare *Princip der speciellen Lage*.

Jedoch sind die eben angeführten Hülfsmittel vor ihrer Anwendung in dieser Abhandlung immer noch einmal erläutert resp. bewiesen, so dass die vorliegende Abhandlung ein genaueres Studium der Beitr. nicht vorauszusetzen braucht.

Im Laufe der Untersuchung werden mehrere Male zwei *Relationen* zum Vorschein kommen, durch welche die 15 vierfachen Charakteristiken der F_2 von einander abhängen. Im Anschluss an diese Resultate werden *alle* Relationen besprochen, welche zwischen den Charakteristiken der F_2 bestehen. Dabei wird auch gezeigt, dass bei der quadratischen Fläche *nie mehr als*

3 *einfache*, 3 *achtfache*,
6 *zweifache*, 6 *siebenfache*,
10 *dreifache*, 10 *sechsfache*,
13 *vierfache*, 13 *fünffache*

Bedingungen von einander unabhängig sind, wenn hier jedesmal unter den n a-fachen Bedingungen die *Zahlen* verstanden werden, welche angeben, wieviel Flächen eines beliebigen a-stufigen Systems diese n Bedingungen erfüllen.

Die bei dieser Gelegenheit gleichfalls abgeleiteten *analogen Resultate für Kegelschnitte im Raume* sind *Verallgemeinerungen* von gewissen

Resultaten, welche in Clebsch-Lindemann's Werke (p. 403 u. f.) enthalten sind, z. B. von der Formel (11) auf p. 406 dieses Werkes.

---

§ 1.

Die Bedingungssymbolik.

Wie schon in der Einleitung erwähnt ist, findet man die auch in der vorliegenden Abhandlung angewandte Bedingungssymbolik im I. Abschnitt meiner *„Beiträge zur abzählenden Geometrie"* (Math. Ann. Bd. X, p. 8 bis 23) auseinandergesetzt, und im II. und III. Abschnitte für gewisse fundamentale Probleme der abzählenden Geometrie verwerthet. Diejenigen Grundregeln dieser Symbolik, welche für das Verständniss des Folgenden am wichtigsten sind, werden hier noch einmal kurz zusammengestellt.

1) Jede definirte *einzelne*, d. h. nicht zusammengesetzte Bedingung erhält als *Symbol* einen Buchstaben mit oder ohne Index.

2) Die Gesammtheit zweier von einander *abhängiger* Bedingungen wird stets als nur *Eine einzelne* Bedingung aufgefasst.

3) Das *Product mehrerer Bedingungssymbole* bedeutet diejenige *zusammengesetzte* Bedingung, welche verlangt, dass die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen.

4) Die n^{te} *Potenz eines Bedingungssymbols* bedeutet demgemäss, dass die von diesem Symbol bezeichnete Bedingung $n$mal erfüllt werden soll. Dabei ist die gegenseitige Lage der n Gebilde, welche diese $n$mal zu erfüllende Bedingung etwa verursachen sollten, ganz allgemein zu denken.

5) Giebt die Definition eines Gebildes demselben die *Constantenzahl* c — z. B. $c = 9$ bei der quadratischen Fläche —, so bildet die Gesammtheit aller derjenigen Gebilde dieser Definition, welche eine gewisse a-fache einzelne oder zusammengesetzte Bedingung erfüllen, ein *System* $(c-a)^{ter}$ *Stufe*, d. h. von ∞^{c-a} Elementen.

6) Jeder a-fachen Bedingung ist hinsichtlich eines hinzuzudenkenden Systems a^{ter} Stufe eine gewisse *Anzahl angehörig*, nämlich die Zahl derjenigen Gebilde des Systems, welche diese Bedingung erfüllen. *Das Symbol einer Bedingung bedeutet zugleich auch die zugehörige Anzahl.*

7) Wenn hinsichtlich *jedes* a-stufigen Systems eine Gleichung zwischen den *Anzahlen* besteht, welche gewissen Bedingungen angehören, so nennen wir, der Kürze wegen, *diese Bedingungen selbst* durch die Gleichung von einander *abhängig*, ferner die Gleichung eine *allgemeingültige**) *Formel*, und die *Function*, welche eine Bedingung von andern Be-

---

*) In der vorliegenden Abhandlung treten nur *allgemeingültige* Formeln auf.

dingungen abhängig darstellt, einen *allgemeingültigen**) *Modul* dieser Bedingung.

8) Aus einer für ein Gebilde mit der Constantenzahl c aufgestellten, allgemeingültigen Formel a^{ter} *Dimension*, d. h. zwischen a-fachen Bedingungssymbolen, erhält man also immer eine Identität, wenn jedes dieser Symbole gleich der Zahl der Gebilde gesetzt wird, welche die von dem Symbol dargestellte a-fache Bedingung und ausserdem eine *beliebig gewählte* einzelne oder zusammengesetzte $(c-a)$-fache Bedingung erfüllen.

9) Hieraus folgt, dass die Allgemeingültigkeit einer allgemeingültigen Formel nicht beeinträchtigt wird, wenn jedem der durch sie verbundenen a-fachen Bedingungssymbole *ein und dasselbe*, sonst ganz beliebige Bedingungssymbol — als symbolischer Factor — hinzugesetzt wird, oder, wie wir sagen (Beitr. § 3.), wenn die Formel mit irgend einer Bedingung *symbolisch multiplicirt* wird. Das entgegengesetzte Verfahren — symbolische Division —, oder das Weglassen eines und desselben symbolischen Factors aus allen Symbolen einer Formel, ist, wie man leicht einsieht, im Allgemeinen *nicht* gestattet.

§ 2.

Tabelle der Grundbedingungen des Geradenpaars.

Die Bedingungen, deren elementare Moduln bei der F_2 im Folgenden abgeleitet werden sollen, ergeben sich, wie in der Einleitung erläutert ist, in gewisser Weise aus den sämmtlichen Grundbedingungen des *Geradenpaars***). Wir beschäftigen uns daher zunächst mit den Grundbedingungen des Geradenpaars ganz ohne Rücksicht auf die speciellen Geradenpaar-Systeme, welche durch Systeme von quadratischen Flächen erzeugt werden.

Wenn man den einen Strahl des Geradenpaars g, den andern h, den Schnittpunkt p, die Schnittebene e nennt, so hat man, gemäss der am Schluss von § 5. der Beitr. gegebenen Bezeichnungsregel, die 16 *einzelnen* Grundbedingungen des Geradenpaars so zu bezeichnen, wie hier folgt:

1) g = Strahl g soll eine Gerade schneiden,
2) g_p = Strahl g soll durch einen Punkt gehen,
3) g_e = Strahl g soll in einer Ebene liegen,
4) g_s = Strahl g soll einem Strahlbüschel angehören,

---

*) In der vorliegenden Abhandlung treten nur *allgemeingültige* Moduln auf.

**) Dieses Gebilde ist in den Beitr. (§ 18. und § 20.) unter dem Namen „*Schneidepaar*" als Ausartung des durch zwei im Allgemeinen sich nicht schneidende Strahlen erzeugten, allgemeineren Strahlenpaares behandelt.

5) G = Strahl g soll gegeben sein,
6), 7), 8), 9), 10) die aus diesen 5 Bezeichnungen durch Einsetzung von h für g hervorgehenden Bezeichnungen,
11) p = Punkt p soll in einer Ebene liegen,
12) p_g = Punkt p soll in einer Geraden liegen,
13) P = Punkt p soll gegeben sein,
14) e = Ebene e soll durch einen Punkt gehen,
15) e_g = Ebene e soll durch eine Gerade gehen,
16) E = Ebene e soll gegeben sein.

Setzt man diese 16 Symbole der 16 einzelnen Grundbedingungen auf alle mögliche Weise zusammen, so erhält man die Symbole aller möglichen *zusammengesetzten* Grundbedingungen.

Z. B.

eg_ph = der Strahl g des Geradenpaars soll durch einen Punkt gehen, während der Strahl h eine Gerade schneiden, und die Ebene e einem Ebenenbündel angehören soll.

Da im Geradenpaare die beiden Strahlen g und h vollkommen gleichberechtigt sind, so folgt durch Vertauschung von g und h aus jedem für einen der beiden Strahlen gewonnenen Resultate ein Resultat auch für den andern Strahl. Desshalb ist von zwei Resultaten, welche durch Vertauschung von g und h in einander übergehen, meist nur das eine angegeben.

Im Anschluss an die in den Beitr. angewandte Terminologie bezeichnen wir das *Grundgebilde* — Punkt, Ebene, Strahl, Bündel, Feld, Axe, Strahlbüschel —, durch welches eine Grundbedingung verursacht wird, als dieser Grundbedingung *angehörig*.

Z. B.

„Der Punkt *von* g_p" bedeutet den Punkt, durch welchen, der Bedingung g_p zufolge, der Strahl g gehen soll.

„Die Axe *von* e^2" bedeutet die Gerade, durch welche, der Bedingung e^2 zufolge, die Ebene e gehen muss.

§ 3.

Die Formeln zwischen den auf ein einziges Hauptelement bezüglichen Grundbedingungen des Geradenpaars.

Für die 4 Hauptelemente g, h, p, e des Geradenpaars gelten zunächst die allgemeinen Formeln des § 8. in den Beitr. Da nämlich das Geradenpaar nur Einen Punkt p enthält, so ist die Bedingung p^2, dass der Punkt p auf *zwei* Ebenen liegen soll, identisch mit der Bedingung p_g, dass er auf einer Geraden liegen soll.

Daher ist

$$p^2 = p_g,$$

und ebenso folgt:

$$p^3 = P, \quad e^2 = e_g, \quad e^3 = E.$$

Wir werden desshalb immer p^2 statt p_g, p^3 statt P, e^2 statt e_g, e^3 statt E schreiben.

Ertheilt man ferner den beiden Axen der Bedingung g^2 die besondere Lage zweier *sich schneidender* Geraden, so wird die Bedingung g^2 nur in zwei Fällen erfüllt, erstens, wenn der Strahl g durch den Schnittpunkt geht, zweitens, wenn er in der Schnittebene liegt. Man erhält daher nach dem Princip der speciellen Lage (Beitr. § 7.):

$$g^2 = g_p + g_e.$$

Die Formeln höherer Dimension zwischen den Grundbedingungen des Strahls g ergeben sich dann, wie folgt:

$$gg_p = gg_e = g_s = \tfrac{1}{2}g^3,$$
$$g_pg_p = g_eg_e = g_pg^2 = g_eg^2 = gg_s = G = \tfrac{1}{2}g^4,$$
$$g_pg_e = 0.$$

Durch Einsetzung von h für g erhält man die analogen Formeln zwischen den Grundbedingungen des Strahls h.

Jede Formel darf mit jeder Geradenpaar-Bedingung *symbolisch multiplicirt* werden, da das bei jeder Formel vorauszusetzende System gar keiner Beschränkung unterlag.

Z. B.

aus $g^3 = 2g_s$ und $h^3 = 2h_s$ folgt die Formel:

$$g^3h^3 = 4g_sh_s;$$

aus $g^2 = g_p + g_e$ und $h^2 = h_p + h_e$ folgt die Formel:

$$g^2h^2 = g_ph_p + g_ph_e + g_eh_p + g_eh_e.$$

§ 4.

Die sonstigen Formeln zwischen den Grundbedingungen des Geradenpaars.

Zwischen den Grundbedingungen je zweier der 4 Hauptelemente g, h, p, e, welche das Geradenpaar constituiren, müssen ferner alle die in § 9. meiner Beitr. bewiesenen Relationen bestehen, da je zwei der 4 Hauptelemente diejenige specielle Lage zu einander haben, welche für die Gültigkeit jener Relationen allein erforderlich war. Punkt p liegt nämlich auf Strahl g und auf Strahl h, Ebene e geht durch Strahl g und durch Strahl h; also liegt auch p auf e, und g schneidet h. Diese Relationen kann man sämmtlich durch das *Verfahren der symbolischen Multiplication* und durch Benutzung der Formeln des § 3. aus nur zwei Formeln herstellen. Diese zwei Formeln sind einander reciprok, und heissen:

$$pg = g_e + p^2 ,$$
$$eg = g_p + e^2 .$$

Die erste erhält man aus dem Princip der speciellen Lage dadurch, dass man bei der zusammengesetzten Bedingung pg die Axe der Bedingung g in das Feld der Bedingung p legt, und beachtet, dass dann die Bedingung pg nur erfüllbar wird

erstens, wenn der Strahl g in jenem Felde liegt, also die Bedingung g_e befriedigt wird,

zweitens, wenn der Punkt p auf jener Axe liegt, also die Bedingung p^2 erfüllt wird.

Aus der eben bewiesenen und der ihr reciproken Formel können nun bei Benutzung der Formeln des § 3. alle Grundbedingungs-Formeln höherer Dimension *auf rein arithmetischem Wege* gewonnen werden, nämlich durch symbolische Multiplication mit Grundbedingungen und durch geeignete Eliminationen. Von diesen Formeln höherer Dimension lassen wir hier einige folgen (Beitr. p. 27):

$$pg_p = g_s + p^3 ,$$
$$eg_e = g_s + e^3 ,$$
$$peg = g_s + pe^2 + p^3 ,$$
$$peg = g_s + p^2 e + e^3 ,$$
$$p^3 - p^2 e + pe^2 - e^3 = 0 ,$$
$$pg_s = p^2 g_p = p^2 eg - p^2 e^2 = G + p^3 g ,$$
$$eg_s = e^2 g_e = e^2 pg - p^2 e^2 = G + e^3 g ;$$

und:

$$\begin{aligned} pegh &= (g_p + e^2)(h_e + p^2) \\ &= g_p h_e + pg_s + eh_s + p^2 e^2 , \\ pegh &= (g_e + p^2)(h_p + e^2) \\ &= g_e h_p + ph_s + eg_s + p^2 e^2 . \end{aligned}$$

§ 5.

Alle Grundbedingungen des Geradenpaars, ausgedrückt durch gewisse unter ihnen.

Vermöge der in § 3. und § 4. besprochenen Formeln kann man durch gewisse Grundbedingungen des Geradenpaares alle übrigen leicht ausdrücken. Wir zählen daher zunächst eine Reihe von Grundbedingungen auf, die wir die *irreducibeln* nennen, um dann durch sie alle übrigen, *reducibel* genannten Grundbedingungen auszudrücken. Die römischen Nummern vor den in der folgenden Tabelle zusammengestellten irreducibeln Grundbedingungen geben die Dimensionen derselben an. Die aus den angeführten Grundbedingungen durch Ver-

tauschung von g und h hervorgehenden *neuen* Grundbedingungen sind fortgelassen.

Tabelle der irreducibeln Grundbedingungen.

I) $g,\ p,\ e$;
II) $g_p,\ g_e,\ gh,\ p^2,\ pe,\ e^2$;
III) $g_s,\ eg_p,\ pg_e,\ g_ph,\ g_eh,\ p^3,\ e^3,\ p^2e,\ pe^2$;
IV) $G,\ pg_s,\ eg_s,\ g_sh,\ g_ph_p,\ g_eh_e,\ g_ph_e,\ pe^3,\ p^3e$;
V) $pG,\ eG,\ Gh,\ g_sh_p,\ g_sh_e,\ p^2e^3$;
VI) $peG,\ Gh_p,\ Gh_e$;
VII) Gh_s.

Es würde hier zuviel Raum kosten, wenn wir jetzt die reducibeln Grundbedingungen sämmtlich durch die irreducibeln ausdrücken wollten. Wir begnügen uns damit, diese *Reduction* an einigen Beispielen zu zeigen.

1) Um die Bedingung pgh zu reduciren, ersetzen wir

$$pg \text{ durch } p^2 + g_e,$$

und erhalten:

$$p^2h + g_eh;$$

dann ersetzen wir:

$$ph \text{ durch } p^2 + h_e,$$

und erhalten also schliesslich das Resultat:

$$pgh = p^3 + ph_e + g_eh;$$

hieraus folgt durch Vertauschung von g und h noch eine zweite Reduction:

$$pgh = p^3 + pg_e + gh_e.$$

2) Um die Bedingung p^2eg zu reduciren, ersetzen wir

$$eg \text{ durch } e^2 + g_p,$$

und erhalten:

$$p^2e^2 + p^2g_p;$$

nun ist:

$$p^2e^2 = p^3e + pe^3 \text{ (Beitr. p. 28 in der Mitte)},$$
$$pg_p = p^3 + g_s, \text{ also } p^2g_p = pg_s;$$

daher kommt:

$$p^2eg = p^3e + pe^3 + pg_s.$$

3) $$\begin{aligned} pegh_e &= (pg)(eh_e) = (p^2 + g_e)(e^3 + h_s) \\ &= e^3p^2 + g_eh_s + p^2h_s + e^3g_e \\ &= e^3p^2 + g_eh_s + p(H + p^3h) + e(G + e^3g) \\ &= e^3p^2 + g_eh_s + pH + eG; \end{aligned}$$

4) $g_s h_s = (pg_p - p^3)h_s = pg_p h_s = g_p(H + p^3 h)$
$= g_p H + p^3 g_p h = g_p H + (G + p^3 g)(h_e + p^2)$
$= g_p H + G h_e$;

also auch reciprok:

$$g_s h_s = g_e H + G h_p .$$

5) $pg^2 h^4 = 2pg^2 H = 2pg_p H + 2pg_e H$
$= 2g_s H$.

§ 6.

Die Paarbedingungen, ausgedrückt durch die Hauptbedingungen der F_2.

Die schon in der Einleitung definirten *Paarbedingungen* der quadratischen Fläche rühren von den Grundbedingungen des Geradenpaars her. Da diese aber in § 5. auf einige wenige Grundbedingungen *reducirt* sind, so wird es auch möglich sein, einige wenige Flächenbedingungen aufzufinden, durch welche alle Paarbedingungen leicht ausgedrückt werden können. Diejenigen Flächenbedingungen nun, auf welche hier die sämmtlichen Paarbedingungen zurückgeführt werden sollen, sollen die *Hauptbedingungen* der F_2 heissen und mit ihren Symbolen in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden. Die römischen Nummern geben die Dimensionen der nachfolgenden Hauptbedingungen, also auch die Stufen der vorausgesetzten Systeme an.

Tabelle der Hauptbedingungen der F_2.

I) 1) μ = die F_2 soll durch einen gegebenen Punkt gehen,
2) ν = die F_2 soll eine gegebene Gerade berühren,
3) ϱ = die F_2 soll eine gegebene Ebene berühren;

II) 4) μ^2 = die F_2 soll durch zwei gegebene Punkte gehen,
5) $\mu\varrho$ = die F_2 soll durch einen gegebenen Punkt gehen und ausserdem eine gegebene Ebene berühren,
6) ϱ^2 = die F_2 soll zwei gegebene Ebenen berühren,
7) γ = die F_2 soll eine gegebene Ebene in irgend einem Punkte einer auf der Ebene gegebenen Geraden berühren,
8) γ' = die F_2 soll eine gegebene Gerade in einem auf ihr gegebenen Punkte berühren,
9) δ = die F_2 soll eine Gerade *enthalten*, welche einem gegebenen Strahlbüschel angehört;

III) 10) $\mu\delta$ = die F_2 soll durch einen gegebenen Punkt gehen und ausserdem irgend eine Gerade eines gegebenen Strahlbüschels enthalten,
11) $\varrho\delta$ = die F_2 soll die Bedingung ϱ und die Bedingung δ zugleich erfüllen,

12) x = die F_2 soll eine gegebene Gerade *enthalten*,

13) w = die F_2 soll eine gegebene Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte berühren;

IV) 14) μx = die F_2 soll die Bedingung μ und die Bedingung x zugleich erfüllen,

15) ϱx = die F_2 soll die Bedingung ϱ und die Bedingung x zugleich erfüllen,

16) y = die F_2 soll eine gegebene Gerade enthalten und dabei eine gegebene durch die Gerade gehende Ebene in einem gegebenen auf der Geraden liegenden Punkte berühren;

V) 17) z = die F_2 soll zwei gegebene, sich schneidende Gerade enthalten.

Durch die eben aufgezählten Hauptbedingungen drücken wir nun diejenigen Paarbedingungen aus, welche aus den oben *irreducibel* genannten Grundbedingungen des Geradenpaars hervorgehen. Aus diesen Paarbedingungen ergeben sich dann die Formeln für die übrigen Paarbedingungen durch die Reductionen des § 5. Die *folgende Tabelle* enthält daher nur die Formeln, welche die erstgenannten Paarbedingungen durch die Hauptbedingungen ausdrücken. *Dabei bedeutet jedes links vom Gleichheitszeichen stehende Symbol die Bedingung, welche eine F_2 dadurch erfüllt, dass eins ihrer ∞^2 Geradenpaare die durch das Symbol dargestellte Grundbedingung erfüllt.* Die vorgestellten römischen Nummern geben die Dimensionen der Flächenbedingungen, oder die Stufen der bei den Formeln hinzuzudenkenden Flächensysteme an, entsprechen also den Nummern III bis VII der Tabelle auf p. 327. Aus den bei einigen Formeln kurz angedeuteten *Beweisen* wird man die Richtigkeit auch der andern Formeln leicht einsehen können.

Tabelle für die Zurückführung der Paarbedingungen auf die Hauptbedingungen der F_2.

I) 1) $g_s = 0$. In einem einstufigen Systeme von F_2 kann es nämlich keine Fläche geben, welche eine ihrer ∞^1 Geraden in einem gegebenen Strahlbüschel besässe, weil wohl ∞^3 *Geradenpaare*, aber nur ∞^2 *Gerade* im Systeme existiren.

2) $eg_p = 2\mu$. Durch den Punkt der Bedingung g_p gehen nämlich μ Flächen des Systems, und auf jeder gehen durch diesen Punkt 2 Gerade; jede dieser beiden Geraden giebt, mit dem Punkte der Bedingung e durch eine Ebene verbunden, ein die Bedingung eg_p erfüllendes Geradenpaar.

3) $pg_e = 2\varrho$.

4) $g_p h = 4\mu$. Durch den Punkt von g_p gehen nämlich μ Flächen, und auf jeder gehen durch diesen Punkt 2 Gerade; jede dieser μ Flächen wird ferner von der Axe der Bedingung h in 2 Punkten geschnitten, und durch jeden dieser Punkte geht eine einzige Gerade, welche auf der Fläche liegend, eine bestimmte der beiden erstgenannten Geraden schneidet.

5) $g_e h = 4\varrho$.

6) $p^3 = 2\mu$.

7) $e^3 = 2\varrho$.

8) $p^2 e = 2\nu + 2\mu$. Legt man nämlich den Punkt von e auf die Axe von p^2, so wird $p^2 e$ erfüllt erstens von *zwei* Geradenpaaren auf jeder der μ durch den Punkt gehenden Flächen und zweitens von *zwei* Geradenpaaren auf jeder der ν die Axe berührenden Flächen; und zwar jedesmal von *zwei* Geradenpaaren desshalb, weil hier gestattet ist, jede von zwei Geraden als Strahl g resp. Strahl h aufzufassen. Der Beweis lässt sich übrigens auch so führen: Die Bedingung, dass die Schnittebene des Geradenpaars durch eine Axe geht, auf welcher zugleich der Schnittpunkt liegt, ist gleich $p^2 e - p^3$ (Beitr. p. 34, bei dem Beweise zu III.), und wird von jeder der ν diese Axe berührenden Flächen zweimal erfüllt.

9) $pe^2 = 2\nu + 2\varrho$.

II) 10) $G = 0$. Man vergleiche Nr. 1.

11) $pg_s = \delta$. In dem Strahlbüschel der Bedingung g_s befinden sich nämlich δ Strahlen g, welche auf Flächen des zweistufigen Systems liegen, und jeder wird von der Ebene der Bedingung p in einem Punkte p geschnitten, welcher mit dem Strahle g ein Geradenpaar bestimmt.

12) $eg_s = \delta$.

13) $g_s h = 2\delta$.

14) $g_p h_p = 2\mu^2$. Durch die beiden Punkte von g_p und h_p gehen μ^2 Flächen, auf jeder solchen Fläche gehen durch jeden dieser Punkte *zwei* Gerade, und eine bestimmte durch den einen Punkt gehende wird nur von *einer* der beiden durch den andern Punkt gehenden Geraden geschnitten, nämlich nur von derjenigen, welche mit ihr nicht der nämlichen Regelschaar angehört.

15) $g_e h_e = 2\varrho^2$.

16) $g_p h_e = 2\mu\varrho$.

17) $pe^3 = 2\gamma$. Die Ebene der Bedingung e^3 wird von γ Flächen so berührt, dass der Berührungspunkt auf der Geraden liegt, in welcher diese Ebene von der Ebene der Bedingung p geschnitten wird, und auf jeder dieser γ Flächen schneiden sich in dem Berührungspunkt *zwei* Gerade, von denen jede als Strahl g resp. als Strahl h aufgefasst werden kann.

18) $p^3e = 2\gamma'$.

III) 19) $pG = x$. Der Strahl der Bedingung G liegt auf x Flächen des dreistufigen Systems, und auf jeder bestimmt die Ebene der Bedingung p ein Geradenpaar.

20) $eG = x$.

21) $Gh = 2x$.

22) $g_s h_p = \mu\delta$. Es giebt nämlich $\mu\delta$ Flächen, welche durch den Punkt von h_p gehen, und irgend eine Gerade des Strahlbüschels von g_s enthalten; von den beiden Geraden, welche auf jeder dieser Flächen durch den Punkt von h_p gehen, kann nur *Eine* als Strahl h aufgefasst werden, weil nur Eine die in dem Strahlbüschel liegende Gerade zu schneiden vermag.

23) $g_s h_s = \varrho\delta$.

24) $p^2e^3 = 2w$. Die Ebene der Bedingung e^3 wird von w Flächen des Systems in demjenigen Punkte berührt, wo die Axe der Bedingung p^2 schneidet; und durch diesen Punkt gehen auf jeder Fläche *zwei* Strahlen, von denen jeder als Strahl g resp. Strahl h aufgefasst werden kann.

IV) 25) $peG = y$.

26) $Gh_p = \mu x$.

27) $Gh_s = \varrho x$.

V) 28) $Gh_s = z$.

Mit Hülfe der in § 5. erörterten Reductionen folgen aus diesen 28 Formeln nun auch die Formeln, welche die aus den *reducibeln* Grundbedingungen des Geradenpaars hervorgehenden Paarbedingungen durch die Hauptbedingungen ausdrücken. Wir entwickeln hier nur diejenigen Formeln, welche aus den in § 5. beispielsweise angeführten 5 Reductionen sich ergeben.

29) $pgh = p^3 + pg_e + gh_e$
$= 2\mu + 2\varrho + 4\varrho = 2\mu + 6\varrho$.

30) $p^2eg = p^3e + pe^3 + pg_s$
$= 2\gamma' + 2\gamma + \delta$.

$$31)\quad pegh_e = e^3p^2 + g_eh_e + pH + eG$$
$$= 2w + \varrho\delta + x + x = \varrho\delta + 2w + 2x.$$
$$32)\quad g_eh_e = g_pH + Gh_e$$
$$= \mu x + \varrho x.$$
$$33)\quad pg^2h^4 = 2Gh_e$$
$$= 2z.$$

Die 17 Hauptbedingungen der F_2, durch welche jetzt alle Paarbedingungen ausgedrückt sind, zerfallen in drei Gruppen:

1) die drei einfachen Charakteristiken μ, ν, ϱ;
2) die *wesentlichen* Hauptbedingungen γ, γ', δ, x, w, y, z;
3) die *unwesentlichen* Hauptbedingungen μ^2, $\mu\varrho$, ϱ^2, $\mu\delta$, $\varrho\delta$, μx, ϱx, welche symbolische Producte von μ und ϱ mit einfachen Charakteristiken und mit eben *wesentlich* genannten Hauptbedingungen sind.

Demnach folgen die elementaren Moduln der unwesentlichen Hauptbedingungen aus denen der wesentlichen durch blosse *symbolische Multiplication* mit μ oder ϱ. Damit ist unser Problem, die elementaren Moduln aller Paarbedingungen abzuleiten, *zurückgeführt auf das Problem, die elementaren Moduln der 7 wesentlichen Hauptbedingungen*

$$\gamma,\ \gamma',\ \delta,\ x,\ w,\ y,\ z$$

herzustellen.

Die Mittel zur Lösung dieses Problems kann sowohl das Chasles'sche *Correspondenzprincip*, wie auch das *Princip der speciellen Lage* in ausreichendem Masse liefern. Zuerst betreten wir den Weg, welcher von einer Anwendung des Correspondenzprincips auf ein beliebiges einstufiges System von Geradenpaaren ausgeht.

§ 7.

Abhängigkeit der Grundbedingungen des Coincidenz-Geradenpaares von den Grundbedingungen des allgemeinen Geradenpaares.

In jedem einstufigen Systeme von Geradenpaaren ist im Allgemeinen eine endliche Zahl von solchen Geradenpaaren vorhanden, bei denen die beiden Strahlen g und h *unendlich nahe* liegen. Ein solches ausgeartetes Geradenpaar heisst *Coincidenz.**) Jede Coincidenz bezeichnen wir mit dem Symbole τ. Dieses Symbol τ soll jedoch auch die *Zahl* derjenigen Geradenpaare eines einstufigen Systems bedeuten, welche

*) Die hier beginnenden Erörterungen führen zu den allgemeinen Correspondenzsätzen, welche im III. Abschnitte meiner Beitr. ausführlich entwickelt sind. Die dort in § 20. mit Nr. 56 bezeichnete Formel wird auch hier abgeleitet und mit Grundbedingungen symbolisch multiplicirt.

Coincidenzen bilden; und das Symbol τz, wo z eine dem Geradenpaare auferlegte $(a-1)$-fache Bedingung ist, soll die Zahl derjenigen Geradenpaare eines a-stufigen Systems angeben, welche Coincidenzen bilden und zugleich die Bedingung z erfüllen. Bei dem Coincidenz-Geradenpaare sind die 4 Hauptelemente p, e, g, h vollkommen bestimmt, wie beim allgemeinen Geradenpaare, nur dass die beiden Strahlen g und h in einem Strahle unendlich nahe liegen, den wir, um weder g noch h zu *bevorzugen*, mit k bezeichnen wollen. Demgemäss hat die Coincidenz folgende *einzelne Grundbedingungen*:

$$p,\ p_g,\ P;\ e,\ e_g,\ E;$$
$$k,\ k_p,\ k_e,\ k_z,\ K.$$

Schreiben wir also in allen Formeln des § 3. und § 4. das Symbol τ vor jedes Glied, und setzen k statt g und statt h, so erhält man alle Formeln, welche zwischen den Grundbedingungen der Coincidenz bestehen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\tau k^2 &= \tau k_p + \tau k_e,\\
\tau pk &= \tau k_e + \tau p^2,\\
\tau ek &= \tau k_p + \tau e^2,\\
\tau pk_p &= \tau k_z + \tau p^3,\\
\tau ek_e &= \tau k_z + \tau e^3,\\
\tau pek &= \tau k_z + \tau pe^2 + \tau p^3 = \tau k_z + \tau p^2 e + \tau e^3,\\
\tau p^3 &- \tau p^2 e + \tau pe^2 - \tau e^3 = 0,\\
\tau pk_z &= \tau p^2 k_p = \tau p^2 ek - \tau p^2 e^2 = \tau K + \tau p^3 k,\\
\tau ek_z &= \tau e^2 k_e = \tau e^2 pk - \tau p^2 e^2 = \tau K + \tau e^3 k;
\end{aligned}$$

und:

$$\tau pek^2 = \tau pk_z + \tau ek_z + \tau p^2 e^2.$$

Da die Coincidenz τ ein specielles Geradenpaar ist, also doch der *Definition* des Geradenpaars genügt, so darf eine, *auch Coincidenzsymbole* enthaltende, für das Geradenpaar aufgestellte, allgemeingültige Formel mit jeder Bedingung z *symbolisch multiplicirt* werden, wenn nur z auch dem Coincidenzsymbole als symbolischer Factor zugeschrieben wird.

Um nun die Zahl τ der in einem einstufigen Systeme von Geradenpaaren vorhandenen Coincidenzen durch die einfachen Grundbedingungen des Geradenpaars auszudrücken, suchen wir in einem beliebigen Strahlbüschel die Zahl derjenigen Strahlen zu bestimmen, welche sowohl den Strahl g wie den Strahl h *eines und desselben*, in einem einstufigen Systeme befindlichen Geradenpaars zu *schneiden* vermögen. Diese Zahl ist nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip gleich

$$g + h.$$

Andererseits setzt sie sich zusammen aus der Zahl

1) derjenigen Geradenpaare, welche ihren Schnittpunkt in der Ebene des Strahlbüschels haben,
2) derjenigen, welche ihre Schnittebene durch den Scheitel des Strahlbüschels schicken,
3) derjenigen, in welchen die Strahlen g und h unendlich nahe liegen,

also aus p und e und τ, ist also gleich:

$$p + e + \tau.$$

Daraus folgt die *Hauptformel*:

I) 1) $$g + h - p - e = \tau.$$

Diese Hauptformel ist *allgemeingültig*, weil das für sie vorausgesetzte einstufige System *gar keiner Beschränkung* unterlag. Folglich erzeugt jede symbolische Multiplication dieser Formel wieder eine *allgemeingültige* Formel. Wir wollen nun die Hauptformel derartig symbolisch multipliciren, dass dadurch bei τ alle möglichen *Grundbedingungen der Coincidenz* auftreten. Es lassen sich jedoch vermöge der oben besprochenen allgemeinen Grundbedingungs-Formeln durch die folgenden 23 Coincidenzsymbole alle übrigen ausdrücken:

$$\tau p,\ \tau e,\ \tau k;$$
$$\tau p^2,\ \tau e^2,\ \tau pe,\ \tau k_p,\ \tau k_e;$$
$$\tau p^3,\ \tau e^3,\ \tau p^2 e,\ \tau pe^2,\ \tau ek_p,\ \tau pk_e,\ \tau k_s;$$
$$\tau p^2 e^2,\ \tau pk_s,\ \tau ek_s,\ \tau K;$$
$$\tau p^3 e^2,\ \tau pK,\ \tau eK;$$
$$\tau Kpe.$$

Wir geben daher in der folgenden Formeltabelle nur diejenigen Formeln an, welche aus der Hauptformel durch symbolische Multiplication mit den eben aufgezählten Grundbedingungen entstehen. Die dabei etwa erscheinenden reducibeln Grundbedingungen des allgemeinen Geradenpaars führen wir vermöge der Reductionen des § 6. sofort auf die *irreducibeln* Grundbedingungen zurück. Die römischen Nummern geben die Dimensionen der daran angeschlossenen Formeln an.

Formel-Tabelle für die Coincidenz-Grundbedingungen.

II) 2) $g_e + h_e + p^2 - pe = \tau p$,
3) $g_p + h_p + e^2 - pe = \tau e$,
4) $gh - p^2 - e^2 = \tau k$ (Beitr. § 20., Formel (59));

III) 5) $pg_e + ph_e + p^3 - p^2 e = \tau p^2$,
6) $eg_p + eh_p + e^3 - pe^2 = \tau e^2$,
7) $g_s + h_s + p^3 + e^3 = \tau pe$ (Beitr. § 20., F. (63)),

$$8)\ g_p h - e g_p - p^3 = \tau k_p,$$
$$9)\ g_e h - p g_e - e^3 = \tau k_e;$$

IV)
$$10)\ p g_s + p h_s - G - H - p^3 e = \tau p^3,$$
$$11)\ e g_s + e h_s - G - H - p e^3 = \tau e^3,$$
$$12)\ p g_s + p h_s + p e^3 = \tau p^2 e,$$
$$13)\ e g_s + e h_s + p^3 e = \tau p e^2,$$
$$14)\ g_p h_p - p^3 e = \tau e k_p,$$
$$15)\ g_e h_e - p e^3 = \tau p k_e,$$
$$16)\ G + g_s h - p g_s - e g_s = \tau k_s;$$

V)
$$17)\ pG + pH + eG + eH + 2e^3p^2 = \tau p^2 e^2,$$
$$18)\ g_s h_s - eG - e^3p^2 = \tau p k_s,$$
$$19)\ g_s h_p - pG - e^3p^2 = \tau e k_s,$$
$$20)\ Gh - pG - eG = \tau K;$$

VI)
$$21)\ peG + peH = \tau p^3 e^2,$$
$$22)\ Gh_e - peG = \tau p K,$$
$$23)\ Gh_p - peG = \tau e K;$$

VII)
$$24)\ Gh_s = \tau K p e.$$

Die eben entwickelten 24 Formeln beziehen sich auf *allgemeine* Systeme von Geradenpaaren, und nehmen noch gar keine Rücksicht darauf, ob diese Systeme durch Systeme von quadratischen Flächen erzeugt sind oder nicht. Jetzt aber wollen wir diese Formeln auf die speciellen drei- bis siebenstufigen Geradenpaar-Systeme anwenden, welche den ein- bis fünfstufigen Systemen von quadratischen Flächen *in dem durch die Einleitung festgestellten Sinne angehören*. Dann lassen sich die *linken* Seiten der 24 Formeln vermittelst der Reductionen des § 6. durch die Hauptbedingungen der F_2 darstellen. Da nun in den nächsten drei Paragraphen die *rechten* Seiten der 24 Formeln durch die ein- oder mehrfachen Charakteristiken der F_2 ausgedrückt werden, so erhalten wir durch Substitution aus jenen 24 Formeln eine Reihe von *Gleichungen zwischen den Hauptbedingungen*, welche die gesuchten elementaren Moduln der wesentlichen Hauptbedingungen und damit aller Paarbedingungen mit vielen Bestätigungen ergeben.

§ 8.

Beschreibung der drei Ausartungen der F_2.

Es handelt sich jetzt darum, die Grundbedingungen der in einem Systeme von quadratischen Flächen vorkommenden Geradenpaar-Coinci-

denzen durch die Charakteristiken der F_2 auszudrücken. Solche Coincidenzen werden von den auf einer F_2 liegenden ∞^2 Geradenpaaren überhaupt *nicht* gebildet, wenn diese F_2 *allgemein* bleibt, wohl aber in zweistufiger Mannigfaltigkeit, wenn diese F_2 *ausartet*. Bekanntlich*) kann die F_2 auf dreierlei Weise ausarten, nämlich in eine Fläche σ, in eine Fläche $\varkappa$, und in eine Fläche ε**). Wie die Punkte, Tangenten, Tangentialebenen, Geraden und Geradenpaare auf jeder dieser drei Ausartungen σ, $\varkappa$, ε zu einander liegen, ist aus der folgenden genauen Beschreibung ersichtlich. Freilich ist dem Verfasser die *genaue* Kenntniss über die Lage-Eigenschaften der auf den Ausartungen liegenden Geradenschaaren und Geradenpaare *erst im Laufe der Untersuchung allmählich erwachsen*, indem ihm die Uebereinstimmung oder Nicht-Uebereinstimmung mehrerer auf *verschiedenen* Wegen gewonnenen Resultate für die *nämliche* Anzahl oft unzweifelhafte *Rückschlüsse* auf die Natur der Ausartungen erlaubte. Doch wäre eine detaillirte Auseinandersetzung dieser Rückschlüsse hier zu weitläufig und dem systematischen Gange der Untersuchung zu hinderlich. Ich ziehe es desshalb vor, die Beschreibung der Ausartungen *voranzuschicken*, und die dann meist auf mehrere Arten mögliche Ableitung der elementaren Moduln folgen zu lassen; und ich glaube dies um so eher thun zu dürfen, als die Richtigkeit meiner Beschreibung grösstentheils auch a priori eingesehen werden kann.

I. Die Ausartung σ.

Sie ist eine quadratische Fläche, deren Punkte zwei in eine Ebene zusammenfallende Punktfelder bilden. Im Allgemeinen gehört jedem Punkte auf σ als Tangentialebene die eben genannte Ebene von σ an. Es existiren jedoch auf σ ∞^1 einen Kegelschnitt bildende Punkte, welche dadurch vor allen übrigen Punkten *ausgezeichnet* sind, dass jedem von ihnen ∞^1 Tangentialebenen angehören, und zwar alle diejenigen Ebenen, welche die in ihm den Kegelschnitt berührende Tangente enthalten. Demnach ist auch jede den Kegelschnitt berührende Ebene eine Tangentialebene, und jede ihn schneidende Gerade eine Tangente der ausgearteten Fläche σ.

Die ∞^1 auf einer F_2 liegenden Geraden werden bei σ zu den ∞^1 *Tangenten* des Kegelschnittes. Daher zerfallen die ∞^2 *Geradenpaare*,

---

*) Die drei Ausartungen der F_2 sind zuerst von Zeuthen (Oversigt over d. K. D. V. S. Forh. 1866 und Nouv. Ann. Bd. 27) beschrieben und für die Berechnung der Elementarzahlen der F_2 verwerthet.

**) Die Symbole σ, $\varkappa$, ε für die drei Ausartungen habe ich auch in meiner Abhandlung „Zur Theorie der Charakteristiken“ (Borch. J. Bd. 71) gebraucht. Man vergl. dort § 12. bis § 15.

welche einer F_2 in dem von uns festgestellten Sinne *angehören*, bei σ in zwei Gruppen von je ∞^2:

1) solche, deren Schnittebene e die Ebene von σ, deren Schnittpunkt p ein beliebiger Punkt auf ihr ist, und deren beide Strahlen g und h die beiden von diesem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sind;
2) solche, deren Schnittebene e eine beliebige den Kegelschnitt berührende Ebene, deren Schnittpunkt p deren Berührungspunkt ist, deren beide Strahlen g und h aber in der diesem Berührungspunkte zugehörigen Kegelschnitt-Tangente *vereinigt* liegen.

Jedes der eben unter 2) *genannten* ∞^2 *Geradenpaare bildet also eine Coincidenz*, deren Strahl k Tangente des Kegelschnitts und deren Schnittpunkt p ihr Berührungspunkt ist, deren Schnittebene e aber *irgend eine* der ∞^1 durch k möglichen Ebenen sein kann.

II. Die Ausartung $\varkappa$.

Sie ist der Ausartung σ *reciprok*. Ihre Beschreibung folgt also aus der eben gegebenen durch dualistische Uebertragung.

III. Die Ausartung ε.

Die sich selbst reciproke Ausartung ε ist eine quadratische Fläche, deren Tangenten zwei in einer einzigen Geraden — *Hauptgeraden* — vereinigte Strahlenaxen (specielle lineare Complexe) bilden. Jeder dieser Tangenten gehört im Allgemeinen als Berührungspunkt ihr Schnittpunkt mit der Hauptgeraden, und als Tangentialebene ihre Schnittebene mit der Hauptgeraden an. Es gehen jedoch durch die Hauptgerade ∞^2 *ausgezeichnete* Tangenten, welche zwei *Strahlenfelder* — *Hauptebenen* — bilden, und so beschaffen sind, dass jeder von ihnen *jeder* auf ihr liegende *Punkt* als Berührungspunkt angehört; und ausserdem gehen durch die Hauptgerade noch ∞^2 ausgezeichnete Tangenten, welche zwei *Strahlenbündel* — *Hauptpunkte* — bilden, und die Eigenschaft haben, dass als Tangentialebene zu jeder von ihnen *jede* durch sie gehende *Ebene* zu betrachten ist. Demgemäss ist jeder auf einer der beiden Hauptebenen liegende Punkt als ein *Punkt*, und jede durch einen der beiden Hauptpunkte gehende Ebene als eine *Tangentialebene* der ausgearteten Fläche ε aufzufassen.

Die ∞^1 auf einer quadratischen Fläche liegenden Geraden werden bei ε zu den ∞^1 Strahlen der 4 Strahlbüschel, welche in den beiden Hauptebenen liegen, und die beiden Hauptpunkte zu Scheiteln haben. Die ∞^2 Geradenpaare, welche einer F_2 in dem von uns festgestellten Sinne *angehören*, zerfallen in drei Gruppen von je ∞^2:

1) solche, deren Schnittebene e eine Hauptebene, deren Schnittpunkt p ein beliebiger Punkt auf ihr, und deren Strahlen g und h die beiden von diesem Punkte nach den Hauptpunkten gehenden Geraden sind;
2) solche, deren Schnittpunkt p ein Hauptpunkt, deren Schnittebene e eine beliebige Ebene durch ihn, und deren Strahlen g und h die Schnitte dieser Ebene mit den beiden Hauptebenen sind;
3) solche, deren Strahlen g und h in der Hauptgeraden *vereinigt* sind, deren Schnittpunkt p ein beliebiger auf ihr liegender Punkt, und deren Schnittebene e eine beliebige durch sie gehende Ebene ist.

Jedes der eben unter 3) *genannten* ∞^2 *Geradenpaare repräsentirt*, wie die folgenden Untersuchungen immerfort bestätigen, eine in einem System von Geradenpaaren *zweifach* zu rechnende Coincidenz, welche die Hauptgerade zum Strahle k, irgend einen Punkt auf ihr zum Schnittpunkt p, und irgend eine Ebene durch sie zur Schnittebene e hat.

§ 9.

Die Coincidenzsymbole, ausgedrückt durch die Charakteristiken der F_2.

Im Anschluss an die eingeführte Terminologie bezeichnen wir mit σ, $\varkappa$, ε nicht bloss die Ausartungen selbst, sondern auch bezüglich die *Anzahl* der in einem einstufigen Systeme vorhandenen Ausartungen σ, $\varkappa$, ε; und mit σz, $\varkappa z$, εz, wo z eine a-fache der F_2 auferlegte Bedingung ist, die Anzahl derjenigen Flächen eines $(a+1)$-stufigen Systems, welche die Bedingung z erfüllen, und zugleich bezüglich in Flächen σ, $\varkappa$, ε ausgeartet sind. Bekanntlich*) lässt sich jede der Zahlen σ, $\varkappa$, ε eines einstufigen Systems durch die Zahlen μ, ν, ϱ desselben Systems ausdrücken vermittelst der Formeln:

$$2\mu - \nu = \sigma,$$
$$2\varrho - \nu = \varkappa,$$
$$2\nu - \mu - \varrho = \varepsilon,$$

welche man leicht erhält, wenn man vermittelst des Chasles'schen Correspondenzprincips bestimmt:

erstens die Zahl der Punkte einer Geraden, in denen zwei ein und derselben Fläche des Systems angehörige Punkte *vereinigt* liegen,

zweitens die Zahl der Ebenen eines Ebenenbüschels, in denen zwei ein und derselben Fläche des Systems angehörige Tangentialebenen *vereinigt* liegen,

*) Vergl. Zeuthen, Overs. ov. d. K. Selsk. Forh. 1866, und meine Abhandlung in Borch. J. Bd. 71, § 15.

drittens die Zahl der Strahlen eines Strahlbüschels, in denen zwei ein und derselben Fläche des Systems angehörige Tangenten *vereinigt* liegen.

Jene Formeln sind allgemeingültig, weil das vorausgesetzte System keiner Beschränkung unterliegt, sie können also mit jeder der F_2 auferlegten Bedingung *symbolisch multiplicirt* werden.

Wir schreiben nun den drei Ausartungen nicht bloss alle Bedingungen zu, welche ihnen als quadratischen Flächen zukommen, also z. B. μ, ν, ϱ, sondern auch die Bedingungen, welche sie dadurch erfüllen, dass *die sie definirenden Gebilde* Grundbedingungen erfüllen, wo unter definirenden Gebilden bei σ der Kegelschnitt, bei $\varkappa$ der Kegel, bei ε das aus einer Geraden, zwei darauf liegenden Punkten und zwei hindurchgehenden Ebenen erzeugte Gebilde zu verstehen ist. Hat eine solche Grundbedingung das Symbol z, so soll σz, $\varkappa z$, εz die Zahl der *quadratischen Flächen bedeuten, welche bezüglich Ausartungen σ, $\varkappa$, ε sind, und dabei das die Ausartung definirende Gebilde die Grundbedingung z erfüllen lassen.* Wir bezeichnen nun:

I. für einen *Kegelschnitt:*
- mit m die Bedingung, dass er seine Ebene durch einen Punkt schicke,
- mit n die Bedingung, dass er eine Gerade schneide,
- mit r die Bedingung, dass er eine Ebene berühre;

II. für einen *Kegel:*
- mit m die Bedingung, dass er durch einen Punkt gehe,
- mit n die Bedingung, dass er eine Gerade berühre,
- mit r die Bedingung, dass er seinen Scheitel auf einer Ebene besitze;

III. für ein ε *definirendes Gebilde:*
- mit m die Bedingung, dass es eine seiner beiden Ebenen durch einen Punkt schicke,
- mit n die Bedingung, dass er seine Gerade durch eine Gerade schicke;
- mit r die Bedingung, dass er einen seiner beiden Punkte in einer Ebene habe.

Durch diese Bezeichnungen ist, gemäss der vorangehenden *Vorschrift*, festgestellt, was unter

$$\sigma m,\ \sigma n,\ \sigma r,$$
$$\varkappa m,\ \varkappa n,\ \varkappa r,$$
$$\varepsilon m,\ \varepsilon n,\ \varepsilon r$$

zu verstehen ist.

Z. B.

σr bedeutet, dass die F_2 eine Ausartung σ ist, deren Kegelschnitt eine gegebene Ebene berührt;

εn bedeutet, dass die F_2 eine Ausartung ε ist, deren Hauptgerade eine gegebene Gerade schneidet.

Vergleicht man nun die eben für die Ausartungen definirten Bedingungen m, n, r mit den ihnen zugeschriebenen Bedingungen μ, ν, ϱ, so findet man, bei hinreichender Beachtung der in § 8. gelieferten *Beschreibung*, sehr leicht folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} \mu\sigma = 2m\sigma; & \nu\sigma = n\sigma; & \varrho\sigma = r\sigma; \\ \mu\varkappa = m\varkappa; & \nu\varkappa = n\varkappa; & \varrho\varkappa = 2r\varkappa; \\ \mu\varepsilon = m\varepsilon; & \nu\varepsilon = 2n\varepsilon; & \varrho\varepsilon = r\varepsilon. \end{array}$$

Die Coefficienten 2 erklären sich daraus, dass
erstens in jedem Punkte der Ebene des Kegelschnitts von σ *zwei* Punkte,
zweitens in jeder durch den Scheitel des Kegels von $\varkappa$ gehenden Ebene *zwei* Tangentialebenen,
drittens in jeder Geraden, welche die Gerade des ε definirenden Gebildes schneidet, *zwei* Tangenten
der quadratischen Fläche *vereinigt* sind.

Benutzt man jetzt die oben abgeleiteten, nur μ, ν, ϱ enthaltenden Ausdrücke für σ, $\varkappa$, ε, so erhält man aus den eben zusammengestellten 9 Gleichungen folgende:

$$\begin{array}{llll} m\sigma = \frac{1}{2}\mu(2\mu-\nu); & n\sigma = \nu(2\mu-\nu); & r\sigma = \varrho(2\mu-\nu); \\ m\varkappa = \mu(2\varrho-\nu); & n\varkappa = \nu(2\varrho-\nu); & r\varkappa = \frac{1}{2}\varrho(2\varrho-\nu); \\ m\varepsilon = \mu(2\nu-\mu-\varrho); & n\varepsilon = \frac{1}{2}\nu(2\nu-\mu-\varrho); & r\varepsilon = \varrho(2\nu-\mu-\varrho). \end{array}$$

In derselben Weise kann man auch die mehrfachen aus m, n, r und σ oder $\varkappa$ oder ε bestehenden Symbole durch μ, ν, ϱ ausdrücken.

Z. B.

$$\begin{array}{ll} m^3\sigma = \frac{1}{8}\mu^3(2\mu-\nu); & mnr\sigma = \frac{1}{2}\mu\nu\varrho(2\mu-\nu); \\ mr^2\varkappa = \frac{1}{4}\mu\varrho^2(2\varrho-\nu); & mr^3n\varkappa = \frac{1}{8}\mu\nu\varrho^3(2\varrho-\nu); \\ mn\varepsilon = \frac{1}{2}\mu\nu(2\nu-\mu-\varrho); & n^1r\varepsilon = \frac{1}{16}\nu^4\varrho(2\nu-\mu-\varrho). \end{array}$$

Diese Substitutionen werden später sehr viel angewandt werden.

Wenn wir also nur die in § 7. durch die Hauptbedingungen der F_2 ausgedrückten *Coincidenzsymbole* durch die, σ oder $\varkappa$ oder ε und Potenzen von m, n, r enthaltenden Symbole ausdrücken können, so haben wir unser Ziel erreicht, da letztere soeben von μ, ν, ϱ abhängig dargestellt sind.

Die folgende *Formeltabelle* enthält nun die 20 Coincidenzsymbole, welche die rechten Seiten der letzten 20 Formeln des § 7. bilden, ausgedrückt durch σ, $\varkappa$, ε, m, n, r. Dabei ist also *unter* τz *die Bedingung zu verstehen, welche eine* F_2 *dadurch erfüllt, dass eins ihrer*

Geradenpaare eine Coincidenz bildet, und dabei die Bedingung z befriedigt. Jede Formel trägt die arabische Nummer, mit welcher in § 7. die dasselbe Coincidenzsymbol enthaltende Formel bezeichnet ist. Die römischen Nummern geben die Stufen der vorausgesetzten Flächensysteme an. Bei jeder Formel ist der Beweis kurz angedeutet. Von den sich dualistisch entsprechenden Ausartungen σ und $\varkappa$ brauchte in den Beweisen nur die eine behandelt zu werden; es ist σ gewählt. Für die *Beweise* ist namentlich zu beachten, dass, *gemäss der Beschreibung in* § 8., das Symbol τz

I. bei σ nur dann erfüllt werden kann, wenn z die Bedingung e implicite enthält, weil eine auf σ liegende Coincidenz noch *unendlich viele* Schnittebenen e haben kann, wenn auch σ, der Schnittpunkt p und der Coincidenzstrahl k vollkommen bestimmt sind;

II. bei $\varkappa$ nur dann erfüllt werden kann, wenn z die Bedingung p implicite enthält;

III. bei ε nur dann erfüllt werden kann, wenn z die Bedingung pe implicite enthält.

Ferner sind bei den Beweisen der Formeln einige auf *Kegelschnitte* bezügliche *Moduln* angewandt, welche wir *voranschicken.* Dieselben sind wohl schon von Chasles bei der Bestimmung der Elementarzahlen der Kegelschnitte im Raume (Comptes rendus 1867) benutzt. Man erhält diese Moduln leicht durch das Princip der speciellen Lage. Einige sind specielle Fälle von Resultaten meiner Beitr. Die Symbole m, n, r bedeuten, wie oben, die Grundbedingungen des Kegelschnitts.

1. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine Ebene so schneidet, dass eine der beiden in den Schnittpunkten berührenden Tangenten eine Gerade schneidet, hat den Modul:
$$n + r.$$
2. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt geht, hat den Modul:
$$mn - 2m^2 \text{ (Beitr. p. 33, zu 8).}$$
3. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine gegebene Ebene so berührt, dass der Schnittpunkt in einer auf der Ebene gegebenen Geraden liegt, hat den Modul:
$$\tfrac{1}{2}nr.$$
4. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine einem gegebenen Strahlbüschel angehörige Gerade berührt, hat den Modul:
$$mr \text{ (Beitr. p. 33, zu 6), b).}$$
5. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berührt, hat den Modul:
$$\tfrac{1}{2}(mn-2m^2)r \equiv \tfrac{1}{2}mnr - m^2r.$$

6. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine gegebene Gerade berührt, hat den Modul:

$$m^2r - 2m^3 \text{ (Beitr. p. 33, zu 6), c).}$$

7. Die Bedingung, dass ein Kegelschnitt eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, hat den Modul:

$$\tfrac{1}{2}m^2nr - m^3n - m^3r.$$

Tabelle der Formeln für die Darstellung der Coincidenzsymbole durch die Symbole der Ausartungen σ, $\varkappa$, ε.

I) 5) $\tau p^2 = 2\varkappa$

6) $\tau e^2 = 2\sigma$. Durch die Gerade der Bedingung e^2 gehen *zwei* Berührungsebenen an den Kegelschnitt, deren jede eine Coincidenz bestimmt.

7) $\tau pe = 2\sigma + 2\varkappa + 2\varepsilon$. Bei σ schneidet die Ebene der Bedingung p den Kegelschnitt in zwei Punkten, deren jeder den Schnittpunkt einer Coincidenz bestimmt; Strahl k ist die zugehörige Tangente, Schnittebene e die durch k und den Punkt der Bedingung e bestimmte Ebene. Bei ε ist die Hauptgerade Strahl k zu *zwei* zusammenfallenden Coincidenzen, deren Schnittpunkt dann durch die Ebene von p, und deren Schnittebene durch den Punkt von e bestimmt wird (vergl. die Beschreibung in § 8.).

8) $\tau k_p = 0$.

9) $\tau k_e = 0$.

II) 10) $\tau p^3 = m\varkappa$.

11) $\tau e^3 = r\sigma$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt die Ebene der Bedingung e^3 berührt, bestimmt eine Coincidenz.

12) $\tau p^2 e = n\sigma + (m+n)\varkappa + 2n\varepsilon$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt die Gerade der Bedingung p^2 schneidet, bestimmt eine Coincidenz, deren Schnittebene durch den Punkt der Bedingung e geht. Jedes ε, dessen Hauptgerade die Gerade von p^2 schneidet, giebt zwei zusammenfallende Coincidenzen.

13) $\tau pe^2 = (n+r)\sigma + n\varkappa + 2n\varepsilon$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt die Ebene von p so schneidet, dass eine der beiden Schnittpunkt-Tangenten die Gerade von e schneidet, giebt eine Coincidenz.

14) $\tau ek_p = 2m\sigma$. Durch den Punkt von k_p gehen m Kegelschnitt-Ebenen von Ausartungen σ, und an jeden Kegelschnitt gehen von diesem Punkte aus *zwei* Tangenten, deren jede mit dem Punkte von e eine Coincidenz bestimmt.

15) $\tau p k_e = 2 r \varkappa$.

16) $\tau k_\varepsilon = 0$.

III) 17) $\tau p^2 e^2 = \tau p^3 e + \tau p e^3 = (mn - 2m^2 + \frac{1}{2} nr)\sigma + (rn - 2r^2 + \frac{1}{2} mn)\varkappa + 2n^2 \varepsilon$. Bei σ erhält man eine Coincidenz, wenn der Kegelschnitt durch den Punkt der Bedingung $p^3 e$ geht, ferner, wenn der Kegelschnitt die Ebene von $e^3 p$ in einem Punkte der Geraden von $e^3 p$ berührt. ε liefert zwei zusammenfallende Coincidenzen, wenn die Hauptgerade die beiden Geraden der Bedingung $p^2 e^2$ schneidet.

18) $\tau p k_\varepsilon = m r \varkappa$.

19) $\tau e k_\varepsilon = m r \sigma$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt einen Strahl des Büschels von k_ε berührt, liefert mit dem Punkte von e eine Coincidenz.

20) $\tau K = 0$.

IV) 21) $\tau p^3 e^2 = (\frac{1}{2} mnr - m^2 r)\sigma + (\frac{1}{2} mnr - mr^2)\varkappa + 2 \cdot (\frac{1}{2} n^3)\varepsilon$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt die Ebene von $p^3 e^2$ in dem Punkte von $p^3 e^2$ berührt, giebt eine Coincidenz. ε liefert zwei zusammenfallende Coincidenzen, wenn die Hauptgerade durch den Punkt von $p^3 e^2$ geht, und dabei in der Ebene von $p^3 e^2$ liegt, d. h. einem *Strahlbüschel* angehört. Bekanntlich ist aber die Zahl der einem Strahlbüschel angehörigen Geraden gleich der *Hälfte* der Zahl der drei Gerade schneidenden Geraden.

22) $\tau p K = (r^2 m - 2 r^3)\varkappa$.

23) $\tau e K = (m^2 r - 2 m^3)\sigma$. Jedes σ, dessen Kegelschnitt den Strahl von K berührt, liefert mit dem Punkte von e eine Coincidenz.

V) 24) $\tau K p e = (\frac{1}{2} m^2 nr - m^3 n - m^3 r)\sigma + (\frac{1}{2} r^2 nm - r^3 n - r^3 m)\varkappa + 2 \cdot (\frac{1}{2} n^4)\varepsilon$. Bei σ erhält man eine Coincidenz, wenn der Kegelschnitt den Strahl der Bedingung K in dem Punkte berührt, wo die Ebene von p schneidet. Bei ε entstehen zwei zusammenfallende Coincidenzen, wenn die Hauptgerade der Strahl K ist. Nun ist aber die Zahl der ε, deren Hauptgerade gegeben ist, *halb* so gross, als die Zahl der ε, deren Hauptgerade 4 Strahlen schneidet.

Benutzt man jetzt *die oben angegebenen Beziehungen*, welche die Symbole

$$m^b n^c r^d \sigma, \quad m^b n^c r^d \varkappa, \quad m^b n^c r^d \varepsilon$$

durch μ, ν und ϱ ausdrücken, so erhält man aus den vorstehenden 24 Formeln *die Symbole* τz *ausgedrückt durch die Charakteristiken der* F_2.

§ 10.

Ableitung der elementaren Moduln der Paarbedingungen der F_2.

Wir ersetzen jetzt die *linken* Seiten der 20 letzten Formeln des § 7. durch die *Hauptbedingungen* der F_2, so wie es § 6. lehrt, und die *rechten* Seiten durch die *Charakteristiken* der F_2, so wie es § 9. lehrt. Dann erhalten wir die hier mit den Nummern von § 7. und § 9. zusammengestellten Gleichungen, in denen, der Deutlichkeit wegen, jedes aus

$$\sigma,\ \varkappa,\ \varepsilon$$

entstandene

$$(2\mu-\nu),\quad (2\varrho-\nu),\quad (2\nu-\mu-\varrho)$$

in *Klammer* gesetzt ist.

I) 5) $4\varrho - 2\nu = (2\varrho-\nu)\cdot 2$,

6) $4\mu - 2\nu = (2\mu-\nu)\cdot 2$,

7) $2\mu + 2\varrho = (2\mu-\nu)\cdot 2 + (2\varrho-\nu)\cdot 2 + (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2$,

8) $4\mu - 2\mu - 2\mu = 0$,

9) $4\varrho - 2\varrho - 2\varrho = 0$;

II) 10) $2\delta - 2\gamma' = (2\varrho-\nu)\mu$,

11) $2\delta - 2\gamma = (2\mu-\nu)\varrho$,

12) $2\delta + 2\gamma = (2\mu-\nu)\nu + (2\varrho-\nu)(\nu+\mu) + (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\nu$,

13) $2\delta + 2\gamma' = (2\mu-\nu)(\nu+\varrho) + (2\varrho-\nu)\nu + (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\nu$,

14) $2\mu^2 - 2\gamma' = (2\mu-\nu)\mu$,

15) $2\varrho^2 - 2\gamma = (2\varrho-\nu)\varrho$,

16) $2\delta - \delta - \delta = 0$;

III) 17) $4x + 4w = (2\mu-\nu)(\frac{1}{2}\mu\nu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\nu\varrho)$
$+ (2\varrho-\nu)(\frac{1}{2}\varrho\nu - \frac{1}{2}\varrho^2 + \frac{1}{2}\nu\mu)$
$+ (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\nu^2$,

18) $\varrho\delta - x - 2w = (2\varrho-\nu)\cdot \frac{1}{2}\mu\varrho$,

19) $\mu\delta - x - 2w = (2\mu-\nu)\cdot \frac{1}{2}\mu\varrho$,

20) $2x - x - x = 0$;

IV) 21) $2y = (2\mu-\nu)(\frac{1}{4}\mu\nu\varrho - \frac{1}{4}\mu^2\varrho)$
$+ (2\varrho-\nu)(\frac{1}{4}\mu\nu\varrho - \frac{1}{4}\mu\varrho^2)$
$+ (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{8}\nu^3$,

22) $\varrho x - y = (2\varrho-\nu)(\frac{1}{4}\mu\varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho^3)$,

23) $\mu x - y = (2\mu-\nu)(\frac{1}{4}\mu^2\varrho - \frac{1}{4}\mu^3)$;

V) 24) $z = (2\mu-\nu)(\frac{1}{8}\mu^2\nu\varrho - \frac{1}{8}\mu^3\nu - \frac{1}{8}\mu^3\varrho)$
$+ (2\varrho-\nu)(\frac{1}{8}\mu\nu\varrho^2 - \frac{1}{8}\nu\varrho^3 - \frac{1}{8}\mu\varrho^3)$
$+ (2\nu-\mu-\varrho)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{16}\nu^4$.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich endlich mit vielen *Bestätigungen* die elementaren Moduln der 7 *wesentlichen Hauptbedingungen* (§ 6. am Schluss):

$$\gamma,\ \gamma',\ \delta,\ x,\ w,\ y,\ z.$$

Man erhält zunächst mehrere Male:

1) $\gamma = \frac{1}{2}\nu\varrho,$

2) $\gamma' = \frac{1}{2}\nu\mu,$

3) $\delta = \mu\varrho,$

4) $x = \frac{1}{4}(2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\varrho + 3\nu\mu^2 + 2\nu\mu\varrho + 3\nu\varrho^2 - 2\mu^3 - 2\varrho^3)$*),

5) $w = \frac{1}{8}(-2\nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu^2\varrho - 3\nu\mu^2 - 3\nu\varrho^2 + 2\mu^3 + 2\varrho^3).$

Für y findet man aus den 3 Gleichungen 21), 22), 23) der obigen Tabelle drei verschiedene elementare Moduln, nämlich:

6)a) $y = \frac{1}{16}(2\nu^4 - \nu^3\mu - \nu^3\varrho - 4\nu^2\mu\varrho + 6\nu\mu^2\varrho + 6\nu\mu\varrho^2 - 4\mu^3\varrho - 4\mu\varrho^3),$

6)b) $y = \frac{1}{4}(2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 3\nu\mu^2\varrho + 3\nu\mu\varrho^2 + 2\nu\varrho^3 - 2\mu^3\varrho - 2\mu\varrho^3),$

6)c) $y = \frac{1}{4}(2\nu^3\mu - 3\nu^2\mu^2 - 3\nu^2\mu\varrho + 2\nu\mu^3 + 3\nu\mu^2\varrho + 3\nu\mu\varrho^2 - 2\mu^3\varrho - 2\mu\varrho^3).$

Jede der beiden letzten Formeln ist *nicht* sich selbst reciprok. Man erhält aus ihnen eine sich selbst reciproke Formel, wenn man sie addirt, und die erhaltene Formel durch zwei dividirt. Dann kommt:

6)d) $y = \frac{1}{8}(2\nu^3\mu + 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 + 6\nu\mu^2\varrho + 6\nu\mu\varrho^2 + 2\nu\varrho^3 - 4\mu^3\varrho - 4\mu\varrho^3).$

Für die fünffache Bedingung z giebt Gleichung 24) den Modul:

7) $z = \frac{1}{16}(2\nu^5 - \nu^4\mu - \nu^4\varrho + 2\nu^2\mu^3 - 2\nu^2\mu^2\varrho - 2\nu^2\mu\varrho^2 + 2\nu^2\varrho^3 - 4\nu\mu^4 + 6\nu\mu^3\varrho + 6\nu\mu\varrho^3 - 4\nu\varrho^4 - 4\mu^4\varrho - 4\mu\varrho^4).$

Die Vergleichung der drei für y erhaltenen elementaren Moduln führt zu den schon in der Einleitung erwähnten *beiden Relationen zwischen den vierfachen Charakteristiken der F_2*. Wir erhalten dieselben in einer solchen Form, dass durch dualistische Uebertragung jede Formel in sich selbst übergeht, wenn wir erstens die beiden in 6 b) und 6 c) angegebenen Moduln für y einander gleichsetzen, und wenn wir zweitens die beiden mit 6 a) und 6 d) bezeichneten Moduln für y vergleichen. Dann kommt:

8) $2\nu^3\mu - 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 + 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 - 2\nu\varrho^3 = 0,$

9) $2\nu^4 - 5\nu^3\mu - 5\nu^3\varrho + 6\nu^2\mu^2 + 8\nu^2\mu\varrho + 6\nu^2\varrho^2 - 4\nu\mu^3 - 6\nu\mu^2\varrho - 6\nu\mu\varrho^2 - 4\nu\varrho^3 + 4\mu^3\varrho + 4\mu\varrho^3 = 0.$

---

*) Dieser Modul ist zuerst nicht von mir, sondern von meinem Schüler Adolf Hurwitz in Hildesheim, und zwar durch Induction aufgefunden. Der von Hurwitz später gelieferte Beweis für seinen Modul folgt hier in § 12.

Auf diese beiden wichtigen Relationen werden wir in § 15. *zurückkommen.*

Aus den eben abgeleiteten elementaren Moduln der wesentlichen Hauptbedingungen erhält man nun durch die Reductionen des § 6. *die elementaren Moduln der sämmtlichen Paarbedingungen.*

Beispiele.

Für die Paarbedingungen, welche aus den Grundbedingungen:

$$g_s h_e, \quad p^2 eg, \quad pegh_e, \quad g_s h_s$$

des Geradenpaars hervorgehen, ergeben sich vermittelst der Formeln 23), 30), 31), 32) in § 6. als elementare Moduln bezüglich:

$$\mu\varrho^2,$$
$$\nu\mu + \nu\varrho + \mu\varrho,$$
$$\tfrac{1}{4}(2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\varrho + 3\nu\mu^2 + 4\nu\mu\varrho + 3\nu\varrho^2 - 2\mu^3 + 4\mu\varrho^2 - 2\varrho^3),$$
$$\tfrac{1}{4}(2\nu^3\mu + 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 3\nu\mu^3 + 5\nu\mu^2\varrho + 5\nu\mu\varrho^2 + 3\nu\varrho^3 - 2\mu^4 - 2\mu^3\varrho - 2\mu\varrho^3 - 2\varrho^4).$$

Die Moduln der Paarbedingungen können natürlich *auf mehrere Arten in die gewöhnliche Terminologie übersetzt werden* (vergl. Beiträge § 9., p. 30). *Beispielsweise* kleiden wir hier das *zweite* und *vierte* der eben angegebenen 4 Resultate in Worte:

„In jedem zweistufigen Systeme von quadratischen Flächen mit den Charakteristiken

$$\nu^2, \ \nu\mu, \ \nu\varrho, \ \mu^2, \ \mu\varrho, \ \varrho^2$$

giebt es ∞^1 Flächen, von denen jede eine gegebene Gerade so schneidet, dass die einem Schnittpunkte angehörige Tangentialebene durch einen gegebenen Punkt geht. In jeder dieser Flächen liegen zwei Gerade, welche in dem eben genannten Punkte ihren Schnittpunkt, und in der eben genannten Tangentialebene ihre Schnittebene haben. Die so entstehenden ∞^1 Geraden bilden eine Regelfläche vom Grade:

$$\nu\mu + \nu\varrho + \mu\varrho.“$$

„In jedem vierstufigen Systeme von F_2 giebt es ∞^2 Flächen, welche einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels enthalten. Auf jeder dieser Flächen wähle man diejenige Regelschaar aus, welcher jener Strahl des Strahlbüschels *nicht* angehört. Die $\infty^1 \cdot \infty^2$ Geraden der so entstehenden Regelschaaren bilden einen Complex vom Grade:

$$t = \tfrac{1}{4}(2\nu^3\mu + 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 3\nu\mu^3 + 5\nu\mu^2\varrho + 5\nu\mu\varrho^2 + 3\nu\varrho^3 - 2\mu^4 - 2\mu^3\varrho - 2\mu\varrho^3 - 2\varrho^4).“$$

An den zuletzt erwähnten Modul knüpfen wir *folgende Bemerkung.* Es ist naheliegend, diesen Modul mit dem Modul der zusammengesetzten Hauptbedingung

$$\delta\delta = \mu\varrho \cdot \mu\varrho = \mu^2\varrho^2$$

zu *vergleichen.* Letzterer giebt die Zahl derjenigen Flächen, welche aus jedem von zwei gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl enthalten. Diese Zahl setzt sich aber aus zwei Zahlen zusammen, nämlich:

erstens aus der eben abgeleiteten Zahl t, für welche die beiden Strahlen der beiden Strahlbüschel *verschiedenen* Regelschaaren angehören sollen,

zweitens aus der Zahl, für welche die beiden Strahlen der beiden Strahlbüschel *ein und derselben* Regelschaar angehören sollen.

Subtrahirt man also von $\mu^2\varrho^2$ den Modul t, so erhält man den Modul der vierfachen Bedingung, welche verlangt, dass eine F_2 von zwei gegebenen Strahlbüscheln zwei ein und derselben Regelschaar angehörige Gerade enthalte. Z. B. erhält man bei dem Systeme der durch 5 gegebene Punkte gehenden Flächen im ersten Falle die Zahl $t=5$, im zweiten Falle die Zahl $\mu^2\varrho^2 - t = 4$; ferner bei dem Systeme der, zwei sich schneidende Gerade enthaltenden Flächen im ersten Falle die Zahl $t = 0$, im zweiten Falle die Zahl $\mu^2\varrho^2 - t = 4$. Das Resultat $t = 0$ im zweiten Beispiele kann auch leicht rein geometrisch eingesehen werden.

Die vorstehende Bemerkung führt auf den Gedanken, von den auf einer F_2 liegenden Geraden auch *je zwei ein und derselben Regelschaar angehörige Gerade einander zuzuordnen*, den so entstehenden allgemeinen Strahlenpaaren alle möglichen Grundbedingungen aufzuerlegen, und von den daraus für die Fläche erwachsenden Bedingungen die elementaren Moduln abzuleiten. Unter diesen würden wir dann nicht bloss den eben besprochenen $\mu^2\varrho^2 - t$, sondern auch manche andere oben abgeleitete Moduln antreffen. Bei einer solchen der vorliegenden parallelen Untersuchung würden die Erörterungen des § 18. meiner Beitr. zur Anwendung kommen müssen.

Es ist wohl kaum nöthig, darauf hinzuweisen, wie die erledigte Charakteristikentheorie des Punktes, der Ebene und des Strahls (vergl. Beitr. § 30.) uns in den Stand setzt, aus den Moduln der Paarbedingungen die Moduln auch noch *vieler anderer abgeleiteter Bedingungen* herzustellen. Hierfür lassen wir zwei beliebig ausgewählte Beispiele folgen.

„Die Zahl derjenigen F_2 eines beliebigen dreistufigen Systems, welche zwei durch zwei gegebene Punkte gehende Gerade so enthalten, dass sie sich schneiden, und ihr Schnittpunkt auf einer gegebenen Fläche a^{ter} Ordnung liegt, erhält man aus

$$pg_ph_p = \mu\delta + x,$$

wenn man in

$$a\,(\mu\delta+x)$$

für δ und x die oben berechneten Moduln einsetzt."

„Die Anzahl derjenigen F_2 eines beliebigen vierstufigen Systems, welche zwei, verschiedenen Regelschaaren angehörige Gerade enthalten, von denen die eine in einer Congruenz vom Feldgrade a und vom Bündelgrade a', die andere in einer Congruenz vom Feldgrade b und vom Bündelgrade b' *so* liegt, dass der Schnittpunkt ein einfacher Schnittpunkt einer der ∞^1 auf einer gegebenen allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung liegenden dreifachen Tangenten wird, bestimmt sich aus:

$$\begin{aligned} &cp^2\cdot(ag_e+a'g_p)(bh_e+b'h_p)\\ &=cab(p^2g_eh_e)+ca'b(p^2g_ph_e)+cab'(p^2g_eh_p)+ca'b'(p^2g_ph_p)\\ &=ca'b(\varrho x)+cab'(\varrho x)+ca'b'(\mu x+\varrho x), \end{aligned}$$

wenn für x der oben berechnete Modul von Hurwitz substituirt und

$$c=\tfrac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+3n^2-2n-12)$$

(vergl. Beitr. § 27., p. 101 und Gött. Nachr. Februar 1875, p. 95) gesetzt wird."

§ 11.

Anwendung der gefundenen Moduln auf Kegelschnitte.

Die gefundenen Moduln gelten für jede F_2, also auch für die in Flächen σ, $\varkappa$, ε (vergl. § 8. und § 9.) *ausgearteten* F_2. Wenden wir nun die Moduln auf die Ausartung σ an, so ergeben sich wegen der Beziehung, welche σ zu *dem Kegelschnitt* hat, Moduln und Relationen für den Kegelschnitt im Raume. Analog giebt die Anwendung auf $\varkappa$ Resultate für den Kegel, und die Anwendung auf ε Resultate für das Gebilde, welche aus einer Geraden, zwei daraufliegenden Punkten und zwei hindurchgehenden Ebenen besteht. Es wird genügen, die Moduln der 7 wesentlichen *Hauptbedingungen* auf σ und ε anzuwenden. Dabei haben wir die in § 9. erörterten Beziehungen

$$\begin{aligned} &\mu\sigma=2m\sigma, \quad \nu\sigma=n\sigma, \quad \varrho\sigma=r\sigma,\\ &\mu\varepsilon=m\varepsilon, \quad \nu\varepsilon=2n\varepsilon, \quad \varrho\varepsilon=r\varepsilon \end{aligned}$$

zu beachten, in denen m, n, r wie in § 9. *die einfachen Grundbedingungen* des Kegelschnitts im Raume resp. des ε definirenden Gebildes bedeuten. Namentlich werden wir nun im Folgenden hervorheben, *auf welche Weise* die 7 wesentlichen Hauptbedingungen von den Ausartungen σ und ε erfüllt werden; was der Verfasser bisweilen erst a posteriori erschlossen hat.

I. Anwendung auf σ.

1) $\sigma\gamma' = \frac{1}{2}\sigma\nu\varrho = \frac{1}{2}\sigma nr$. Dies ist das bekannte (Gött. Machr. Mai 1874, p. 280), auch schon in § 9. vor der Formeltabelle erwähnte Resultat, dass für den Kegelschnitt im Raume die Bedingung, eine Ebene in einem Punkte einer auf ihr gegebenen Geraden zu berühren, den Modul $\frac{1}{2}nr$ hat.

2) $\sigma\gamma' = \frac{1}{2}\sigma\nu\mu = \sigma mn$. γ' wird von σ in zwei Fällen erfüllt, erstens einmal, wenn der Kegelschnitt durch den Punkt der Bedingung γ' geht, zweitens zweimal, wenn die Kegelschnittebene durch die Gerade der Bedingung γ' geht. In der That ist

$$\sigma mn = \sigma(mn - 2m^2) + \sigma(2m^2)$$

3) $\sigma\delta = \sigma\mu\varrho = 2\sigma mr$. Wir erkennen hieraus, dass bei σ die Flächenbedingung δ, eine Gerade eines gegebenen Strahlbüschels zu enthalten, *zweimal* von jedem Kegelschnitt erfüllt wird, welcher einen Strahl dieses Strahlbüschels berührt. Jede Tangente des Kegelschnitts ist also *zweimal* eine auf der *Fläche* σ liegende Gerade.

4) $\sigma x = \dot{\sigma}(\frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{4}n^2r + \frac{3}{4}nr^2 - \frac{1}{2}r^3 - \frac{3}{2}n^2m + nrm + 3nm^2 - 4m^3)$. Nun wird aber x von σ, und zwar, wie wir aus Nr. 3) sehen, *zweimal* dadurch erfüllt, dass der Kegelschnitt die Gerade der Bedingung x berührt. Der Modul der Bedingung, eine Gerade zu berühren, ist für den Kegelschnitt im Raume (specieller Fall von Formel 6) c) auf p. 33 meiner Beitr.).

$$m^2r - 2m^3.$$

Also muss sein:

$$2m^2r - 4m^3 = \frac{1}{2}n^3 - \frac{3}{4}n^2r + \frac{3}{4}nr^2 - \frac{1}{2}r^3 - \frac{3}{2}n^2m + nrm + 3nm^2 - 4m^3.$$

Dies giebt keine Identität, sondern eine *Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume*, nämlich:

$$2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n - 8m^2r = 0.$$

Die Function von n, r, m, welche hier gleich Null gesetzt ist, bezeichnen wir der Kürze wegen mit dem Buchstaben R. Multiplicirt man die Relation $R = 0$ mit m^3 symbolisch, d. h. betrachtet man die Kegelschnittebene als fest, so erhält man die Cremona-Halphen'sche Formel 11) auf p. 406 des Clebsch-Lindemann'schen Werkes (I. Bd. 1. Th.). *Auf diese und die übrigen Relationen zwischen den Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume kommen wir in* § 14. *zurück.*

5) σw. Die Bedingung w wird von σ einmal dadurch erfüllt, dass der Kegelschnitt die Ebene der Bedingung w in ihrem Punkte berührt, und zweimal dadurch, dass die Kegelschnittebene die Ebene von w ist. Daher erhalten wir aus dem Modul von w für den Kegelschnitt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}r(mn-2m^2)+2\cdot m^3=-\tfrac{1}{4}n^3+\tfrac{3}{8}n^2r-\tfrac{3}{8}nr^2+\tfrac{1}{4}r^3 \\ +\tfrac{3}{4}n^2m-\tfrac{3}{2}nm^2+2m^3,$$

welche die Relation $R=0$ noch einmal liefert.

6) σy. Die Bedingung y wird von σ zweimal dadurch erfüllt, dass der Kegelschnitt die Gerade der Bedingung y in dem Punkte derselben berührt, und auch zweimal dadurch, dass der Kegelschnitt in der Ebene von y liegt, und dabei die Gerade von y berührt. Man erhält also aus den in § 10. mit 6) a), 6) b), 6) c) bezeichneten Moduln die drei Gleichungen:

a) $$2(\tfrac{1}{2}m^2nr-m^3n-m^3r)+2m^3r \\ =\tfrac{1}{16}(2n^4-n^3r-2mn^3-8mn^2r+12mnr^2-8mr^3+24m^2nr-32m^3r)$$

b) $$2(\tfrac{1}{2}m^2nr-m^3n-m^3r)+2m^3r \\ =\tfrac{1}{4}(2n^3r-3n^2r^2+2nr^3-6mn^2r+6mnr^2-4mr^3+12m^2nr-16m^3r)$$

c) $$2(\tfrac{1}{2}m^2nr-m^3n-m^3r)+2m^3r \\ =\tfrac{1}{4}(4mn^3-6mn^2r+6mnr^2-4mr^3-12m^2n^2+12m^2nr+16m^3n \\ -16m^3r).$$

Diese 3 Gleichungen geben die folgenden *Relationen zwischen den vierfachen Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume:*

a) $$2n^4-n^3r-2mn^3-8mn^2r+12mnr^2-8mr^3+8m^2nr \\ +32m^3n-32m^3r=0$$

b) $$2n^3r-3n^2r^2+2nr^3-6mn^2r+6mnr^2-4mr^3+8m^2nr \\ +8m^3n-16m^3r=0$$

c) $$2mn^3-3mn^2r+3mnr^2-2mr^3-6m^2n^2+4m^2nr \\ +12m^3n-8m^3r=0.$$

Die letzte Relation ist nichts anderes, als die mit m symbolisch multiplicirte, oben unter 4) abgeleitete Relation

$$R=0.$$

7) σz. Die Bedingung z wird bei σ 4mal dadurch erfüllt, dass der Kegelschnitt in der Ebene der Bedingung z liegt, und dabei die beiden Geraden von z berührt. Daher liefert der Modul von z folgende Relation zwischen den fünffachen Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume:

$$4m^3r^2=\tfrac{1}{16}(2n^5-n^4r+2n^2r^3-4nr^4-2mn^4-4mn^2r^2+12mnr^3 \\ -8mr^4-8m^2n^2r+16m^3n^2+48m^3nr).$$

Näheres über die Relationen zwischen den Charakteristiken folgt in § 14.

II. Anwendung auf ε.

Wir begnügen uns hier damit, anzugeben, auf welche Weise die Ausartung ε die 7 wesentlichen Hauptbedingungen erfüllt.

1) γ wird von ε erfüllt, einmal, wenn ein Hauptpunkt auf der Geraden von γ liegt, und zweimal, wenn die Hauptgerade in der Ebene von γ liegt.

2) γ' wird von ε erfüllt, einmal, wenn eine Hauptebene durch die Gerade von γ' geht, und zweimal, wenn die Hauptgerade durch den Punkt von γ' geht.

3) δ wird von ε erfüllt, wenn eine Hauptebene durch den Punkt von δ geht, während ein Hauptpunkt in der Ebene von δ liegt.

4) x wird von ε erfüllt, wenn die Gerade von x in einem der 4 Strahlbüschel liegt, welche die Hauptpunkte zu Scheiteln und die Hauptebenen zu Ebenen haben.

5) w wird von ε in drei Fällen erfüllt, erstens, wenn eine Hauptebene die Ebene von w ist, zweitens, wenn ein Hauptpunkt der Punkt von w ist, und drittens, wenn die Hauptgerade in der Ebene von w liegt und dabei durch den Punkt von w geht.

6) y wird von ε in drei Fällen erfüllt, erstens, wenn eine Hauptebene die Ebene von y ist, während ein Hauptpunkt auf der Geraden von y liegt, zweitens, wenn ein Hauptpunkt der Punkt von y ist, während eine Hauptebene durch die Gerade von y geht, und drittens viermal, wenn die Hauptgerade die Gerade von y ist.

7) z wird von ε erfüllt, erstens, wenn eine Hauptebene die Ebene von z ist, während die beiden Hauptpunkte auf den beiden Geraden von z liegen, und zweitens, wenn ein Hauptpunkt der Punkt von z ist, während die beiden Hauptebenen durch die beiden Geraden von z gehen.

§ 12.

Bestätigung der gefundenen Moduln durch das Princip der speciellen Lage.

Die grosse Fruchtbarkeit des Princips der speciellen Lage (Beitr. § 7.) bei der Lösung der Probleme der abzählenden Geometrie habe ich schon durch meine Beitr. vielfach nachgewiesen. Auch bei der vorliegenden Untersuchung hat mir dieses Princip viele Bestätigungen geliefert. Die a priori vielleicht schwierig zu bestimmenden *Multiplicitäten konnten wegen der grossen Zahl der möglichen Verificationen immer auch a posteriori erkannt werden.* Ich lasse hier von der Anwendung des Princips der speciellen Lage auf die Fragen der vorliegenden Abhandlung zunächst einige Beispiele folgen, in denen die Bedingung μ oder ϱ mit gewissen Hauptbedingungen zusammengesetzt wird. Dabei sind, der Kürze wegen,

Coefficienten, welche eigentlich a posteriori erkannt sind, bisweilen so angegeben, als wenn sie von vornherein bekannt wären.

1) $\mu\mu$. Die beiden Punkte zweier Bedingungen μ werden unendlich nahe gelegt. Dann wird $\mu\mu$ erstens von jeder Fläche erfüllt, welche die Verbindungsgerade der beiden unendlich nahen Punkte in der Coincidenzstelle berührt, zweitens von jeder Ausartung σ, welche ihre Ebene durch den Coincidenzpunkt schickt, also:

$$\mu^2 = m\sigma + \gamma' = \tfrac{1}{2}\mu(2\mu - \nu) + \tfrac{1}{2}\mu\nu.$$

2) $\mu\nu$. Der Punkt von μ wird auf die Gerade von ν gelegt. Dann wird $\mu\nu$ von jeder Fläche erfüllt, welche die Gerade von ν in dem Punkte von μ berührt, und zwar *zweimal*, da

$$\mu\nu = 2\gamma'.$$

3) $\mu\varrho$. Der Punkt von μ wird in die Ebene von ϱ gelegt. Dann wird $\mu\varrho$ von jeder Fläche erfüllt, welche die Ebene von ϱ so berührt, dass eine der beiden der Berührung angehörigen Geraden durch den Punkt von μ geht, mit andern Worten, von jeder Fläche, die δ erfüllt. Wir fanden in der That:

$$\delta = \mu\varrho.$$

4) $\mu\gamma$. Der Punkt von μ wird in die Gerade der Bedingung γ gelegt. Dann wird $\mu\gamma$ erstens einmal von jeder Fläche erfüllt, welche diese Gerade enthält, und zweitens zweimal von jeder Fläche, welche die Ebene von γ in dem Punkte von μ berührt. Also ist:

$$\mu\gamma = x + 2w.$$

In der That giebt die Substitution der Moduln von γ, x, w in diese Formel eine Identität.

5 a) $\mu\gamma'$. Der Punkt von μ wird in die Gerade der Bedingung γ' gelegt. Dann wird $\mu\gamma'$ erstens einmal von jeder Fläche erfüllt, welche diese Gerade enthält, zweitens zweimal von jeder Ausartung σ, welche ihre Ebene durch diese Gerade schickt, und drittens einmal von jeder Ausartung ε, deren eine Hauptebene diese Gerade enthält. Bezeichnet man also für das ε definirende Gebilde mit u die Bedingung, dass eine der beiden Hauptebenen durch eine Gerade geht, so ist:

$$\mu\gamma' = x + 2m^2\sigma + u\varepsilon.$$

5 b) $\varrho\gamma$. Bezeichnet man bei ε mit u' die Bedingung, dass einer der beiden Hauptpunkte in einer Geraden liegt, so erhält man aus 5 a) durch dualistische Uebertragung:

$$\varrho\gamma = x + 2r^2\varkappa + u'\varepsilon.$$

Nun ist aber bei ε das Symbol $u + u'$ durch die Grundbedingungen m, n, r ausdrückbar. Denn nach dem vorigen § (II., 1) und 2)) ist:

$$\gamma\varepsilon = u'\varepsilon + 2n_e\varepsilon$$

und

$$\gamma'\varepsilon = u\varepsilon + 2n_p\varepsilon,$$

wo n_e und n_p bedeuten, dass die Hauptgerade in einer Ebene liegen resp. durch einen Punkt gehen soll; ferner ist:

$$n_e\varepsilon + n_p\varepsilon = n^2\varepsilon.$$

Wir erhalten also:

$$u\varepsilon + u'\varepsilon = mn\varepsilon + rn\varepsilon - 2n^2\varepsilon.$$

Dieses Resultat konnte auch aus des Verfassers Formeln im II. Abschnitt seiner Beitr. gewonnen werden [p. 33, F. 9) a) und 10) a) für $a = 2$] (vergl. den unten folgenden Beweis von Hurwitz).

Addirt man nun die für $\mu\gamma'$ und $\varrho\gamma$ oben angegebenen Formeln, und benutzt dann die eben abgeleitete Formel für $u\varepsilon + u'\varepsilon$, so erhält man:

$$\mu\gamma' + \varrho\gamma = 2x + 2m^2\sigma + 2r^2\varkappa + (mn + rn - 2n^2)\varepsilon.$$

Die Substitution der für γ, γ', x gefundenen Moduln, und die Einführung der Charakteristiken für die Ausartungssymbole, macht diese Gleichung zu einer bestätigenden Identität.

6) a) μy. Der Punkt von μ wird in die Ebene von y gelegt. Dann wird μy erstens einmal von jeder Fläche erfüllt, welche die Gerade von y und die Verbindungsgerade des Punktes von μ mit dem Punkte von y enthält, zweitens zweimal von jeder Ausartung σ, deren Kegelschnittebene die Ebene von y ist, und deren Kegelschnitt die Gerade von y berührt, drittens von jeder Ausartung ε, deren eine Hauptebene die Ebene von y ist, während ein Hauptpunkt auf der Geraden von y liegt (§ 11., II, 6). Bezeichnet man also bei ε mit v die Bedingung, dass eine Hauptebene gegeben ist, und ein Hauptpunkt auf einer in dieser Ebene gegebenen Geraden liegt, sowie mit v' die reciproke Bedingung, so hat man:

$$\mu y = z + 2\sigma m^3 r + \varepsilon v$$

und reciprok:

$$\varrho y = z + 2\varkappa m r^3 + \varepsilon v'.$$

Nun ist aber nach § 11., II, Nr. 6,

$$\varepsilon y = \varepsilon v + \varepsilon v' + 4 \cdot \varepsilon \cdot \tfrac{1}{2}n^4.$$

Bei Benutzung dieser Gleichung erhält man also durch Addition der beiden reciproken Formeln für μy und ϱy:

$$\mu y + \varrho y = 2z + 2\sigma m^3 r + 2\varkappa m r^3 + \varepsilon(y - 2n^4).$$

Nach Einsetzung der Moduln für y und für die Ausartungssymbole erhält man aus dieser Gleichung für z folgenden elementaren Modul:

$$z = \tfrac{1}{16}(-2\nu^5 + 9\nu^4\mu + 9\nu^4\varrho - 12\nu^3\mu^2 - 16\nu^3\mu\varrho - 12\nu^3\varrho^2 + 10\nu^2\mu^3 + 10\nu^2\mu^2\varrho + 10\nu^2\mu\varrho^2 + 10\nu^2\varrho^3 - 4\nu\mu^4 - 2\nu\mu^3\varrho - 2\nu\mu\varrho^3 - 4\nu\varrho^4).$$

Dieser Modul für z ist von dem in § 10. abgeleiteten verschieden. Beide Moduln hängen zusammen durch die zwischen den fünffachen Charakteristiken bestehenden Relationen, welche in § 15. besprochen werden.

Wie ich schon oben (§ 10.) in einer Anmerkung erwähnt habe, ist der elementare Modul der Hauptbedingung x, eine Gerade zu enthalten, zuerst von Hurwitz durch Induction aufgefunden. Derselbe hat mir nun später auch einen hübschen Beweis geliefert, den ich mit seiner Erlaubniss in meiner Terminologie hier veröffentliche.

Hurwitz's Beweis für seinen Modul.

Es liegt nahe, den Modul der Bedingung x mit Hülfe des Princips der speciellen Lage dadurch abzuleiten, dass man den 3 Punkten der Bedingung μ^3 die besondere Lage von drei in *einer Geraden* g befindlichen Punkten ertheilt. Dann wird die Bedingung μ^3 in drei Fällen erfüllt:

erstens, einmal, wenn die F_2 die Gerade g enthält,

zweitens, viermal, wenn der Kegelschnitt der Ausartung σ seine Ebene durch g schickt,

drittens, einmal, wenn bei der Ausartung ε eine der beiden Hauptebenen durch g geht.

Die Multiplicität 4 im zweiten Falle erklärt sich daraus, dass für die Ausartung σ die Ebene ihres Kegelschnitts 2fach, *4fach*, 8fach zu zählen ist, wenn zu ihrer Bestimmung als doppeltes Punktfeld von σ, eine resp. einfache, *zweifache*, dreifache Bedingung gegeben ist.

Bezeichnet man daher bei ε die Bedingung, dass eine Hauptebene eine gegebene Gerade enthält, mit u, und die reciproke Bedingung mit u', so erhält man:

$$\mu^3 = x + 4\sigma m^2 + \varepsilon u,$$

und reciprok:

$$\varrho^3 = x + 4\varkappa r^2 + \varepsilon u'.$$

Hieraus folgt:

$$\mu^3 + \varrho^3 = 2x + 4\sigma m^2 + 4\varkappa r^2 + \varepsilon(u + u').$$

Nun ist, wenn bei ε die Bedingung, dass die Hauptgerade durch einen gegebenen Punkt geht, mit n_p und die reciproke Bedingung mit n_e bezeichnet wird, nach den allgemeinen Formeln in Schubert's „Beitr. z. abz. Geom." [II. Abschn. p. 33, F. 9) a) und 10) a)] (vergl. oben § 12. bei 5) b)):

$$\varepsilon u = (mn - 2n_p)\varepsilon,$$
$$\varepsilon u' = (rn - 2n_e)\varepsilon,$$

also auch:

$$\varepsilon(u+u') = \varepsilon(mn+rn-2n_p-2n_e) = \varepsilon(mn+rn-2n^2).$$

Substituirt man dies in die Formel für $\mu^3 + \varrho^3$, so kommt:

$$\mu^3 + \varrho^3 = 2x + 4\sigma m^2 + 4\varkappa r^2 + \varepsilon(mn+rn-2n^2).$$

Da nun bei σ $2m = \mu$, bei $\varkappa$ $2r = \varrho$, bei ε $m = \mu$, $2n = \nu$, $r = \varrho$ zu setzen ist, und bekanntlich

$$\sigma = 2\mu - \nu, \quad \varkappa = 2\varrho - \nu, \quad \varepsilon = 2\nu - \mu - \varrho$$

ist, so erhält man schliesslich für x den folgenden elementaren Modul:

$$x = \tfrac{1}{2}(\nu^3 + \nu\mu\varrho - \mu^3 - \varrho^3) + \tfrac{3}{4}(\nu\mu^2 + \nu\varrho^2 - \nu^2\mu - \nu^2\varrho).$$

§ 13.

Ein allgemeines Eliminationsverfahren in der Charakteristikentheorie.

Wir werden in den beiden folgenden Paragraphen ein Verfahren anwenden, welches dem in Clebsch-Lindemann's Werke (I. Bd. I. Thl. p. 403) *für den Kegelschnitt in fester Ebene angewandten Verfahren analog ist.* Da dieses Verfahren von der Natur des vorliegenden Gebildes und der ihm auferlegten Bedingungen ganz unabhängig ist, so erörtern wir die mit dem Verfahren zusammenhängenden, fast selbstverständlichen Wahrheiten vom *allgemeinsten Standpunkte* aus.

Wir setzen voraus, dass durch die α einem Gebilde mit der Constantenzahl c auferlegten a-fachen Bedingungen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_\alpha$$

jede beliebige andere a-fache Bedingung A in jedem beliebigen a-stufigen Systeme ausgedrückt werden kann; und zwar wird dies immer vermittelst einer ganzen linearen Function geschehen müssen (vergl. für meine Terminologie die hier in § 1. gegebenen Grundregeln). Dann lässt sich zunächst einsehen, dass *überhaupt nie mehr als α a-fache Bedingungen von einander unabhängig sein können.*

Wählt man nämlich $\alpha'\,(>\alpha)$ a-fache Bedingungen ganz beliebig aus, so kann man, der Voraussetzung gemäss, jede dieser Bedingungen durch $a_1, a_2, \cdots a_\alpha$ ausdrücken. Eliminirt man also die α Bedingungen $a_1, a_2, \cdots a_\alpha$ aus den so entstandenen α' Gleichungen, so bekommt man $\alpha' - \alpha$ Gleichungen zwischen den α' beliebig ausgewählten Bedingungen. Daraus folgt aber unsere Behauptung. Ist also für ein Gebilde *eine gewisse Gruppe* von α a-fachen Charakteristiken bekannt, so kann man auch *jeder* Gruppe von α von einander unabhängigen Bedingungen die Rolle von Charakteristiken zuweisen. Die Zahl α

möge dann die *a-fache* oder *a-stufige Charakteristikenzahl des Gebildes* heissen. Man kennt bis jetzt die sämmtlichen Charakteristikenzahlen nur bei dem Punkte, der Ebene, dem Strahle und dem Kegelschnitt in fester Ebene (vergl. Beitr. § 30.). Beim Punkt und der Ebene ist die einfache und die zweifache Charakteristikenzahl gleich1. Beim Strahl ist die einfache und die dreifache Charakteristikenzahl gleich 1, die zweifache gleich 2. Beim Kegelschnitt ist die einfache und die vierfache Charakteristikenzahl gleich 2, die zweifache und die dreifache gleich 3 (Cremona, C. R. Bd. 59, p. 776, Clebsch-Lindemann p. 404).

Es lässt sich nun zeigen, dass *bei jedem Gebilde mit der Constantenzahl c die a-fache und die (c—a)-fache Charakteristikenzahl gleich sein müssen.* Sei nämlich α die a-fache Charakteristikenzahl. Dann ist jede *beliebige* a-fache Bedingung A durch α willkürlich ausgewählte Bedingungen

$$a_1, a_2, \cdots a_\alpha$$

darstellbar. Es geschehe dies durch die Function

$$A = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \cdots p_\alpha \cdot a_\alpha,$$

wo die $p_1, p_2, \cdots p_\alpha$ Coefficienten sind, welche von der Natur der Bedingung A abhängen werden. Das a-stufige System, welches man sich bei der eben angegebenen Gleichung hinzuzudenken hat, kann man sich durch jede *beliebige* $(c-a)$-fache Bedingung erzeugt vorstellen. Mit andern Worten, die Gleichung kann mit *jeder* $(c-a)$-fachen Bedingung symbolisch multiplicirt werden. Wir thun dies mit den β willkürlich gewählten $(c-a)$-fachen Bedingungen

$$b_1, b_2, \cdots b_\beta.$$

Dann erhalten wir β Gleichungen, in denen auf den rechten Seiten die α mal β c-fachen Bedingungssymbole

$$a_1 b_1, a_2 b_1, \cdots a_\alpha b_\beta$$

vorkommen. Für jedes setze man nun die zugehörige *Anzahl* ein, nämlich für

$$a_i b_k$$

immer die *Zahl* der Gebilde, welche die a-fache Bedingung a_i und die $(c-a)$-fache Bedingung b_k erfüllen. Dann ergeben sich β Gleichungen, aus denen die α Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_\alpha$ eliminirt werden können. Nach dieser Elimination erhält man $\beta - \alpha$ Gleichungen zwischen den β beliebig gewählten $(c-a)$-fachen Bedingungen $b_1, b_2, \cdots b_\beta$, welche sich auf das durch die Bedingung A definirte $(c-a)$-stufige System, also auf ein ganz *beliebiges* $(c-a)$-stufiges System beziehen. Damit ist nachgewiesen, dass *nie mehr als* α $(c-a)$-*fache Bedingungen von einander unabhängig sein können*, dass also die $(c-a)$-fache Charakteristikenzahl nicht grösser als die a-fache sein

kann. Ebenso lässt sich natürlich zeigen, dass die a-fache nicht grösser als die $(c-a)$-fache Charakteristikenzahl ist. Daraus folgt, dass *beide Charakteristikenzahlen gleich* sind.

Aus diesem Beweise erhellt zugleich, wie man durch gewöhnliche *Eliminationen* die α Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_\alpha$, welche in den Modul:

$$A = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \cdots p_\alpha \cdot a_\alpha$$

einer a-fachen Bedingung A eintreten, durch die α Zahlen ausdrücken kann, welche angeben, wieviel Gebilde A und ausserdem α beliebig gewählte $(c-a)$-fache Bedingungen erfüllen, vorausgesetzt, dass man die α mal α Zahlen *kennt*, welche angeben, wieviel Gebilde jede dieser α beliebig gewählten $(c-a)$-fachen Bedingungen, und zugleich jede der α in den Modul von A aufgenommenen Bedingungen erfüllen.

Man kann den eben bewiesenen Satz auch so aussprechen: *„Bei jedem Gebilde mit der Constantenzahl c ist zur Bestimmung der Zahl der gemeinsamen Elemente eines a-stufigen und eines $(c-a)$-stufigen Systems aus jedem Systeme eine gleiche Zahl von Bedingungen erforderlich.“*

§ 14.

Die Relationen zwischen den Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume.

Wir haben in § 11. zwischen den 10 dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts

$$n^3,\ n^2r,\ nr^2,\ r^3,\ mn^2,\ mnr,\ mr^2,\ m^2n,\ m^2r,\ m^3$$

mehrere Male eine *Relation* gewonnen, welche lautete:

$$R \equiv 2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n - 8m^2r = 0.$$

Wir schliessen an diese Formel, welche, wie schon oben gesagt ist, die Verallgemeinerung der Formel 11 auf p. 406 des Clebsch-Lindemann'schen Werkes ist, eine Erörterung über die *Relationen zwischen den a-fachen Charakteristikenzahlen überhaupt.*

Zunächst ist leicht einzusehen, dass zwischen jenen 10 dreifachen Charakteristiken ausser $R=0$ nicht noch eine zweite Relation $S=0$ bestehen kann. Hätte $S=0$ nämlich von m freie Glieder, welche mit den von m freien Gliedern der Relation $R=0$ *nicht* übereinstimmten, so würde man daraus durch symbolische Multiplication mit m^3, d. h. für den Kegelschnitt *in fester Ebene*, noch eine zweite von der bekannten verschiedene Relation gewinnen können. Dass aber zwischen den dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts *in fester Ebene* nur die eine Relation besteht, ist bekannt. Stimmten ferner die von m freien Glieder der etwaigen zweiten Relation $S=0$ mit den von m freien Gliedern in $R=0$ überein, so würde man durch Subtraction der beiden Formeln

$R = 0$ und $S = 0$ eine Relation gewinnen, welche keine von m freien Glieder besässe, welche also durch symbolische Multiplication mit m^2 eine Relation zwischen den *zweifachen* Charakteristiken *bei fester Ebene* ergeben würde. Dass eine solche nicht existirt, ist durch Cremona's, Halphen's und Lindemann's Untersuchungen bekannt. Daher ist auch der dritte denkbare Fall nicht möglich, dass die etwaige zweite Relation $S = 0$ keine von m freien Glieder besässe. $R = 0$ *ist also die einzige Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken.* Aus diesem Beweise geht zugleich hervor, dass *zwischen den zweifachen und zwischen den einfachen Charakteristiken keine Relation* bestehen kann.

Es fragt sich nun, *wieviel Relationen zwischen den* 14 *vierfachen Charakteristiken:*

$$n^4,\ n^3r,\ n^2r^2,\ nr^3,\ r^4,\ mn^3,\ mn^2r,\ mnr^2,\ mr^3,\ m^2n^2,\ m^2nr,\ m^2r^2,$$
$$m^3n,\ m^3r$$

bestehen. Zunächst ergeben sich aus $R = 0$ durch symbolische Multiplication mit m, n, r *drei* solche Relationen, welche sich leicht als von einander unabhängig erkennen lassen. Es muss jedoch noch eine *vierte* von diesen dreien unabhängige Relation bestehen. Denn beim Kegelschnitt in fester Ebene giebt es zwischen den vierfachen Charakteristiken nicht bloss die beiden Relationen, welche aus der Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken durch symbolische Multiplication mit n und r hervorgehen, sondern noch eine andere von diesen unabhängige Relation. Dort kann man eine solche andere Relation durch Benutzung des Umstandes erhalten, dass der in ein Punktepaar ausgeartete Kegelschnitt die Bedingung, durch *drei* in der Ebene gegebene *Punkte* zu gehen, nicht zu erfüllen vermag, oder auch dadurch, dass der in ein Geradenpaar ausgeartete Kegelschnitt die Bedingung, *drei* in der Ebene gegebene *Gerade* zu berühren, nicht befriedigen kann. Ein analoges Verfahren schlagen wir jetzt ein, um auch für den Kegelschnitt im Raume 2 Relationen abzuleiten, deren jede von den drei Relationen

$$mR = 0,\quad nR = 0,\quad rR = 0$$

unabhängig ist. Man bezeichne mit δ den Kegelschnitt, dessen sämmtliche Punkte auf zwei Geraden liegen, und dessen sämmtliche Tangenten die *doppelt* zu rechnenden Strahlen durch den Schnittpunkt dieser beiden Geraden sind, ferner mit ε den Kegelschnitt, dessen sämmtliche Punkte die *doppelt* zu rechnenden Punkte einer Geraden sind, und dessen sämmtliche Tangenten die Strahlen zweier Strahlbüschel sind, deren Scheitel auf jener Geraden liegen. Dann verlangt unsere Terminologie, dass wir mit δ resp. ε auch die Zahl der in einem einstufigen Systeme von Kegelschnitten befindlichen Ausartungen δ resp. ε bezeichnen, und mit δz resp. εz die Zahl derjenigen Ausartungen δ

resp. ε eines Systems, welche die Bedingung z erfüllen. Also giebt das Chasles'sche Correspondenzprincip im Strahlbüschel und im Ebenenbüschel die beiden Formeln:

$$2n = r + 2m + \varepsilon,$$
$$2r = n + \delta.$$

Ist ferner p der Punkt der Ausartung δ, e ihre Ebene, so besteht zwischen den Grundbedingungen von p und e die aus meinen Beitr. (§ 9., III.) bekannte allgemeine Formel:

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0.$$

Wird δ nun als Kegelschnitt betrachtet, so ist $r = 2p$, $m = e$ zu setzen. Daher ergiebt jene allgemeine Formel für den Kegelschnitt die Relation:

$$\delta\,(\tfrac{1}{8}r^3 - \tfrac{1}{4}r^2 m + \tfrac{1}{2}r m^2 - m^3) = 0,$$

oder:

$$(2r - n)\,(\tfrac{1}{8}r^3 - \tfrac{1}{4}r^2 m + \tfrac{1}{2}r m^2 - m^3) = 0,$$

woraus man die *folgende Relation zwischen den vierfachen Charakteristiken des Kegelschnitts* im Raume erhält:

$$T \equiv 2r^4 - nr^3 + 2mnr^2 - 4mr^3 - 4m^2nr + 8m^2r^2 + 8m^3n - 16m^3r = 0.$$

Wenden wir jetzt das analoge Verfahren bei der Ausartung ε an, deren Gerade g und deren Ebene e heissen möge, so haben wir von den allgemeinen Formeln diejenige zu benutzen, welche sich aus

$$g_p - eg + e^2 = 0 \text{ (Beitr. § 9., II.)}$$

durch symbolische Multiplication mit g ergiebt, also:

$$\tfrac{1}{2}g^3 - eg^2 + e^2 g = 0.$$

Setzen wir also für den Kegelschnitt ε $2g = n$, $e = m$, so kommt:

$$\varepsilon\,(\tfrac{1}{16}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 m + \tfrac{1}{2}n m^2) = 0,$$

oder:

$$(2n - r - 2m)\,(\tfrac{1}{16}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 m + \tfrac{1}{2}n m^2) = 0,$$

woraus man die *folgende Relation zwischen den vierfachen Charakteristiken des Kegelschnitts* im Raume erhält:

$$T' \equiv 2n^4 - n^3 r - 10mn^3 + 4mn^2 r + 24m^2n^2 - 8m^2nr - 16m^3n = 0.$$

Wir haben jetzt im Ganzen 5 Relationen vierter Dimension gewonnen, nämlich:

$$mR = 0, \quad nR = 0, \quad rR = 0, \quad T = 0, \quad T' = 0.$$

Dass aber *beim Kegelschnitt im Raume nur 4 von einander unabhängige Relationen vierter Dimension* bestehen können, folgt, ähnlich

wie oben, daraus, dass erstens für den Kegelschnitt in fester Ebene nur 3 solche Relationen existiren, und dass zweitens nur Eine Relation *vierter* Dimension möglich ist, deren sämmtliche Glieder den Factor m enthalten, weil nur die Eine Relation *dritter* Dimension bestehen konnte. Es muss also zwischen den abgeleiteten 5 Relationen eine *Abhängigkeit* stattfinden. In der That ist:

$$Rn + Rr - 2Rm + T - T' = 0.$$

Demgemäss müssen auch die *Relationen, welchen wir in* § 11., Nr. 6, *begegnet sind, von den eben angegebenen Relationen abhängen.* Es ist leicht, diese Abhängigkeit zu constatiren.

Die voranstehenden Betrachtungen über die Relationen zwischen den aus m, n, r zusammengesetzten Bedingungen, und eine in § 13. gegebene Definition berechtigen jetzt zu dem Ausspruch des folgenden Satzes:

Wenn überhaupt beim Kegelschnitt im Raume jede Bedingung durch die Charakteristiken m, n, r ausgedrückt werden kann, so hat dieses Gebilde:

1) *die einfache Charakteristikenzahl* 3,
2) *die zweifache* 6,
3) *die dreifache* $10 - 1 = 9$,
4) *die vierfache* $14 - 4 = 10$.

Wenden wir jetzt den im vorigen Paragraphen erläuterten allgemeinen Satz auf den Kegelschnitt im Raume an, so erhalten wir weiter: Dieses Gebilde hat:

5) *die fünffache Charakteristikenzahl* $9 = 18 - 9$,
6) *die sechsfache* $6 = 22 - 16$,
7) *die siebenfache* $3 = 26 - 23$.

Die 9, 16, 23 von einander unabhängigen Relationen zwischen den bez. 18 fünffachen, 22 sechsfachen, 26 siebenfachen Charakteristiken würden durch das *Eliminationsverfahren* von § 13. leicht hergestellt werden können.

§ 15.

Die Relationen zwischen den Charakteristiken der Fläche zweiter Ordnung.

Wir sind in § 10. *zwei Relationen zwischen den vierfachen Charakteristiken* der F_2 begegnet. Diese Relationen können auch sehr leicht aus der zwischen den dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts bestehenden, in § 14. besprochenen Relation $R = 0$ gewonnen werden. Da nämlich für die F_2:

$$\sigma = 2\mu - \nu;$$
$$2m\sigma = \mu\sigma; \quad n\sigma = \nu\sigma; \quad r\sigma = \varrho\sigma$$

ist, so erhalten wir aus jener Relation zwischen den m, n, r des Kegelschnitts, für die F_2 die Relation:

$$(2\mu-\nu)\,(2\nu^3-3\nu^2\varrho+3\nu\varrho^2-2\varrho^3-3\mu\nu^2+2\mu\nu\varrho+3\mu^2\nu-2\mu^2\varrho)=0$$

oder:

$$U \equiv -2\nu^4+7\nu^3\mu+3\nu^3\varrho-9\nu^2\mu^2-8\nu^2\mu\varrho-3\nu^2\varrho^2+6\nu\mu^3+6\nu\mu^2\varrho$$
$$+6\nu\mu\varrho^2+2\nu\varrho^3-4\mu^3\varrho-4\mu\varrho^3=0.$$

Da die F_2 sich selbst reciprok ist, diese Relation aber nicht, so erhalten wir aus ihr durch dualistische Uebertragung eine neue Relation, nämlich:

$$U' \equiv -2\nu^4+3\nu^3\mu+7\nu^3\varrho-3\nu^2\mu^2-8\nu^2\mu\varrho-9\nu^2\varrho^2+2\nu\mu^3+6\nu\mu^2\varrho$$
$$+6\nu\mu\varrho^2+6\nu\varrho^3-4\mu^3\varrho-4\mu\varrho^3=0.$$

Die Berechnung von $-\frac{1}{2}(U+U')$ und von $\frac{1}{2}(U-U')$ giebt zwei sich selbst reciproke Relationen, nämlich:

$$-\tfrac{1}{2}(U+U') \equiv V \equiv 2\nu^4-5\nu^3\mu-5\nu^3\varrho+6\nu^2\mu^2+8\nu^2\mu\varrho+6\nu^2\varrho^2$$
$$-4\nu\mu^3-6\nu\mu^2\varrho-6\nu\mu\varrho^2-4\nu\varrho^3+4\mu^3\varrho$$
$$+4\mu\varrho^3=0;$$
$$\tfrac{1}{2}(U-U') \equiv W \equiv 2\nu^3\mu-2\nu^3\varrho-3\nu^2\mu^2+3\nu^2\varrho^2+2\nu\mu^3-2\nu\varrho^3=0.$$

Diese Relationen $V=0$ und $W=0$ sind dieselben, die wir schon in § 10. angetroffen, und dort mit 8) und 9) bezeichnet haben.

Bezieht man die Relationen $V=0$ und $W=0$ *auf die ausgeartete Fläche* σ, so erhält man, nach Einführung der Symbole m, n, r für μ, ν, ϱ, Relationen für den Kegelschnitt, welche die in § 14. besprochenen Relationen *bestätigen*.

Wir beweisen nun, dass zwischen den *dreifachen* Charakteristiken der F_2 *keine Relation* bestehen kann. Bestände nämlich eine solche $S=0$, so würde dieselbe, auf σ angewandt, die *einzige* Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts $R=0$ geben müssen. $S=0$ würde also, in μ, ν, ϱ ausgedrückt, heissen müssen, wie folgt:

$$2\nu^3-3\nu^2\mu-3\nu^2\varrho+3\nu\mu^2+3\nu\varrho^2+2\nu\mu\varrho-2\mu^2\varrho-2\varrho^3=0.$$

Da die F_2 aber ein sich selbst reciprokes Gebilde ist, so würde diese Relation, dualistisch übersetzt, eine zweite Relation nach sich ziehen, welche von ihr verschieden ist. Diese würde, auf σ angewandt, eine von $R=0$ verschiedene Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken des Kegelschnitts geben. Wir wissen aber, dass eine solche

nicht existirt. *Also besteht zwischen den dreifachen Charakteristiken der F_2 keine Relation.*

In ähnlicher Weise, wenn auch vielleicht etwas umständlicher, kann man finden, dass *zwischen den vierfachen Charakteristiken* ausser den beiden Relationen $V = 0$ und $W = 0$ *keine dritte* von diesen unabhängige existiren kann.

Damit gewinnen wir denn den Satz:

Wenn überhaupt bei der quadratischen Fläche jede Bedingung durch die Charakteristiken μ, ν, ϱ ausgedrückt werden kann, so hat dieses Gebilde:

1) *die einfache Charakteristikenzahl* 3,
2) *die zweifache* 6,
3) *die dreifache* 10,
4) *die vierfache* $15 - 2 = 13$.

Wenden wir jetzt den in § 13. erläuterten allgemeinen Satz auf die F_2 an, so erhalten wir weiter: Dieses Gebilde hat:

5) *die fünffache Charakteristikenzahl* $13 = 21 - 8$,
6) *die sechsfache* $10 = 28 - 18$,
7) *die siebenfache* $6 = 36 - 30$,
8) *die achtfache* $3 = 45 - 42$.

Die 8, 18, 30, 42 von einander unabhängigen Relationen, welche hiernach zwischen den bez. 21 fünffachen, 28 sechsfachen, 36 siebenfachen, 45 achtfachen Charakteristiken der F_2 bestehen müssen, könnte man jetzt durch das *Eliminationsverfahren* des § 13. *ohne sachliche Schwierigkeit* herstellen. Doch würde dieser Weg etwas langweilig sein. Wir wollen desshalb die 8 Relationen zwischen den fünffachen, und die 18 zwischen den sechsfachen Charakteristiken auf einem anderen, etwas interessanteren Wege aufsuchen. Wir erhalten nämlich zunächst durch symbolische Multiplication der beiden Relationen $V = 0$ und $W = 0$ mit μ, ν und ϱ *sechs* Relationen fünfter Dimension. Beachten wir ferner, dass die Ausartung σ die Bedingung μ^4 nicht zu erfüllen vermag, weil durch 4 gegebene Punkte keine Ebene gelegt werden kann, so erhalten wir $\sigma\mu^4 = 0$, oder:

$$(2\mu - \nu)\,\mu^4 = 0$$

und reciprok:

$$(2\varrho - \nu)\,\varrho^4 = 0.$$

Es fragt sich nun, ob die so gewonnenen 8 *Relationen von einander unabhängig sind.* Um dies zu untersuchen, bilden wir die Gleichung:

$$\alpha\cdot\mu\,V + \beta\cdot\nu\,V + \gamma\cdot\varrho\,V + \delta\cdot\mu\,W + \varepsilon\cdot\nu\,W + \zeta\cdot\varrho\,W + \eta\cdot(2\mu^5 - \mu^4\nu) + \vartheta\cdot(2\varrho^5 - \varrho^4\nu) = 0,$$

wo die α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ *unbestimmte Coefficienten* sind, und setzen den Coefficienten jeder der entstehenden 21 fünffachen Charakteristiken gleich Null. Dann ergiebt sich, dass die 21 so gebildeten Gleichungen sich in keinem andern Falle mit einander vertragen, als wenn jeder der 8 Coefficienten Null ist. Folglich sind jene 8 Relationen von einander *unabhängig*.

Für die sechsfachen Charakteristiken erhält man zunächst 18 Relationen dadurch, dass man $V=0$ und $W=0$ mit ν^2, $\nu\mu$, $\nu\varrho$, μ^2, $\mu\varrho$, ϱ^2; ferner $2\mu^5-\mu^4\nu=0$ und $2\varrho^5-\varrho^4\nu=0$ mit μ, ν und ϱ symbolisch multiplicirt. Jedoch sind *diese* 18 *Relationen nicht von einander unabhängig*. Man findet nämlich durch das Verfahren, welches dem eben bei den fünffachen Charakteristiken angewandten Verfahren analog ist, dass die 18 Relationen nur 17 von einander unabhängige repräsentiren. Dieses constatiren wir in folgender Weise.

Die beiden Relationen vierter Dimension konnten wir dadurch gewinnen, dass wir den aus R hervorgehenden Ausdruck:

$$Q = 2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\varrho + 3\nu\mu^2 + 2\nu\mu\varrho + 3\nu\varrho^2 - 2\mu^2\varrho - 2\varrho^3$$

mit $2\mu-\nu$ symbolisch multiplicirten, und den erhaltenen Ausdruck, sowie den dualistisch entsprechenden gleich Null setzten. Die beiden Relationen waren also:

$$(2\mu-\nu)\cdot Q=0 \text{ und } (2\varrho-\nu)\cdot Q'=0,$$

wo Q' der zu Q reciproke Ausdruck ist. Multiplicirt man nun die erste Relation symbolisch mit $(2\varrho-\nu)\cdot(\mu+\varrho)$, die zweite mit $(2\mu-\nu)$, $(\mu+\varrho)$, und subtrahirt die zweite der entstehenden Gleichungen von der ersten, so erhält man folgende Relation sechster Dimension:

$$(2\mu-\nu)(2\varrho-\nu)(\mu+\varrho)(Q-Q')=0,$$

und da

$$Q-Q'=2(\mu^3-\mu^2\varrho+\mu\varrho^2-\varrho^3)$$

ist,

$$2(2\mu-\nu)(2\varrho-\nu)\cdot(\mu+\varrho)(\mu^3-\mu^2\varrho+\mu\varrho^2-\varrho^3)=0,$$

woraus folgt:

$$(2\mu-\nu)(2\varrho-\nu)(\mu^4-\varrho^4)=0.$$

Diese selbe Relation erhält man aber auch, wenn man die Relation $(2\mu-\nu)\cdot\mu^4=0$ mit $2\varrho-\nu$, die dualistisch entsprechende mit $2\mu-\nu$ symbolisch multiplicirt, und die zweite der entstehenden Gleichungen von der ersten subtrahirt. Dann kommt nämlich auch:

$$(2\mu-\nu)(2\varrho-\nu)(\mu^4-\varrho^4)=0.$$

Folglich *repräsentiren jene* 18 *Relationen nur* 17 *von einander unabhängige*. Da wir nun a priori wissen, dass 18 von einander unabhängige Relationen zwischen den 6-fachen Charakteristiken existiren,

so muss noch *eine achtzehnte* von den 17 gefundenen Relationen *unabhängige* Relation bestehen. In der That erhält man eine solche, wenn man beachtet, dass die Ausartung ε die Bedingung ν^5 nicht zu erfüllen vermag, weil es keine Gerade giebt, die fünf beliebig gegebene Gerade schneidet. Daraus folgt nämlich $\nu^5 \varepsilon = 0$, oder:

$$\nu^5 (2\nu - \mu - \varrho) = 0,$$

und dieses ist die gesuchte achtzehnte Relation.

Hildesheim, den 29. Februar 1876.

Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades.

Von Felix Klein in München.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit der Aufgabe, bei den allgemeinen Curven vierten Grades den Verlauf der Abel'schen Integrale an den Curven selbst zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Inzwischen dürfen sie nur als ein erster Versuch in dieser Richtung betrachtet werden; denn sie sind weder methodisch durchgebildet noch umfassend genug, um als abschliessende Behandlung des Gegenstandes zu erscheinen. Immerhin hoffe ich, einen brauchbaren Anfang zu machen, ähnlich, wie ich dies früher (diese Annalen VII, p. 560) hinsichtlich des elliptischen Integrals bei den Curven dritten Grades versuchte — ein Versuch, auf welchem dann Hr. Harnack weiter gearbeitet hat (ib. IX, p. 1, 218). Hier wie dort bildet das hauptsächliche Hülfsmittel *die neue Art Riemann'scher Flächen*, welche ich damals einführte (obgleich man dieselben Dinge minder bequem auch bei der gew. Riemann'schen Fläche würde überlegen können). Ich verwende sodann, bei dieser ersten Darstellung, in ausgiebiger Weise das Princip, *complicirte Verhältnisse aus einfachen durch Grenzübergang entstehen zu lassen und so der Discussion zugänglich zu machen*. Indem ich von einem Ellipsenpaare als specieller Curve vierten Grades ausgehe, erhält der Stoff eine Gruppirung und Begrenzung, die man vielfach als zufällig erkennen wird; auch wird man finden, dass die Darstellung an manchen Orten nur skizzenhaft ist. Was mir werthvoll scheint, ist die *Tendenz* der Betrachtungen und die *Art* der Resultate; ich gebe der Hoffnung Raum, später dieselben Dinge systematischer und vollständiger, vielleicht unter Ausdehnung auf Curven n^{ten} Grades, noch einmal vortragen zu können.

§ 1.

Graphische Repräsentation algebraischer Integrale.

Den Verlauf einer Function von $x + iy$

$$f(x+iy) = P + iQ$$

kann man in der Art passend zur Anschauung bringen, dass man in der $x + iy$-Ebene die Curvensysteme

$$P = C, \quad Q = C$$

zeichnet. Ist f insbesondere das Integral einer algebraischen Function, und substituirt man für die $x + iy$-Ebene die zugehörige (gewöhnliche) Riemann'sche Fläche, so wird dieselbe, allgemein zu reden, von jedem der beiden Curvensysteme einfach überdeckt sein, und in jedem Punkte wird sich die hindurchgehende Curve P mit der hindurchgehenden Curve Q rechtwinklig kreuzen. Eine Ausnahme machen nur die Verschwindungspunkte des Differentials und die Unendlichkeitspunkte. Durch einen Verschwindungspunkt (den wir in der Folge immer als einfach voraussetzen wollen) gehen zwei zu einander rechtwinklige Curven P und ebenso zwei zu einander rechtwinklige Curven Q; wechselseitig schliessen diese Curven Winkel von 45° ein. — Von Unendlichkeitspunkten mögen auch nur die einfachsten in Betracht gezogen werden, in denen das Integral unendlich wird wie $c \cdot \log z$ für $z = 0$. Noch fügen wir die Beschränkung hinzu, dass c eine *reelle* Constante sein soll. Dann wird der betr. Punkt von den Curven P in immer enger werdenden Kreisen umgeben, während in allen Richtungen Curven Q durch ihn hindurchgehen.

Neben diesen Sätzen, die als bekannt gelten können, und einigen anderen, die sich weiterhin an den einzelnen Figuren von selbst ergeben, werde ich noch den folgenden gebrauchen:

Ist eine Curve P oder Q geschlossen, so sind es die nächstfolgenden auch.

Um ihn zu beweisen, scheint es am einfachsten, das Bild einer *strömenden Flüssigkeit* zu verwerthen, und desshalb stelle ich ihn hier voran, da diese andersartige Vorstellung später den allgemeinen Gedankengang zu sehr unterbrechen würde. Es sei die Riemann'sche Fläche mit einer überall gleich hohen Schicht einer homogenen Flüssigkeit überdeckt und diese bewege sich in der Art, dass P das Geschwindigkeitspotential ist. Dann sind bekanntlich die Curven $Q = C$ die Strömungscurven und die Strömung ist, geometrisch zu reden, *stationär*. In jedem Punkte wird ebensoviel Flüssigkeit abgegeben als aufgenommen, nur die Unendlichkeitspunkte repräsentiren *Quellen* von einer gewissen, positiven oder negativen, Ergiebigkeit. (Vertauscht man die Buchstaben P und Q, so repräsentiren die Unendlichkeitspunkte, für die dann gedachte Flüssigkeitsbewegung, nicht mehr Quellen, sondern *Wirbelpunkte*.) Auf Grund dieser Vorstellung ergiebt sich unser Satz sofort. Man betrachte die Flüssigkeit, welche in dem Canale strömt, der von zwei Curven $Q = C$ und $Q = C + dC$ eingeschlossen wird. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und also die Breite des Canals ist eine eindeutige Function der Stelle in der Riemann'schen Fläche; läuft also das eine Ufer des Canals in sich zurück, so das andere

auch, w. z. b. Bei diesem Beweise ist vorausgesetzt, dass der Canal keinen Unendlichkeitspunkt und keinen Verschwindungspunkt des Differentials einschliesst; in den Fällen wäre auch der Satz nicht ohne Weiteres richtig.

Statt der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche wollen wir jetzt eine von der „neuen Art" voraussetzen. Für sie werden die über die Curvensysteme P, Q aufgestellten Sätze im Wesentlichen auch gelten, d. h. soweit sie blosse Lagenverhältnisse betreffen. Unsere Flächen sind Aggregate ebener Blätter und müssen also an den Randcurven, in welchen zwei verschiedene Blätter zusammenhängen, mit unendlich grosser Krümmung gedacht werden. Inzwischen ist es vortheilhaft, sich die betr. Flächen als stetig gekrümmte, im Raume gelegene Flächen vorzustellen, von welchen die betr. ebene Figur nur eine perspectivische Zeichnung giebt, bei der sich an den Randcurven Verkürzungen einstellen. Diese räumlichen Flächen werden von den Curven P, Q in der Art je einfach überdeckt, dass sich die beiden Curvenschaaren überall, freilich nicht rechtwinklig, aber unter endlichem Winkel durchschneiden (vergl. indess diese Annalen IX, p. 31 Note). In den Verschwindungspunkten des Differentials werden sich zwei Curven P und zwei Curven Q kreuzen; die Curven P werden die Curven Q von einander trennen. In den Unendlichkeitspunkten werden die Curven Q nach wie vor von allen Seiten zusammenlaufen, und die Curven P werden diese Punkte mit immer enger werdenden Ovalen umgeben. Dass auf geschlossene Curven P, Q zunächst weitere geschlossene folgen, bleibt richtig, u. s. f.

§ 2.

Das Logarithmus-Integral beim Kegelschnitt.

Es seien u_1, u_2, u_3 die homogenen Coordinaten der geraden Linie, $f(u) = 0$ sei die Gleichung eines als Classencurve aufgefassten Kegelschnitts. Dann sind die einfachsten Integrale, welche längs desselben erstreckt werden können, in der Form enthalten:

$$\int \frac{\begin{vmatrix} c_1 & u_1 & du_1 \\ c_2 & u_2 & du_2 \\ c_3 & u_3 & du_3 \end{vmatrix}}{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)\left(c_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial u_3}\right)} = \int \frac{|cu\,du|}{u_\alpha \cdot \Sigma c_i f_i}.$$

Wird der Punkt $u_\alpha = 0$ als nicht dem Kegelschnitte angehörig vorausgesetzt, so besitzt das Integral zwei einfache Unendlichkeitsstellen, entsprechend den beiden Tangenten, die man von dem Punkte an den Kegelschnitt legen kann; dagegen giebt es keine Verschwindungspunkte des Differentials.

Es soll nun $f = 0$ als Ellipse gezeichnet sein, $u_\alpha = 0$ sei ein reeller Punkt ausserhalb derselben. Dann mag eine solche Coordinatenbestimmung U_1, U_2, U_3 eingeführt werden, dass

$U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Berührungspunkte der beiden von $u_\alpha = 0$ ausgehenden Tangenten,

$U_3 = 0$ den Punkt $u_\alpha = 0$ selbst vorstellt.

So wird bei geeigneter Bestimmung der Factoren der Kegelschnitt die Gleichung erhalten:

$$F = U_1 U_2 - U_3^2 = 0,$$

während das Integral die Form:

$$\int \frac{|CU\,dU|}{U_3 \cdot \Sigma C_i F_i}$$

angenommen hat. Setzt man $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, so bekommt man:

$$\int \frac{U_1 dU_2 - U_2 dU_1}{-2U_3^2} = \int \frac{U_1 dU_2 - U_2 dU_1}{-2U_1 U_2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{U_1}{U_2} + K,$$

wo die Integrationsconstante K weiterhin gleich Null gesetzt werden soll.

Die Werthe, welche das auf diese Weise gewonnene Integral

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{U_1}{U_2} = P + iQ$$

bei seiner Ausbreitung über die zur Ellipse gehörige, das Innere derselben doppelt überdeckende Riemann'sche Fläche annimmt, insbesondere die Curvensysteme $P = C$, $Q = C$, sollen jetzt untersucht werden.

Zu dem Zwecke setze ich die Coordinaten U_2, U_3 einer complexen Tangente des Kegelschnittes gleich:

$$U_2 = 1,$$
$$U_3 = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi);$$

dann wird, vermöge der Kegelschnittgleichung:

$$U_1 = \varrho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Der reelle Punkt, welcher dieser complexen Tangente angehört und der sie, als Punkt der Riemann'schen Fläche gedacht, repräsentirt, wird den beiden Gleichungen genügen:

$$\varrho^2 \cos 2\varphi \cdot x_1 + x_2 + \varrho \cdot \cos\varphi \cdot x_3 = 0,$$
$$\varrho^2 \sin 2\varphi \cdot x_1 + \cdot\ + \varrho \cdot \sin\varphi \cdot x_3 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \varrho^2 : -2\varrho\cos\varphi$$

und

$$\varrho = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}, \qquad \cos\varphi = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x_3}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}.$$

Andererseits aber ist unser Integral:

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = P + iQ = \log\varrho + i\varphi,$$

sodass also:

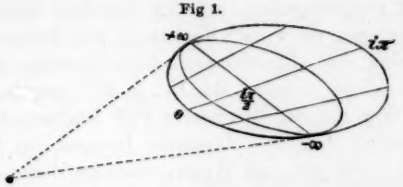
$$P = \log\varrho, \quad Q = \varphi.$$

Die Curven $P = C$, $Q = C$ genügen daher auch Gleichungen der Form $\varrho = C$, $\varphi = C$ oder $\frac{x_1}{x_2} = C$, $\frac{x_3^2}{x_1 x_2} = C$.

Die Curven $P = C$ werden also vorgestellt durch Stücke von geraden Linien, die, verlängert gedacht, durch den Punkt U_3 hindurchgehen. Die Curven $Q = C$ bilden Bestandtheile von Kegelschnitten, welche die gegebene Ellipse in den Punkten U_1, U_2 berühren.

Diese Verhältnisse sind auf der beistehenden Figur erläutert:

Fig 1.



Man hat die geraden Linien $P = C$ aufzufassen als Curven, die sowohl auf der Vorderseite als auf der Rückseite des elliptischen Doppelblattes verlaufen. Denkt man sich das letztere räumlich, als Ellipsoid, so umgeben diese Curven die beiden Unendlichkeitsstellen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ mit immer enger werdenden Ovalen. Ich nenne diese Curven, sowie auch später ähnlich gelegene Curven bei complicirteren Flächen, *Meridiancurven*. — Die Curven $Q = C$ liegen entweder ganz auf der Vorderseite oder ganz auf der Rückseite der Fläche und ziehen sich von einer Unendlichkeitsstelle zur anderen hin. Zu ihnen gehören namentlich auch die beiden Segmente, in welche die gegebene Ellipse durch die beiden Unendlichkeitspunkte zerlegt wird, sowie die geradlinige Strecke, welche diese Punkte verbindet. Längs des einen Segmentes finden sich die reellen Werthe des Integrals, oder allgemein diejenigen, deren imaginärer Bestandtheil ein ganzzahliges Multiplum von $\pm 2i\pi$ beträgt. Die Punkte des anderen Segmentes erhalten Argumente mit dem imaginären Bestandtheile $i\pi$, resp. unter k eine ganze Zahl verstanden $i\pi(\pm 2k + 1)$. Endlich, längs der geradlinigen Strecke sind solche Werthe vertheilt, welche, modulo $2i\pi$, den imaginären Bestandtheil $\frac{i\pi}{2}$ oder $\frac{3i\pi}{2}$ aufweisen. Die ersteren mögen der betr. Strecke beigelegt werden, sofern sie auf der Vorderseite der Riemann'schen Fläche gedacht wird, dann finden die anderen ihre Repräsen-

tation an den entsprechenden Stellen der Rückseite. Durchläuft man eine Meridiancurve, am Segmente der reellen Argumente beginnend, über die Vorderseite der Fläche hin und dann über die Rückseite zum Ausgangspunkte zurück, so wächst nach dieser Festsetzung das Integral um $+2i\pi$. Die Periode tritt also positiv zu, wenn man den negativen Unendlichkeitspunkt in einem Sinne umkreist, der für einen aussen stehenden Beobachter mit dem Sinne des Zeigers einer Uhr übereinstimmt. Diese, übrigens willkürlich aufgestellte, Regel soll weiterhin immer festgehalten werden. — Noch mag hervorgehoben werden, dass die Curven $Q = C$, abgesehen von der eben besprochenen geradlinigen Strecke, die gegebene Ellipse in den Unendlichkeitsstellen alle berühren. Dies hat in der That zur Folge, wie es nach § 1. sein soll, dass, bei der räumlich gedachten Fläche, die Curven $Q = C$ durch die Unendlichkeitspunkte von allen Seiten hindurchlaufen.

Die hiermit vorgetragenen, auf den einzelnen Kegelschnitt bezüglichen Entwickelungen, die wir als Einleitung zum Folgenden hier vorangestellt haben, sind, von allgemeinerem Gesichtspunkte aus, bereits von Hrn. Harnack (diese Annalen Bd. IX, p. 407) gegeben worden. Sie erscheinen bei ihm als ein besonderer Fall umfassenderer Sätze, die sich auf das überall endliche elliptische Integral bei Curven dritten Grades beziehen. Die Art und Weise, vermöge deren er von der allgemeinen Curve dritter Classe hinabsteigt zu der besonderen Curve, die aus einem Kegelschnitte und einem Punkte besteht, ist durchaus analog der weiterhin von uns eingehaltenen Methode, von einem Kegelschnittpaare zur allgemeinen Curve vierter Classe aufzusteigen. Es würde zu weit führen, diese Analogie weiterhin fortwährend hervortreten zu lassen; ich beschränke mich also auf das hier gegebene Citat.

§ 3.

Integrale beim Kegelschnittpaare.

Es mögen jetzt zwei Ellipsen gegeben sein, die congruent, concentrisch und unter 90 Grad gegen einander gekreuzt sind. Ihre Gleichungen seien, in rechtwinkeligen Liniencoordinaten:

$$\psi = 0, \quad \chi = 0,$$

wo

$$\psi = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2,$$
$$\chi = b^2u^2 + a^2v^2 - w^2.$$

So soll die Vereinigung beider:

$$\varphi = 0 \quad (\varphi = \psi \cdot \chi)$$

als Curve vierter Classe betrachtet werden, und bei ihr mögen wir einige derjenigen Integrale studiren, die bei der allgemeinen Curve

vierter Classe (die keine Doppeltangente hat) als Integrale erster Gattung bezeichnet werden. Dieselben haben die Gestalt:

$$\int \frac{|\, c u\, du\,| \cdot u_\alpha}{\Sigma c_i \varphi_i},$$

(statt u_1, u_2, u_3 ist dann bez. u, v, w zu schreiben). Sie enthalten drei wesentliche Constanten, die Coefficienten α des Zählers; der Punkt $u_\alpha = 0$ soll der *Nullpunkt* des Integrals genannt werden.

Diese Integrale haben, ausgedehnt über die Riemann'sche Fläche der Curve $\varphi = \psi\chi = 0$ (die Fläche besteht aus den beiden elliptischen Doppelblättern ψ und χ), im Allgemeinen *acht* (einfache) Unendlichkeitsstellen, die 8 Berührungspunkte der vier, ψ und χ gemeinsamen Tangenten; ihr Differential ferner hat, im Allgemeinen, *vier* einfache Verschwindungspunkte, diejenigen, welche die vier Tangenten repräsentiren, die man von dem Nullpunkte α an das Ellipsenpaar legen kann. Man kann diese Verschwindungspunkte dazu benutzen, um vier der Unendlichkeitsstellen zu zerstören; man hat zu dem Zwecke den Nullpunkt α nur in einen der 6 Kreuzungspunkte der 4 gemeinsamen Tangenten von ψ und χ zu legen. Das Integral hat dann nur noch 4 und also auf dem einzelnen elliptischen Doppelblatte nur noch 2 Unendlichkeitspunkte, reducirt sich also, nach bekannten Sätzen, für jede der beiden Ellipsen auf einen Logarithmus.

Von den genannten sechs Kreuzungspunkten der vier gemeinsamen Tangenten wollen wir die vier im Endlichen gelegenen als Nullpunkte von Integralen benutzen. Die Gleichungen dieser Punkte sind:

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot u + w = 0, \qquad \pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot v + w = 0.$$

Dementsprechend sei gesetzt:

$$\left.\begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix}\right\} = \int \frac{|\, c u\, du\,| \cdot (\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot u + w)}{\Sigma c_i \varphi_i},$$

$$\left.\begin{matrix} J_3 \\ J_4 \end{matrix}\right\} = \int \frac{|\, c u\, du\,| \cdot (\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot v + w)}{\Sigma c_i \varphi_i}.$$

Zugleich werde folgende Bezeichnung eingeführt. Die beiden Ellipsen werden durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten je in vier Segmente zerlegt. Wir bezeichnen dieselben als S_1, S_2, S_3, S_4 in der Art, dass das Segment S_k dem Nullpunkte des Integrals J_k abgewandt liegt (Fig. 2.).

Die gemeinsamen Tangenten selbst sollen t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} genannt werden: t_{ik}, wenn sie in einem Punkte berühren, der das Segment S_i von dem Segmente S_k trennt. —

Die schon genannte Reduction der (an der einzelnen Ellipse hin-

erstreckten) Integrale J auf Logarithmen mag jetzt an dem Beispiele des Integrals J_1 und der Ellipse ψ durchgeführt werden.

Vermöge $\psi = 0$ ist $\varphi_i = \chi \cdot \psi_i$; andererseits:

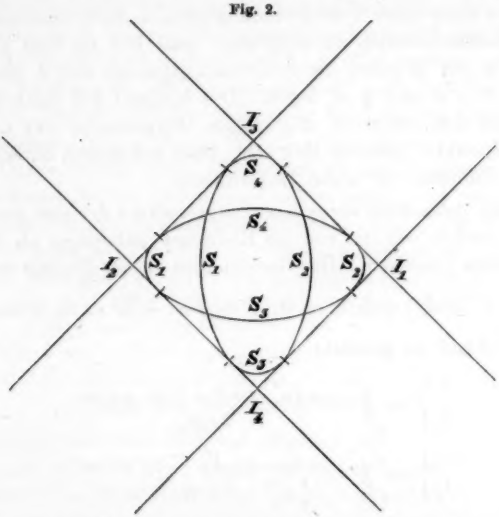
$$\chi = b^2u^2 + a^2v^2 - w^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \left\{(a^2+b^2)\,u^2 - w^2\right\}.$$

Daher nimmt das Integral J_1, indem sich die lineare Function des Zählers gegen den Nenner forthebt, folgende Gestalt an:

$$J_1 = \frac{-b^2}{a^2-b^2} \int \frac{\begin{vmatrix} c & u & du \\ c' & v & dv \\ c'' & w & dw \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\cdot u - w\right)\left(c\frac{\partial\psi}{\partial u} + c'\frac{\partial\psi}{\partial v} + c''\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)}.$$

Um dasselbe weiter zu vereinfachen, führe man ein neues Coordinatensystem ein, dessen Ecken sind: die beiden Berührungspunkte

Fig. 2.



der beiden nicht durch den Nullpunkt von J_1 gehenden gemeinsamen Tangenten mit ψ und der Kreuzungspunkt dieser Tangenten, der Nullpunkt von J_2. Dementsprechend setze man:

$$\begin{aligned} U &= a^2u \quad + b^2v - \sqrt{a^2+b^2}\cdot w, \\ V &= a^2u \quad - b^2v - \sqrt{a^2+b^2}\cdot w, \\ W &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot u - \cdot \quad - \quad w \end{aligned}$$

(Substitutionsdeterminante $= -2b^4$). Durch dieselbe Substitution, ver-

möge deren hier U, V, W aus u, v, w entstehen, mögen aus den Constanten c, c', c'' neue Constanten C, C', C'' hervorgehen. So ist:

$$\begin{vmatrix} C & U & dU \\ C' & V & dV \\ C'' & W & dW \end{vmatrix} = -2b^4 \begin{vmatrix} c & u & du \\ c' & v & dv \\ c'' & w & dw \end{vmatrix}.$$

Andererseits findet man:

$$UV - a^2 W^2 = \Psi = -b^2 (a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2) = -b^2 \cdot \psi$$

und also:

$$C \frac{\partial \Psi}{\partial U} + C' \frac{\partial \Psi}{\partial V} + C'' \frac{\partial \Psi}{\partial W} = -b^2 \left(c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c' \frac{\partial \psi}{\partial v} + c'' \frac{\partial \psi}{\partial w} \right).$$

Daher wird:

$$J_1 = \frac{-1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{|\, CU\, dU\,|}{W \cdot \Sigma C_i \Psi_i},$$

oder, indem wir $C = 0$, $C' = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{4(a^2 - b^2)} \int \frac{U dV - V dU}{a^2 W^2} \\ &= \frac{1}{4(a^2 - b^2)} \int \frac{U dV - V dU}{UV} \\ &= \frac{-1}{4(a^2 - b^2)} \cdot \log \left(\frac{U}{V} \right) + K, \end{aligned}$$

welches die gewünschte Reduction ist. Die Integrationsconstante K werden wir weiterhin, wie früher, gleich Null setzen.

Es wird für das Folgende vortheilhaft sein, Integrale zu haben, die mit dem im vorigen Paragraphen betrachteten auch im Zahlenfactor übereinstimmen. Wir werden also als *Normalintegral* definiren:

$$I_1 = -2(a^2 - b^2) J_1 = -2(a^2 - b^2) \int \frac{|\, cu\, du\,|\, (\sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + w)}{\Sigma c_i \varphi_i}.$$

Längs der Ellipse ψ erstreckt, ist dasselbe, wie wir der grösseren Anschaulichkeit wegen noch einmal hersetzen:

$$= + \tfrac{1}{2} \log \left\{ \frac{a^2 u + b^2 v - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w}{a^2 u - b^2 v - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w} \right\}.$$

Längs der Ellipse $\chi = 0$ erstreckt, hat es den Werth, der sich durch Vertauschung der Buchstaben a, b und Zeichenwechsel ergiebt:

$$= - \tfrac{1}{2} \log \left\{ \frac{b^2 u + a^2 v - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w}{b^2 u - a^2 v - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w} \right\}.$$

Entsprechend definiren wir *drei weitere Normalintegrale:*

$$I_2 = -2(a^2-b^2)\int \frac{|cu\,du|\,(-\sqrt{a^2+b^2}\cdot u+w)}{\Sigma c_i \varphi_i},$$

$$\left.\begin{matrix} I_3 \\ I_4 \end{matrix}\right\} = -2(b^2-a^2)\int \frac{|cu\,du|\,(\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot v+w)}{\Sigma c_i \varphi_i}.$$

Dabei hat man:

$$dI_1 + dI_2 + dI_3 + dI_4 = 0,$$

und also, unter x die obere Grenze verstanden:

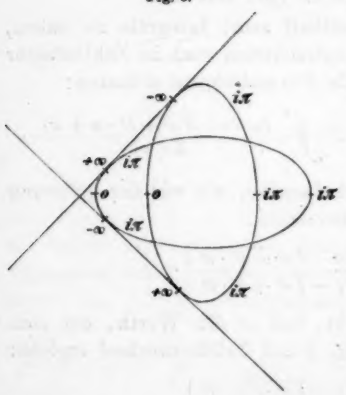
$$I_1^x + I_2^x + I_3^x + I_4^x = C.$$

§ 4.

Vertheilung der Parameterwerthe.

Die Werthe, welche das einzelne Integral I_k bei Hinerstreckung über die Riemann'schen Flächen der Ellipsen ψ, χ annimmt, ergeben sich einfach nach Anleitung des § 2. Die untere Grenze des Integrals ist dabei, dem Umstande entsprechend, dass die Integrationsconstante K unterdrückt wurde, sowohl auf ψ als auf χ in den Mittelpunkt desjenigen Segmentes S_k zu verlegen, welcher mit I_k den Index gemein hat. So ergiebt sich z. B. folgende Figur für I_1, in der nur angegeben ist, wie gross der imaginäre Bestandtheil von I_1 (modulo $2i\pi$) für die verschiedenen Segmente S ist, und in welchen Punkten I_1 positiv, in welchen es negativ unendlich wird (Fig. 3).

Fig. 3.



In der folgenden Tabelle ist das Verhalten der vier Integrale in dieser Beziehung zusammengestellt. Die mit S_k überschriebenen Colonnen geben den imaginären Bestandtheil der betr. Integralwerthe, modulo $2i\pi$. In den Colonnen t_{ik} finden sich diejenigen Vorzeichen angegeben, welche die Integrale, für welche die Berührungspunkte von t_{ik} Unendlichkeitspunkte sind, in diesen Unendlichkeitspunkten annehmen. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf den Berührungspunkt mit ψ, das untere, nothwendig entgegengesetzte, auf den Berührungspunkt mit χ.

	S_1	S_2	S_3	S_4	t_{13}	t_{14}	t_{23}	t_{24}
I_1	0	$i\pi$	$i\pi$	$i\pi$	$\pm$	$\mp$	·	·
I_2	$i\pi$	0	$i\pi$	$i\pi$	·	·	$\mp$	$\pm$
I_3	$i\pi$	$i\pi$	0	$i\pi$	$\mp$	·	$\pm$	·
I_4	$i\pi$	$i\pi$	$i\pi$	0	·	$\pm$	·	$\mp$

[Man findet für die oben unbestimmt gelassene Constante:

$$I_1^x + I_2^x + I_3^x + I_4^x \equiv i\pi \pmod{2i\pi}.]$$

Betrachten wir jetzt die verschiedenen *Meridiancurven*, welche man auf dem elliptischen Doppelblatte ψ oder auch auf χ ziehen kann. Dieselben ordnen sich, sofern man die 4 Berührungspunkte der Tangenten t_{ik} als unüberschreitbar betrachtet, in 6 Classen ein, je nach den beiden Segmenten der umgrenzenden Ellipse, welche sie überschreiten. Heissen die letzteren S_i und S_k, so soll die Meridiancurve b_{ik} genannt werden. Diesen b_{ik} legen wir, vermöge einer willkürlichen Festsetzung, je einen positiven Sinn bei, wie dies in der beistehenden Zeichnung (in der die Pfeile sich auf die Vorderseite beziehen sollen) für die Ellipse ψ geschehen ist (Fig. 4):

Fig. 4.



Die betr. Festsetzung für das Doppelblatt χ werde ähnlich, aber gerade umgekehrt getroffen.

Führt man dann an den verschiedenen b_{ik} die Integrale I in positiver Richtung vorbei, so ergeben sich Periodicitätsmoduln 0 oder $\pm 2i\pi$, wie sie in der folgenden Tabelle vereinigt sind. Diese Tabelle gilt gleichmässig für ψ und χ, insofern zusammengehörige Unendlichkeitspunkte bei ψ und χ entgegengesetzte Vorzeichen der bez. unendlich werdenden Integrale aufweisen:

	b_{23}	b_{13}	b_{12}	b_{14}	b_{24}	b_{34}
I_1	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$+2i\pi$	0	0
I_2	$-2i\pi$	0	$+2i\pi$	0	$+2i\pi$	0
I_3	$+2i\pi$	$+2i\pi$	0	0	0	$+2i\pi$
I_4	0	0	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$-2i\pi$

Diese Tabelle bestätigt die folgenden, auch unmittelbar aus der Figur ersichtlichen Relationen zwischen den b_{ik}:

$$b_{12} = b_{13} - b_{23} = -b_{14} + b_{24},$$
$$b_{34} = b_{13} + b_{14} = \quad b_{23} + b_{24}.$$

§ 5.

Ableitung von Curven vierter Ordnung aus dem Ellipsenpaare. Eintheilung der Curven vierter Ordnung.

Bei den nun folgenden Erörterungen mag zunächst von *Ordnungs*-Curven die Rede sein; man fasst die bei ihnen auftretenden Vorkommnisse leichter auf und kann sie prägnanter bezeichnen. Dem Studium der Integrale legen wir immer die Classencurven zu Grunde; wir haben daher später die jetzt abzuleitenden Resultate von den Ordnungscurven auf sie zu übertragen.

Es sei also jetzt ein Ellipsenpaar in Punktcoordinaten gegeben:

$$\psi' = 0, \quad \chi' = 0,$$

wo

$$\psi' = a^2x^2 + b^2y^2 - 1,$$
$$\chi' = b^2x^2 + a^2y^2 - 1.$$

So wird man aus ihm durch den bekannten Process der Auflösung der Doppelpunkte im Ganzen *sechs* verschiedene Curven vierter Ordnung der Art nach erzeugen. Fünf derselben, deren Betrachtung weiterhin ausreicht, sind auf Tafel I. schematisch dargestellt. Ich bezeichne a, c, e, d bez. als *vier-*, *drei-*, *zwei-*, *eintheilige* Curve, b als *Gürtelcurve* (vergl. Zeuthen: Sur les formes différentes des courbes du quatrième ordre, diese Annalen Bd. VII). Dass diese Curventypen existiren und in der That aus dem Ellipsenpaare abgeleitet werden können, geht aus den sonst bekannten Untersuchungen hervor. Indess will ich hier ausdrücklich bez. Gleichungen zusammenstellen, damit zu einer am Beispiele zu leistenden, rechnerischen Durchführung der weiterhin anzustellenden Betrachtungen alle Elemente gegeben seien.

Es sei ε eine sehr kleine Constante. Dann wird die Gleichung

$$\varphi' = \psi'\chi' - \varepsilon = 0,$$

da die betr. Curve mit dem Ellipsenpaare keinen reellen Punkt gemein haben kann, je nachdem ε negativ oder positiv ist, eine viertheilige Curve oder eine Gürtelcurve darstellen.

Um ferner eine dreitheilige Curve oder eine eintheilige zu gewinnen, schlage man um den auszuzeichnenden Durchschnittspunkt von ψ', χ' einen kleinen Kreis, der, unter ρ eine kleine Grösse verstanden, die Gleichung haben wird:

$$\lambda' = \left(x - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - \rho^2 = 0$$

und betrachte die Curven:

$$\varphi' = \psi'\chi' - \varepsilon\lambda' = 0.$$

Für negatives ε kommt die dreitheilige, für positives die eintheilige Curve.

Eine zweitheilige Curve endlich ist, unabhängig von dem Vorzeichen, welches man ε ertheilen mag, durch

$$\varphi' = \psi'\chi' - \varepsilon y = 0$$

vorgestellt.

Die so erzeugten Curven vierter Ordnung repräsentiren fünf von den sechs Arten, in welche man die Curven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt nach der Zahl und Lage der bei ihnen vorhandenen Züge eintheilen kann. Die sechste Art, die wir hier nicht erhielten und die desshalb auch weiterhin ausgeschlossen bleiben mag, ist *die imaginäre Curve*, d. h. diejenige, die keine reellen Züge enthält. (Auch ihre Gleichung denke ich mir weiterhin, wenn gelegentlich von derselben die Rede ist, mit *reellen* Coëfficienten.)

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Eintheilung der Curven vierter Ordnung in sechs Arten ist in dem folgenden Satze ausgesprochen, der weiterhin eine fundamentale Bedeutung für die Tragweite unserer Untersuchungen gewinnt:

*Von jeder allgemeinen**) *Curve vierter Ordnung kann man zu jeder anderen, die derselben Art angehört, durch allmähliche reelle Aenderung der Constanten übergehen, ohne dass bei dem Uebergangsprocesse Curven mit Doppelpunkt oder gar allgemeine Curven, die einer anderen Art angehören, überschritten zu werden brauchten.*

Ein directer Beweis dieses Satzes hat keine Schwierigkeit, aber er ist weitläufig. Es soll hier von einem solchen Beweise um so mehr Abstand genommen werden, als die bei ihm nöthig werdenden Betrachtungen mit denjenigen, die im gegenwärtigen Aufsatze zu entwickeln sind, wenig Beziehungspunkte haben. Dagegen sei angedeutet, dass man ihn vermöge kurzer Zwischenbetrachtungen führen kann, wenn man auf frühere Untersuchungen von Zeuthen und mir zurückgreift. Ich habe (diese Annalen Bd. VI, p. 562) gezeigt, dass ein ähnlicher Satz gilt für die fünf Arten, welche man nach Schläfli bei den allgemeinen Flächen dritter Ordnung zu unterscheiden hat. Es hat dann Zeuthen bewiesen (ibid. Bd. VII, p. 428), dass die Arten der Curven vierter Ordnung den fünf Flächenarten in sehr einfacher Weise entsprechen. Projicirt man die F_3 von einem ihrer Punkte aus stereographisch auf eine Ebene, so tritt als scheinbare Umhüllung bei den Arten I, II, III, IV von Schläfli eine viertheilige, drei-, zwei-, eintheilige Curve vierter Ordnung auf. Die Art V ergiebt, bei analoger Construction, je nachdem man den Projectionspunkt auf ihrem unpaaren oder paaren Theile annimmt, die Gürtelcurve und die imaginäre Curve. Umgekehrt kann auch jede Curve vierter Ordnung aus der entspre-

*) Als „allgemein" sind hier die Ordnungscurven ohne Doppelpunkt, später die Classencurven ohne Doppeltangente der Kürze wegen bezeichnet.

chenden Flächenart in der angegebenen Weise gewonnen werden. Hierin liegt der von uns gewünschte Beweis. Um ihn völlig zu führen, hat man nur noch die Modificationen zu untersuchen, welche die scheinbare Umhüllungscurve erfährt, wenn der Projectionspunkt auf der fest gedachten Fläche beliebig verschoben wird. Aber auch Dieses hat Zeuthen ausgeführt (Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques; diese Annalen Bd. VIII).

Als irrelevant wird bei der hier festgehaltenen Eintheilung der C_4 eine Aenderung der Curve betrachtet, die Zeuthen in seiner Discussion der gestaltlichen Verhältnisse der Curven vierter Ordnung (l. c.) ausführlich untersuchte und deren Analogon bei Curven n^{ter} Ordnung ich zum Gegenstande einer neuerlichen Mittheilung machte (diese Annalen Bd. X, p. 199). Es kann eintreten, dass zwei Wendungen der Curve, die reell waren, zusammenrücken und imaginär werden, oder umgekehrt, dass zwei neue reelle Wendungen entstehen, indem zwei imaginäre sich vorab in einen reellen Punkt vereinigen. Gleichzeitig wechselt dann eine der vier reellen Doppeltangenten erster Art, welche die Curve besitzt, ihre Bedeutung für die Curve. Hatte die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so wird sie isolirt; war sie isolirt, so erhält sie reelle Berührungspunkte.

Indem wir jetzt die nunmehr für Ordnungscurven gewonnenen Resultate auf Classencurven übertragen, beginnen wir mit einer Erläuterung des letzterwähnten Vorkommnisses und seiner Bedeutung für die betr. Riemann'sche Fläche.

§ 6.

Uebertragung auf Classencurven.

Der Aenderungsprocess der Classencurve, welcher hier zunächst in Betracht kommt, ist bekanntlich der folgende: Eine Curve, welche zwei reelle Spitzen und in deren Nähe einen Selbstüberkreuzungspunkt besitzt, verliert die Spitzen dadurch, dass sie zusammenrücken und imaginär werden; der Selbstüberkreuzungspunkt geht dabei in einen isolirten Doppelpunkt über:

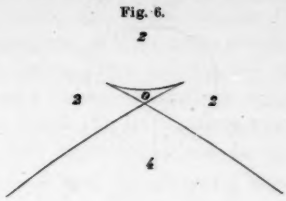
Fig. 5.



Man denke sich jetzt die zugehörige Riemann'sche Fläche construirt, unter der Voraussetzung, dass man es mit einer Curve vierter

Classe zu thun hat. So werden, im ersten Falle, die verschiedenen angrenzenden Theile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt sein, die in der Figur 6 angegeben ist. Denn die Zahl der Blätter wächst jedesmal um zwei Einheiten, sobald man von der convexen Seite eines Curvenzuges auf die concave hinübertritt; sie kann ferner nie negativ und in unserem Falle nie grösser als 4 werden.

Fig. 6.



Diese Anzahlen können sich nun bei dem in Rede stehenden Uebergange für Stellen, die nicht in unmittelbarer Nähe der modificirten Singularität liegen, nicht ändern. Es muss auch jeder Weg auf der Riemann'schen Fläche, der nicht an die singuläre Stelle hinantritt, nach der Umänderung seinen Charakter behalten haben. Dies wird dadurch möglich, *dass der betr. Doppelpunkt in dem Augenblicke, in welchem er isolirt wird, zu einem Doppelverzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche sich umgestaltet.*

Unter einem Doppelverzweigungspunkte verstehe ich dabei einen solchen Punkt der Ebene, in welchem sich gleichzeitig zwei Paare von Blättern der Riemann'schen Fläche verzweigen. Andere Verzweigungspunkte können bei einer Curve, deren Gleichung nur reelle Coëfficienten besitzt, nicht auftreten. Denn die Blätter der betr. Riemann'schen Fläche gehören paarweise zusammen (immer diejenigen beiden, welche conjugirt imaginäre Tangenten repräsentiren), und ein Vorkommniss, welches sich in dem einen Blatte einstellt, muss auch in dem zugehörigen Blatte entsprechend stattfinden (wegen aller dieser Verhältnisse vergl. die nachfolgende Mittheilung: *Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen*, II.). Zu einer solchen Verzweigung in einem isolirten Doppelpunkte ist aber desshalb Anlass gegeben, weil die vier imaginären Tangenten, die man von unmittelbar benachbarten Punkten der Ebene an die Curve legen kann, für ihn paarweise zusammenfallen und also in ihm zweimal zwei Blätter der Riemann'schen Fläche einen Punkt gemein haben. Dass aber in ihm eine Verzweigung entstehen *muss*, erweisen die umstehenden Zeichnungen (Fig. 7 und 8).

In der ersten der beiden Figuren ist die Fläche angedeutet, welche zu der Curve mit reellen Spitzen gehört; ihren Blättern ist, aus Symmetriegründen, eine solche Anordnung gegeben, dass sie sich in einer vom Selbstüberkreuzungspunkte ausgehenden Curve durchdringen. Ausserdem ist auf der Fläche eine Curve gezogen, welche die singulären Punkte mit weiter Schleife umgiebt. Würde nun der isolirte Doppel-

punkt zu keiner Verzweigung Anlass geben und also bei der modificirten Fläche keine Durchdringung der Blätter stattfinden, so würde

Fig. 7.

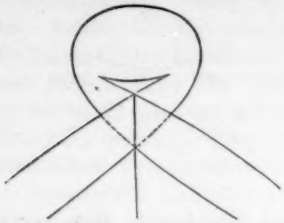
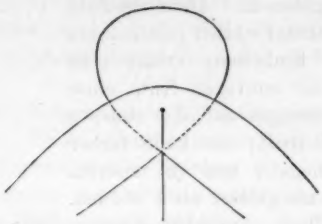


Fig. 8.



eben dieser Weg seinen Charakter ändern, was nach dem Obigen unmöglich ist. Man hat sich also die Vorstellung zu bilden, welche durch die zweite der vorstehenden Figuren zur Anschauung gebracht werden soll. Von dem isolirten Doppelpunkte gehen zwei gleichlaufende Verzweigungsschnitte aus, von denen der eine die beiden oberen, der andere (in der Figur nicht sichtbare) die beiden unteren Blätter verbindet. Zugleich ist deutlich, wie die zweite Figur aus der ersten durch continuirliche Aenderung entsteht. —

Die hiermit erläuterte Umgestaltung der Riemann'schen Fläche (die natürlich in dem hier geschilderten Sinne sowohl als im umgekehrten vor sich gehen kann) ist nun, wie leicht zu zeigen, die einzige, die überhaupt auftritt, wenn man die Constanten der allgemeinen Curve vierter Classe übrigens beliebig doch nur so weit ändert, dass keine Curve mit Doppeltangente erreicht wird.

Anders ausgedrückt: *Betrachtet man die betr. Umgestaltung der Riemann'schen Fläche als irrelevant, so haben alle allgemeinen Curven vierter Classe, die zu derselben Art gehören, identische Riemann'sche Flächen.*

Dieser Satz gestattet, dieselben Schnitte, welche wir weiterhin an den Riemann'schen Flächen besonders ausgewählter Classencurven ausführen werden, an den Riemann'schen Flächen aller Classencurven derselben Art anzubringen und dadurch die Schlüsse, welche wir für die speciellen Curven ableiten, auf alle Curven derselben Art zu übertragen. So sind denn auch die Sätze der § 14., 15., obgleich zunächst nur für die besonderen Curven bewiesen, sofort für *alle* viertheiligen, dreitheiligen etc. Curven ausgesprochen. Aber es mag genügen, diese Tragweite der genannten Sätze hier behauptet und das Princip des Beweises genannt zu haben; die unmittelbare Anschaulichkeit der weiteren Betrachtungen, die ich gern festhalten möchte, schien mir eine Beschränkung auf concrete Curvenformen durchaus zu verlangen.

§ 7.

Classencurven, die sich an das Ellipsenpaar anschliessen.

Diese besonderen Curven, auf welche sich weiterhin die Untersuchung beschränken soll, sind diejenigen, welche sich unmittelbar aus dem Ellipsenpaare ψ, χ ableiten lassen, und den Curven vierter Ordnung, welche wir in § 5. gewonnen haben, dualistisch entgegenstehen. Die betr. Figuren sind auf Tafel II, III zusammengestellt. Die zugehörigen Gleichungen erhält man unmittelbar aus der in § 5. angegebenen, indem man x und y durch $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$, ψ' und χ' durch die früheren ψ und χ ersetzt.

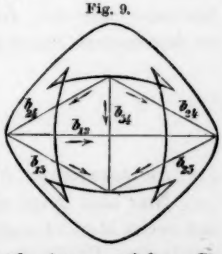
Was die Gestalt dieser Curven angeht, so kann man sie etwa in folgender Weise festhalten. Bei jeder Curve finden sich Stücke, die aus den Segmenten S_1, S_2, S_3, S_4 der Ellipse ψ, und solche, die aus den Segmenten der Ellipse χ entstanden sind. Diese sind unter einander verbunden durch Curvenzüge, welche bez. aus den gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} hervorgehen, indem man, bei der einzelnen Tangente, entweder das durch das Unendliche hindurch sich erstreckende Segment in zwei Züge spaltet oder das im Endlichen befindliche (während man das andere Segment verschwinden lässt). Die Benennungen S_k, t_{ik} sollen dementsprechend weiterhin zur Bezeichnung der verschiedenen Stücke, die man bei der einzelnen Classencurve unterscheiden kann, gebraucht werden.

Um von den zugehörigen Riemann'schen Flächen eine möglichst anschauliche Vorstellung zu geben, habe ich auf Tafel IV eine ausgeführte Zeichnung beigegeben (deren Anfertigung ich Herrn Schleiermacher verdanke). Dieselbe stellt eine viertheilige Curve vor, welche so gewählt ist, dass ihre 28 Doppelpunkte alle ins Endliche fallen. Die Figur ist folgendermassen entworfen worden. Wir haben zuerst, unter Benutzung gew. rechtwinkliger Coordinaten, eine Zeichnung der Curve

$$(9u^2+4v^2-w^2)(4u^2+9v^2-w^2)+\tfrac{1}{16}w^4=0$$

ausgeführt, indem die Coordinaten der hauptsächlichen Punkte berechnet wurden. Sodann ergab sich die Zeichnung der Tafel IV durch geeignete Centralprojection.

Fig. 9.



Auf jeder einzelnen der Riemann'schen Flächen, welche zu den Curven der Tafel II, III gehören, wird man jetzt Meridiancurven construiren können, die den b_{ik} entsprechen, welche sich auf dem Doppelblatte ψ befanden, oder auch den b_{ik}, die sich auf χ bezogen. Die b_{ik} von ψ übertragen sich z. B. folgendermassen auf die Riemann'sche Fläche der Gürtelcurve (Fig. 9).

Die linearen Relationen zwischen den b_{ik}, wie sie oben angegeben wurden, bleiben dabei erhalten.

Nun behaupte ich:

Die Meridiancurven b_{ik}, welche von der Ellipse ψ herstammen, sind mit den bez. gleichbenannten Meridiancurven b_{ik}, die von der Ellipse χ herübergenommen werden können, auf der neuen Riemann'schen Fläche äquivalent.

In der That, die Meridiancurven

$$b_{13},\ b_{14},\ b_{23},\ b_{24},$$

welche von ψ, und die gleichbenannten, welche von χ herstammen, gehen, auch dem *Sinne* nach, in einander über, wenn man sie einfach längs derjenigen „Bänder" der Riemann'schen Fläche verschiebt, die durch Spaltung der Tangenten

$$t_{13},\ t_{14},\ t_{23},\ t_{24}$$

entstanden sind. Die Aequivalenz der zweierlei

$$b_{12},\ b_{34}$$

ergiebt sich dann daraus, dass sich dieselben durch die anderen b_{ik} vermöge derselben Gleichungen linear ausdrücken.

Es wird daher gestattet sein, im Folgenden schlechthin von Meridiancurven b_{ik} zu reden, die auf unseren Riemann'schen Flächen verlaufen; auch der Sinn, der bei ihnen als positiv gelten soll, ist durch die frühere Verabredung gegeben.

§ 8.

Construction der Normalintegrale.

Die Art und Weise, vermöge deren Riemann seine Normalintegrale erster Gattung gewinnt, mag für unseren Fall folgendermassen ausgesprochen werden:

Man ziehe auf der Fläche drei (p) Rückkehrschnitte, deren gleichzeitiges Bestehen noch kein Zerfallen der Fläche herbeiführt. Dann bestimme man drei Integrale so, dass sie, an diesen Rückkehrschnitten in bestimmtem Sinne entlang geleitet, die Perioden ergeben:

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi. \end{matrix}$$

Sie können als Normalintegrale genommen werden.

Nun aber zeigt sich, dass man auf vier verschiedene Weisen unter den sechs Meridiancurven b_{ik} drei solche heraussuchen kann, die als unabhängige Rückkehrschnitte benutzt werden können. Es sind das jedesmal diejenigen b_{ik}, welche einen Index gemein haben. In der

That, man zerschneide die zu einer beliebigen unserer Curven gehörige Fläche längs solcher b_{14}, b_{24}, b_{34}, die von der Ellipse ψ herstammen. So zerfällt die Fläche noch nicht. Das elliptische Doppelblatt ψ, an sich genommen, wäre freilich in vier Stücke zerfallen, aber jedes dieser Stücke ist jetzt, vermöge der „Bänder" t_{ik}, an das unzerschnittene Doppelblatt χ befestigt.

Wir werden, dementsprechend, jetzt drei Normalintegrale aufsuchen: $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, welche, an b_{14}, b_{24}, b_{34} in positivem Sinne vorbeigeleitet, die Perioden ergeben:

	b_{14}	b_{24}	b_{34}
$\mathfrak{J}_1$	$+2i\pi$	0	0
$\mathfrak{J}_2$	0	$+2i\pi$	0
$\mathfrak{J}_3$	0	0	$+2i\pi$

Dabei drängt sich von selbst der Satz auf: *Wenn man aus der Classencurve rückwärts wieder das Ellipsenpaar ψ, χ entstehen lässt, so gehen die jetzt gesuchten Normalintegrale eben in die früher von uns betrachteten (auch schon als Normalintegrale bezeichneten) I_1, I_2, I_3 über.* Denn letztere verhielten sich an b_{14}, b_{24}, b_{34}, wie wir es jetzt von $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ fordern.

Wenn wir also setzen:

$$\mathfrak{J}_k = \int \frac{|\,c u\, du\,|}{\Sigma c_i \varphi_i}\,(a_k u + b_k v + c_k w),$$

(wo φ die linke Seite der Gleichung der Curve 4. Classe bedeutet), so folgt: *So lange φ nicht sehr von $\psi \cdot \chi$ verschieden ist, können die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke*

$$a_k u + b_k v + c_k w \quad (k = 1, 2, 3)$$

in erster Annäherung gleich gesetzt werden den bei I_1, I_2, I_3 vorkommenden linearen Functionen, d. h. bez.

$$-2(a^2-b^2)(+\sqrt{a^2+b^2}\cdot u + w),$$
$$-2(a^2-b^2)(-\sqrt{a^2+b^2}\cdot u + w),$$
$$-2(b^2-a^2)(+\sqrt{a^2+b^2}\cdot v + w).$$

Bezeichnen wir wieder den Punkt, dessen Gleichung ist

$$a_k u + b_k v + c_k w = 0$$

als Nullpunkt des betr. Integrals, so können wir auch sagen: *Die Nullpunkte der gesuchten Normalintegrale liegen bez. in der Nähe der Nullpunkte der früher betrachteten Normalintegrale.*

Ehe wir diese Beziehung weiter verfolgen, werden wir, der Symmetrie wegen, neben $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ noch ein dem I_4 entsprechendes $\mathfrak{J}_4$

einführen. Die im Zähler des zugehörigen Differentials auftretende lineare Function wird nahezu gleich gesetzt werden können:

$$-2(b^2-a^2)(-\sqrt{a^2+b^2}\cdot v+w),$$

man wird die Relation haben:

$$d\mathfrak{J}_1+d\mathfrak{J}_2+d\mathfrak{J}_3+d\mathfrak{J}_4=0$$

und das Verhalten der J_k an den verschiedenen Meridiancurven b_{ik} wird durch die früher für die I_k entworfene Tabelle gegeben sein:

	b_{23}	b_{13}	b_{12}	b_{14}	b_{24}	b_{34}
$\mathfrak{J}_1$	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$+2i\pi$	0	0
$\mathfrak{J}_2$	$-2i\pi$	0	$+2i\pi$	0	$+2i\pi$	0
$\mathfrak{J}_3$	$+2i\pi$	$+2i\pi$	0	0	0	$+2i\pi$
$\mathfrak{J}_4$	0	0	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$-2i\pi$

§ 9.

Die Normalintegrale sind reell. Umkehrprobleme mit reellen Lösungen.

Wir zeigen jetzt zunächst: *die Normalintegrale* $\mathfrak{J}$ *sind reell*, d. h. ihre Differentiale enthalten nur *reelle* Coefficienten und weichen also von den Differentialen der I nur um *reelle* Correctionsglieder ab. In der That, man kann sich die $\mathfrak{J}$ folgendermassen bestimmt denken. Es seien j_1, j_2, j_3 irgend drei unabhängige, *reelle* Integrale erster Gattung. *Leitet man ein solches Integral längs einer Meridiancurve* b_{ik} *entlang, so erhält man immer eine rein imaginäre Periode.* Die Meridiancurve überdeckt nämlich zweimal denselben Weg, einmal auf der Vorderseite, das andere Mal mit umgekehrtem Sinne auf der Rückseite der Fläche verlaufend. Wird nun das eine Mal beim Hinintegriren der Betrag $\alpha+\beta i$ gewonnen, so liefert der Rückgang, weil er die conjugirt imaginären Werthe aber im umgekehrten Sinne überschreitet, $-\alpha+\beta i$, und der Werth der ganzen Periode ist $2\beta i$, w. z. b. Dementsprechend mögen die Perioden, welche die j_k bei Hinleitung längs b_{14}, b_{24}, b_{34} erhalten, $i\beta_{k1}$, $i\beta_{k2}$, $i\beta_{k3}$ genannt sein. Sei jetzt z. B. das gesuchte J_1

$$=\alpha_1 j_1+\alpha_2 j_2+\alpha_3 j_3.$$

So wird man, aus den Periodenwerthen, die $\mathfrak{J}_1$ an b_{14}, b_{24}, b_{34} aufweisen soll, folgende Gleichungen zur Bestimmung der α erhalten:

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_{11}+\alpha_2\beta_{21}+\alpha_3\beta_{31}&=2\pi,\\ \alpha_1\beta_{12}+\alpha_2\beta_{22}+\alpha_3\beta_{32}&=0,\\ \alpha_1\beta_{13}+\alpha_2\beta_{23}+\alpha_3\beta_{33}&=0.\end{aligned}$$

Dies aber sind reelle Gleichungen; sie geben reelle Werthe der α und also ein reelles Normalintegral $\mathfrak{J}_1$.

Ein reelles Integral, an einem reellen Curvenzuge vorbeigeleitet, ergiebt offenbar einen reellen Betrag. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Betrachtet man als untere Grenze der Normalintegrale $\mathfrak{J}_k$ *reelle Punkte der Curve vierter Classe, so erhalten alle reellen Punkte derselben Integralwerthe, die, modulo* $2i\pi$, *den imaginären Bestandtheil* 0 *oder* $i\pi$ *besitzen.*

Jeder reelle Punkt ist nämlich von dem dann vorhandenen Anfangspunkte der Integration zu erreichen, indem man Stücke von reellen Curvenzügen und ev. Stücke von Meridiancurven b_{ik} durchläuft. Die letzteren sind aber insoweit ihrer Grösse nach bestimmt, als sie immer von einem reellen Curvenzuge bis zu einem zweiten reellen Zuge hinleiten; sie sind, sozusagen, halbe Meridiancurven. Da aber das Durchlaufen der ganzen Meridiancurve für das Normalintegral die Periode 0 oder $\pm 2i\pi$ liefert, so ergiebt, wie aus dem analogen eben ausgeführten Beweise erhellt, die halbe Meridiancurve einen Betrag, dessen imaginärer Theil 0 oder $\pm i\pi$ beträgt. Hierin liegt der Beweis des neuen Satzes.

An ihn können wir sofort eine sehr einfache Untersuchung knüpfen *über die Realitätsverhältnisse des Jacobi'schen Umkehrproblems*, eine Untersuchung, die für die weiterhin abzuleitenden Resultate (§ 14.) von wesentlicher Bedeutung ist. Die unteren Grenzen der Integrale seien wieder in reelle Punkte der Curve gelegt. Dann sollen drei Punkte x, y, z der Riemann'schen Fläche gesucht werden, so dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_1^x + \mathfrak{J}_1^y + \mathfrak{J}_1^z &= v_1,\\ \mathfrak{J}_2^x + \mathfrak{J}_2^y + \mathfrak{J}_2^z &= v_2,\\ \mathfrak{J}_3^x + \mathfrak{J}_3^y + \mathfrak{J}_3^z &= v_3,\end{aligned}$$

wo die v gegebene Grössen sind. Es werde ausserdem angenommen, was für das Folgende ausreicht, dass dies Problem nicht zu den unbestimmten gehört. So behaupte ich: *das Punktetripel* x, y, z *wird dann und nur dann reell sein, wenn die imaginären Bestandtheile der* v, *modulo* $2i\pi$, *Null oder* $i\pi$ *betragen.* Als reell ist dabei ein Tripel bezeichnet, wenn entweder alle Elemente desselben reell sind, oder nur eines, aber die beiden anderen conjugirt imaginär.

Der Beweis ist einfach dieser. Es sei $v_k = \alpha_k + i\beta_k$. So betrachten wir ein zweites Umkehrproblem, für welches die gegebenen Grössen $v_k' = \alpha_k - i\beta_k$. Die Lösung desselben wird durch ein Tripel vorgestellt sein, welcher zu dem ursprünglichen gesuchten Tripel conjugirt imaginär ist. Sind nun die β_k Null oder π (modulo 2π), so stimmen die v_k und v_k' (modulo $2i\pi$) überein. Die beiden conjugirten Tripel

müssen daher, wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit des Umkehrproblems, identisch sein, d. h. das gesuchte Tripel ist reell.

Allgemeiner, es werde eine Gruppe von n Punkten gesucht, so dass

$$\mathfrak{J}_k^{x_1} + \mathfrak{J}_k^{x_2} + \cdots\cdots \mathfrak{J}_k^{x_n} = v_k,$$

man soll diese Punkte unter ev. Zuhülfenahme fester Punkte durch ein Curvensystem aus der Curve vierten Grades ausschneiden. *Dieses Curvensystem wird dann und nur dann reell sein, d. h. eine Gleichung besitzen, in der, abgesehen von den unbestimmt bleibenden Parametern, nur reelle Coefficienten vorkommen, wenn die imaginären Bestandtheile der v_k (modulo $2i\pi$) Null oder $i\pi$ sind.*

§ 10.

Der Verlauf der Normalintegrale.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, im Sinne der in § 1. auseinandergesetzten Methode den Verlauf der Normalintegrale $\mathfrak{J}_k$ auf den zugehörigen Riemann'schen Flächen durch schematische Zeichnung zur vollen Anschauung zu bringen und rückwärts aus der Zeichnung die charakteristischen Periodicitätseigenschaften dieser Integrale wieder abzuleiten. Inzwischen soll das nur für die viertheilige Curve und für die Gürtelcurve hier durchgeführt werden. Bei der symmetrischen Gestalt, welche diese beiden Curven besitzen, haben $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$ alle dieselbe Beziehung zur Curve; es genügt, eines derselben zu repräsentiren, und wir wollen $\mathfrak{J}_3$ zu diesem Zwecke auswählen.

Betrachten wir vorab das Ellipsenpaar $\psi \cdot \chi$ und das zugehörige Integral I_3. Indem wir dasselbe gleich $P + iQ$ setzen und nun, auf jedem der beiden elliptischen Doppelblätter, die Curven $P=C$, $Q=C$ nach Anleitung des § 2. zeichnen, erhalten wir folgende Figuren, bei denen wir, der grösseren Uebersichtlichkeit wegen, die Ellipsen ψ und χ neben einander gezeichnet haben (Fig. 10).

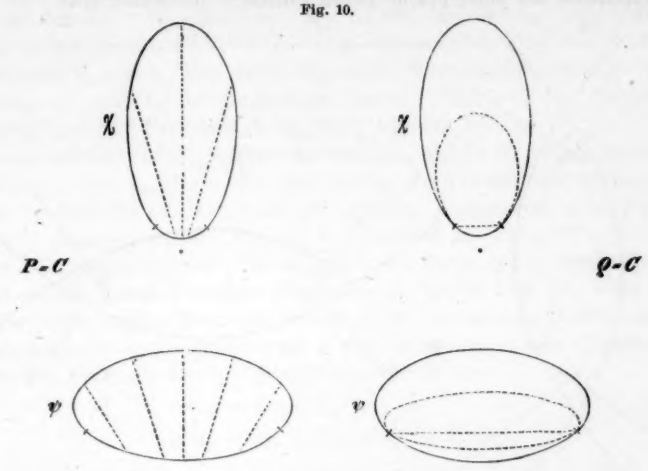
Diese Zeichnungen geben einen ersten Anhalt zur Construction der entsprechenden Curvensysteme bei den allgemeinen Curven. Diejenigen Partieen der gezeichneten Curvensysteme, welche nicht unmittelbar an die Berührungspunkte der Doppeltangenten t_{ik} hinanreichen, werden sich wesentlich unverändert auf den allgemeinen Flächen wieder finden.

Man hat ferner folgende Anhaltspunkte. Bei den allgemeinen Curven ist das Integral $\mathfrak{J}_3$ ein überall endliches geworden, Unendlichkeitspunkte treten also in den bez. Curvensystemen $P = C$, $Q = C$ nicht auf. Dagegen weist jetzt das Differential $d\mathfrak{J}_3$ vier Verschwindungspunkte auf, entsprechend den vier Tangenten, die man vom Nullpunkte des Integrals an die Curve legen kann. (Dieser Nullpunkt ist, wie oben angegeben, nahezu durch

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w = 0$$

vorgestellt). — Ferner ist deutlich, dass die reellen Züge der Curve selbst zu den Curven $Q = C$ gehören. Andererseits müssen die Curven

Fig. 10.



$P = C$, wenn sie überhaupt zweimal einen reellen Curvenzug treffen, Meridiancurven sein. Denn denselben Verlauf, den sie, etwa auf der oberen Seite der Fläche, zwischen den genannten Schnittpunkten nehmen, werden sie rückwärts, auf der anderen Seite der Fläche, ebenfalls einschlagen müssen. Es folgt hieraus schon, dass diese Curven $P=C$ *geschlossene* Curven sein müssen; dass überhaupt die Curven $P=C$ und $Q=C$ in den von uns zu betrachtenden Fällen geschlossen sind, ergiebt der in § 1. entwickelte bez. Satz und eine nähere Betrachtung der bei den einzelnen Figuren hervortretenden Lagenbeziehungen.

§ 11.

Besondere Betrachtung der viertheiligen Curve und der Gürtelcurve.

Bei der *viertheiligen Curve* liegt der Nullpunkt

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w = 0$$

an einer Stelle, an der sich zwei „Bänder", t_{14} und t_{24}, überkreuzen. Die vier Tangenten, welche von ihm ausgehen, sind imaginär und also vorgestellt durch die vier an dieser Stelle über einander befindlichen Punkte der Riemann'schen Fläche. Sie sind die Verschwindungspunkte des Differentials und also Verästelungspunkte der Curvensysteme P und Q.

Der Verlauf dieser Curvensysteme ist durch die voraufgeschickten Bemerkungen schematisch durchaus bestimmt; man erhält die folgenden Zeichnungen, in der die eigentlich einander überkreuzenden beiden Haupttheile der betr. Fläche neben einander gezeichnet sind.

Fig. 11a.

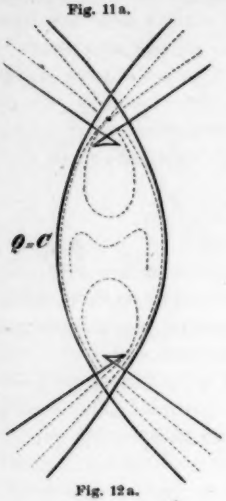


Fig. 11b.

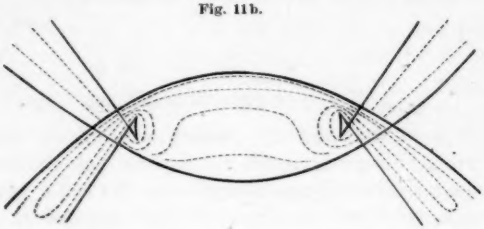


Fig. 12a.

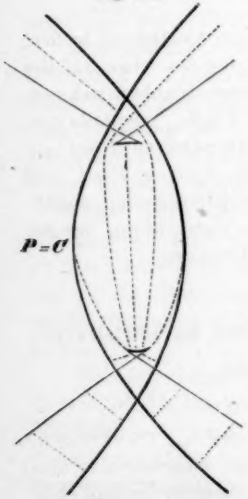
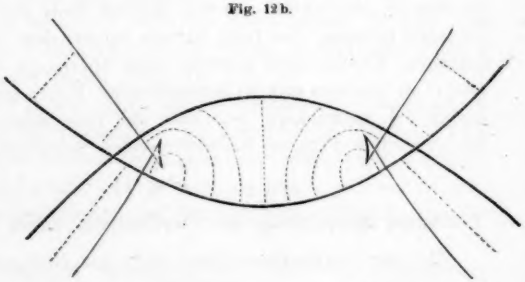


Fig. 12b.



Dass die Curven $Q = C$ geschlossen sind, ergiebt sich aus dem betr. Satze des § 1., weil jede von ihnen mit einem der vier reellen

Züge der eigentlichen Curve einen Canal einschliesst, in welchem sich kein Verschwindungspunkt des Differentials befindet. Die Curven $P=C$ sind alle Meridiancurven, und als solche geschlossen.

Aus diesen Zeichnungen bestätigt man das Verhalten des Integrals $\mathfrak{J}_3$ an den b_{ik}. Man kann b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24} eine solche Lage geben, dass sie geradezu mit Curven $P=C$ zusammenfallen. Zu dem Zwecke muss man b_{14} und b_{24} bez. durch die beiden Verschwindungspunkte der Bänder t_{14} und t_{24} hindurchgehen lassen. Hierdurch ist deutlich, wesshalb sie eine Periode Null ergeben, während b_{13} und b_{23} eine nicht verschwindende Periode liefern: die Beiträge, welche die beiden Hälften, in die b_{14} oder b_{24} durch die betr. beiden Verschwindungspunkte zerlegt werden, für den Integralwerth ergeben, compensiren sich gegenseitig. Dagegen ergeben b_{13} und b_{23}, insofern sie Curven $P=C$ sind, eine rein imaginäre, und, da sie gegen die Figur symmetrisch liegen, eine gleich grosse Periode. Dass dieselbe gleich $2i\pi$ ist, kann die Figur nicht zeigen; denn die Curven P, Q blieben ungeändert, wenn man statt $\mathfrak{J}_3$ $c\cdot\mathfrak{J}_3$ setzte (wo c eine beliebige, reelle Constante). Aus den zwischen den b_{ik} bestehenden Relationen:

$$b_{12}=b_{13}-b_{23}$$
$$b_{34}=b_{13}+b_{14}=b_{23}+b_{24}$$

folgt endlich, dass ein Hinführen des Integrals längs b_{12} Null und längs b_{34} denselben Periodenwerth, wie bei b_{13}, b_{23} ergeben muss.

Die entsprechenden Verhältnisse gestalten sich bei der *Gürtelcurve* etwas anders, insofern bei ihr die vier Tangenten, die man vom Nullpunkte des Integrals aus an die Curve legen kann, reell ausfallen und die sie repräsentirenden Punkte daher den reellen Curvenzügen angehören. In Folge dessen erscheinen die Verästelungen, welche die Curven P, Q in diesen Punkten, wie immer in den Verschwindungspunkten des Differentials, aufweisen, in der Zeichnung perspectivisch verkürzt. Man erhält die folgenden Figuren, die inzwischen hier nicht eingehender erläutert werden sollen:

Fig. 13a.

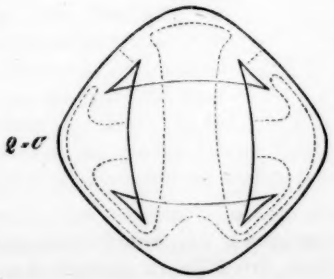
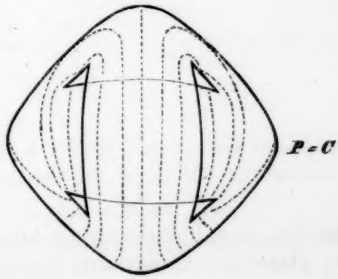


Fig. 13b.



§ 12.

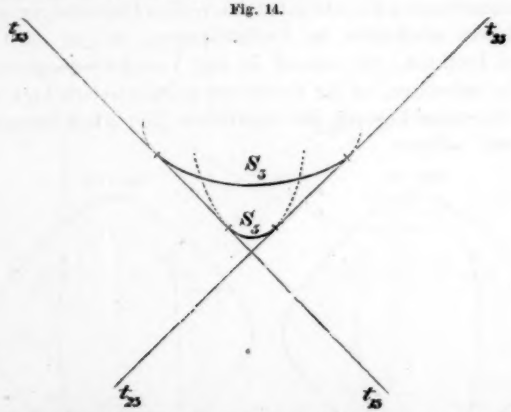
Vervollständigung des Querschnittsystems.

Die drei bei Einführung der Normalintegrale $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ benutzten Meridianschnitte b_{14}, b_{24}, b_{34} sollen jetzt durch drei weitere Schnitte A_1, A_2, A_3 zu einem „kanonischen“ Querschnittsysteme vervollständigt werden. A_i werde so gezogen, dass es von einem Punkte von b_{i4} auslaufend zu demselben Punkte, von der anderen Seite kommend, zurückkehrt, ohne dabei die anderen b_{k4} oder etwa schon construirte andere A zu überschreiten. Indem wir dann an den a_i die Integrale $\mathfrak{J}_k$ hinleiten, erhalten wir Perioden a_{ik} (es wird bekanntlich $a_{ik}=a_{ki}$), die mit den auf die b_{i4} bez. Perioden zusammen ein volles Periodensystem bilden. *Unsere Aufmerksamkeit soll besonders auf den imaginären Theil der a_{ik} gerichtet werden*; wir werden finden, dass derselbe, modulo $2i\pi$, gleich 0 oder $i\pi$ ausfällt, je nach der *Art* der zu Grunde gelegten Curve.

In den weiterhin mitzutheilenden Tabellen nehmen wir neben $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ aus Symmetriegründen auch $\mathfrak{J}_4$ auf; analog führen wir neben A_1, A_2, A_3 noch eine Curve A_4 ein, deren Definition sich naturgemäss ergiebt. Man hat, für die so erweiterte Tabelle, auch noch $a_{ik}=a_{ki}$ und überdies, wegen der zwischen den $\mathfrak{J}$ bestehenden Relation: $\Sigma a_{ik}=0$ $(i=1,2,3,4)$.

Für die Construction der Curven A_1, A_2, A_3, A_4 stelle ich nun folgende Regeln auf. Die Ellipsen ψ, χ waren je in vier Segmente S_1, S_2, S_3, S_4 zerfällt worden; wir wollen, um etwa A_3 zu erhalten, die beiden Segmente S_3 zusammen mit den beiden Tangenten t_{13}, t_{23}, welche sie begrenzen, ins Auge fassen:

Fig. 14.

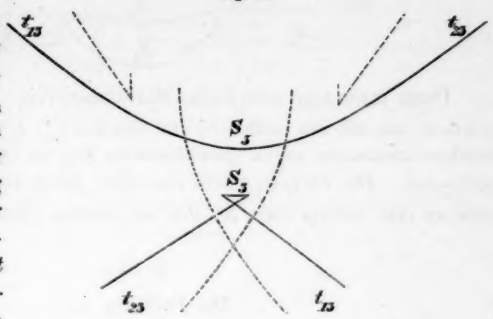


Man hat dann, hinsichtlich der Art, in welcher t_{13}, t_{23} beim Uebergange zur allgemeinen Classencurve benutzt sind, drei Fälle zu unterscheiden:

1) *Bei beiden Tangenten sollen die durch das Unendliche hindurchgehenden Segmente in reelle Curvenzüge gespalten sein.* Dann hat man also die Figur:

In diesem Falle bilden die beiden Segmente S_3 zusammen mit den unmittelbar angrenzenden Curvenstücken, die aus t_{13}, t_{23} entstanden sind, einen geschlossenen Zug (der dann ein reeller Zug der Curve ist). *Dieser Zug soll als A_3 genommen werden. Leitet man ein reelles Integral an ihm entlang, so erhält man eine reelle Periode.*

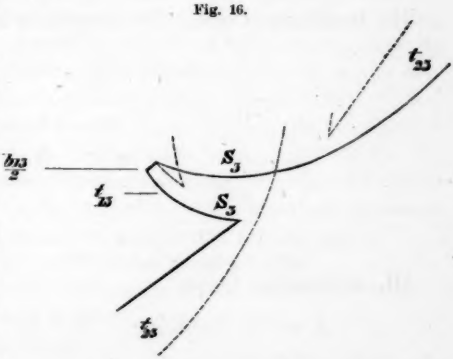
Fig. 15.



2) *Von den beiden begrenzenden Tangenten wird die eine, wie im Falle* 1), *die andere im umgekehrten Sinne benutzt, so dass also bei ihr das im Endlichen gelegene Segment in reelle Curvenzüge gespalten wird:*

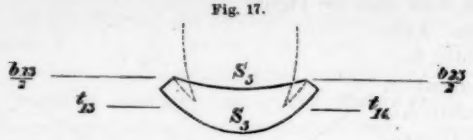
Dann bekommt man einen zusammenhängenden Zug, wenn man die beiden Segmente S_3 mit den angrenzenden Curvenstücken zusammenfügt, welche von den Tangenten t_{13}, t_{23} herrühren, und dann die auf der Vorder- oder Rückseite verlaufende Hälfte einer Meridiancurve b_{13} hinzunimmt. *Dies sei jetzt der Querschnitt A_3.* Er besteht aus Stücken der reellen Curvenzüge und aus einer halben Meridiancurve. *Leitet man an ihm ein reelles Integral entlang, so giebts, allgemein zu reden, eine complexe Periode, deren imaginärer Theil gleich $i \cdot \frac{\beta_{13}}{2}$ ist, wenn $i\beta_{13}$ die Periode ist, welche das Integral bei Durchlaufung der ganzen Meridiancurve b_{13} gewinnt.*

Fig. 16.



3) *Bei beiden begrenzenden Tangenten wird das im Endlichen befindliche Segment benutzt:*

Fig. 17.



Dann muss man zwei halbe Meridiancurven, $\frac{b_{13}}{2}$ und $\frac{b_{24}}{2}$, zu Hülfe nehmen, um mit den beiden S_3 und den aus t_{13}, t_{23} entstandenen Curvenstücken zusammen einen geschlossenen Zug zu bilden, *der dann als* A_3 *gelten soll. Die Periode, welche ein reelles Integral erhält, wenn man dasselbe an ihm entlang leitet, hat den imaginären Bestandtheil* $i\left(\frac{\beta_{13}+\beta_{23}}{2}\right)$.

§ 13.

Die Perioden a_{ik}.

Wenn wir in dieser Weise an der auf Tafel II, III gezeichneten Curven resp. den zugehörigen Flächen die Querschnitte A_1, A_2, A_3, A_4 ausführen und an ihnen $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$ entlang leiten, erhalten wir Werthe der a_{ik}, deren imaginäre Bestandtheile in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind auf Grund der Tabelle des § 8., die das Verhalten der $\mathfrak{J}$ an den b_{ik} angab.

I. *Viertheilige Curve.* Alle a_{ik} sind reell.

II. *Dreitheilige Curve.* Die imaginären Bestandtheile der a_{ik} sind:

	A_1	A_2 mit $-\frac{b_{21}}{2}$	A_3	A_4 mit $+\frac{b_{21}}{2}$
$\mathfrak{J}_1$	0	0	0	0
$\mathfrak{J}_2$	0	$-i\pi$	0	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	0	0	0	0
$\mathfrak{J}_4$	0	$+i\pi$	0	$-i\pi$

III. *Zweitheilige Curve.*

	A_1 mit $-\frac{b_{14}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{21}}{2}$	A_3	A_4 mit $+\frac{b_{14}+b_{21}}{2}$
$\mathfrak{J}_1$	$-i\pi$	0	0	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	0	$-i\pi$	0	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	0	0	0	0
$\mathfrak{J}_4$	$+i\pi$	$+i\pi$	0	$-2i\pi$

IV. *Eintheilige Curve.*

	A_1 mit $-\frac{b_{13}+b_{24}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{23}}{2}$	A_3 mit $+\frac{b_{13}+b_{23}}{2}$	A_4 mit $+\frac{b_{14}}{2}$
$\mathfrak{J}_1$	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	0	$+i\pi$	$-i\pi$	0
$\mathfrak{J}_3$	$-i\pi$	$-i\pi$	$+2i\pi$	0
$\mathfrak{J}_4$	$+i\pi$	0	0	$-i\pi$

V. *Gürtelcurve.*

	A_1 mit $-\frac{b_{13}+b_{24}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{23}+b_{24}}{2}$	A_3 mit $+\frac{b_{13}+b_{23}}{2}$	A_4 mit $+\frac{b_{14}+b_{24}}{2}$
$\mathfrak{J}_1$	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$-i\pi$	$-i\pi$	$+2i\pi$	0
$\mathfrak{J}_4$	$+i\pi$	$+i\pi$	0	$-2i\pi$

§ 14.

Berührungscurven.

Die aufgestellten Tabellen gestatten, in sehr einfacher Weise zu discutiren, wie viele unter gewissen *Berührungscurven* der Curve vierten Grades reell sind, und mit der Darlegung dieser Verhältnisse mag die gegenwärtige Arbeit abschliessen. Ich betrachte die einfacheren derjenigen Probleme, welche bei Clebsch (Crelle's Journal LXIII. Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie) behandelt sind, nämlich nur diejenigen, bei denen nicht, wie beim Probleme der Doppeltangenten, eine Unterscheidung gerader und ungerader Charakteristiken nothwendig ist. Clebsch findet, resp. bestätigt die (sonst bekannten) Resultate, dass es bei Curven vierten Grades giebt:

a) 63 Systeme viermal berührender Kegelschnitte,
b) 64 Systeme sechsmal berührender Curven dritter Ordnung.
c) 728 Systeme viermal osculirender C_3,
d) 4096 dreimal hyperosculirende C_3.

Ich werde angeben, wie viele dieser Systeme resp. einzelner Curven reell sind.

Dabei sei es gestattet, des kürzeren Ausdrucks halber wieder von Ordnungs-Curven statt von Classen-Curven zu reden. Von den vier Integralen $\mathfrak{J}_k$ benutzen wir nur die drei $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$. Ihre unteren Grenzen verlegen wir in drei übrigens beliebige, reelle Punkte der

Curve vierter Ordnung. Sind dann die Schnittpunkte der Curve vierter Ordnung mit einer Curve m^{ter} Ordnung $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{4m}$, so hat man nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\mathfrak{J}_k^{x_1} + \mathfrak{J}_k^{x_2} + \cdots\cdots \mathfrak{J}_k^{x_{4m}} \equiv m \cdot C_k, \ (k=1,2,3),$$

wo die Constanten C_k von der Wahl der unteren Grenzen abhängen, und das Congruenzzeichen andeuten soll, dass die Gleichung nur modulo der Perioden stattzufinden hat.

So behaupte ich zunächst: *Die Constanten C_k können bei der von uns getroffenen Verabredung reell genommen werden.* Wenn nämlich die schneidende Curve m^{ter} Ordnung reell ist, so werden von den $4m$ Schnittpunkten die imaginären paarweise conjugirt auftreten und von den reellen auf jedem Zuge der Curve vierter Ordnung eine gerade Anzahl sich vorfinden. Denn diese Züge haben sog. paaren Charakter. Die Integralsummen aber, die, von reeller unterer Grenze beginnend, zu conjugirt imaginären oberen Grenzen hingeleitet werden, sind, modulo der Perioden, reell. Ebenso die Integralsummen, die, von reeller unterer Grenze beginnend, zu einer paaren Anzahl reeller Punkte desselben Curvenzuges hingeleitet werden. Denn das einzelne solche Integral ist entweder an sich reell oder hat den imaginären Bestandtheil $i\pi$; eine paare Anzahl derselben giebt also eine Summe, die modulo $2i\pi$ congruent mit einer reellen Zahl ist. Hierin liegt der Beweis.

Die Berührungsprobleme, die oben genannt wurden, verlangen nun alle, solche Berührungspunkte zu bestimmen, welche, abgesehen von *reellen* Multiplis der C_k, als Integralsummen r^{te} *Theile von Perioden* ergeben: r ist dabei in den beiden ersten Fällen gleich 2, im dritten gleich 3, im vierten gleich 4 zu setzen. Nach dem allgemeinen Satze, der in § 8. hinsichtlich der Realität der Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems aufgestellt wurde, ergiebt sich daher:

Diejenigen Lösungen der Berührungsprobleme sind reell und nur diejenigen, deren zugehöriger r^{ter} Periodentheil, modulo $2i\pi$, den imaginären Bestandtheil 0 oder $i\pi$ aufweist.

§ 15.

Anzahl der reellen Berührungscurven.

Die Perioden, welche die $\mathfrak{J}_k$ bei Integration längs der Querschnitte b_{14}, b_{24}, b_{34} erhalten, sollen einen Augenblick $\beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{3k}$ genannt werden. Dann ist das allgemeinste Periodensystem, unter $m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3$ ganze Zahlen verstanden, vorgestellt durch:

$$m_1\beta_{1k} + m_2\beta_{2k} + m_3\beta_{3k} + q_1a_{1k} + q_2a_{2k} + q_3a_{3k}.$$

Die *verschiedenartigen* r^{ten} Periodentheile erhält man alle, wenn man die m, q auf die Zahlwerthe 0, $1 \cdots (r-1)$ einschränkt und dann durch r dividirt.

Der imaginäre Bestandtheil, den die allgemeine Periode enthält, nimmt nun auf Grund der früheren Tabellen bei den einzelnen Curvenarten folgenden Werth an:

I. *Viertheilige Curve.*

$\mathfrak{J}_1$	$2m_1 i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	$2m_2 i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$2m_3 i\pi$

II. *Dreitheilige Curve.*

$\mathfrak{J}_1$	$2m_1 i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	$(2m_2 - q_2) i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$2m_3 i\pi$

III. *Zweitheilige Curve.*

$\mathfrak{J}_1$	$(2m_1 - q_1) i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	$(2m_2 - q_2) i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$2m_3 i\pi$

IV. *Eintheilige Curve.*

$\mathfrak{J}_1$	$(2m_1 - q_3) i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	$(2m_2 + q_2 - q_3) i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$(2m_3 - q_1 - q_2 - 2q_3) i\pi$

V. *Gürtelcurve.*

$\mathfrak{J}_1$	$(2m_1 - q_3) i\pi$
$\mathfrak{J}_2$	$(2m_2 - q_3) i\pi$
$\mathfrak{J}_3$	$(2m_3 - q_1 - q_2 + 2q_3) i\pi$

Jetzt lasse man die m, q alle Werthe von 0 bis $(r-1)$ annehmen, und sehe nach, für wie viel Werthsysteme von den r^6 überhaupt vorhandenen die imaginären Bestandtheile ganzzahlige Multipla von $ri\pi$ werden. So findet man folgende Tabelle:

	I	II	III	IV	V	r^6
$\nu = 2$	64	32	16	8	16	64
$\nu = 3$	27	27	27	27	27	729
$\nu = 4$	512	256	128	64	128	4096

Die Zahlen der Tabelle geben dann zugleich an, wie viele der verschiedenartigen r^{ten} Periodentheile zu Umkehrproblemen mit reellen Lösungen Anlass geben. Aber unter ihnen ist im Falle a) und im Falle c) noch eine uneigentliche Lösung auszuscheiden. Denn setzt man alle m und q gleich Null, so erhält man in den genannten Fällen statt eines Systems viermal berührender Kegelschnitte bez. viermal osculirender Curven dritter Ordnung die doppelt- bez. dreimal gezählten geraden Linien der Ebene. Dementsprechend gewinnt man folgende Sätze:

Von den 63 *Systemen viermal berührender Kegelschnitte sind in den Fällen* I, II, III, IV, V *bez. reell:*

63, 31, 15, 7, 15.

Für die 64 *Systeme sechsmal berührender Curven dritter Ordnung werden diese Zahlen:*

64, 32, 16, 8, 16.

Unter den 728 *Systemen viermal osculirender Curven dritter Ordnung sind immer und nur*

26

reell.

Endlich finden sich unter den 4096 *dreimal hyperosculirenden Curven dritter Ordnung in den verschiedenen Fällen:*

512, 256, 128, 64, 128

reelle.

Von diesen Resultaten kann man das erste, nach einer Bemerkung, die Herr Zeuthen gemacht hat*), indirect bestätigen. Es wurde bereits oben des Zusammenhangs gedacht, der zwischen der Theorie der Curven vierter Ordnung und der Theorie der Flächen dritter Ordnung besteht. Von den Doppeltangenten der C_4 wird dabei eine ausgezeichnet; sie entspricht dem auf der F_3 angenommenen Projectionspunkte. Die anderen Doppeltangenten sind die Bilder der 27 auf der F_3 verlaufenden geraden Linien. Nun hat Herr Zeuthen bemerkt (Tidsskrift etc. Bd. 3, p. 191), dass die aus den 27 Linien zu bildenden 36 Doppelsechsen sich projiciren als die Aggregate der Linienpaare, welche in denjenigen 36 Systemen viermal berührender Kegelschnitte vorkommen, die die ausgezeichnete Doppeltangente nicht als Theilcurve enthalten. Andererseits findet sich in Cremona's „Preliminari di una teoria delle superficie" angegeben, wie viele der 36 Doppelsechs bei den von Schläfli unterschiedenen Arten der F_3 reell sind; es sind bez.:

36, 16, 8, 4, 12.

*) Vgl. auch eine Arbeit von Hrn. Crone in der Tidsskrift for Mathematik, Nov. 1875.

Aus ihnen ergiebt sich nun z. B. die von uns für die Gürtelcurve V angegebene Zahl 15 folgendermassen. Die 12 reellen Doppelsechse der entsprechenden Fläche enthalten, wie Cremona angiebt, keine reelle gerade Linie; ihnen entsprechen also 12 reelle Kegelschnittsysteme bei der C_4, welche keine der reellen Doppeltangenten als Theilcurve enthalten. Aber es giebt bei dieser C_4 vier reelle Doppeltangenten; ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitte (vergl. Zeuthen Bd. VII, p. 412). Indem man eine beliebige derselben mit einer zweiten zusammen als Berührungskegelschnitt auffasst, erhält man in bekannter Weise ein neues, reelles System von Berührungskegelschnitten, welches dann aber die beiden zunächst nicht benutzten reellen Doppeltangenten ebenfalls als ein Linienpaar enthalten wird. Die Zahl der zu den 12 Systemen zutretenden ist also noch 3, in Uebereinstimmung mit dem oben angegebenen Resultate.

Noch möchte ich bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung zufügen über eine Arbeit von J. Grassmann (Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der Curven vierter Ordnung, Berlin 1875, Inauguraldissertation). Der Verf. untersucht, zumal für die Curven vierter Ordnung, die Frage, ob sich zwischen den Wendepunkten analoge Beziehungen entdecken lassen, wie sie z. B. für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der C_4 oder für die Wendepunkte der C_3 gelten. Aber sein Hauptresultat, welches, für die C_4 ausgesprochen, behauptet, dass jeder Kegelschnitt, der durch fünf Wendepunkte geht, deren noch drei weitere enthält, ist im Allgemeinen nicht richtig. Ich überzeugte mich davon zunächst, indem ich die Zeichnungen von Curven vierter Ordnung durchsah, die Beer in seinen *Tabulae curvarum quarti ordinis etc.* (Bonn 1852) zusammengestellt hat. Bei diesen Curven liegen immer vier Wendepunkte im Unendlichen, und es kommen Beispiele vor (z. B. Tafel VII, 1), bei denen vier im Endlichen liegende reelle Wendepunkte auftreten, die (auch wenn man der Ungenauigkeit der Zeichnung Rechnung tragen will) unmöglich auf einer zweiten Geraden liegen können, wie es J. Grassmann's Satz in diesem Falle verlangen würde. Es ist die immer so missliche Anwendung complicirter Schnittpunktsysteme gewesen, die den Verf. zu dem Fehlschlusse verführte; wie er mir mittheilt, ist das System der 45 Punkte (p. 11 der Arbeit), aus welchem der Schluss auf die Lage der weiteren Wendepunkte gemacht wird, von der besonderen Art, die überhaupt keinen Schluss auf weitere Punkte zulässt.

München, im April 1876.

Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen.

(Zweite Mittheilung.)

Von Felix Klein in München.

Der nachstehende Aufsatz giebt eine Fortsetzung der unter gleichem Titel im 7ten Bande dieser Annalen (p. 558—566) erschienenen Arbeit. Nachdem ich damals die betr. Flächen überhaupt definirt und an einfachen Beispielen erläutert habe, discutire ich jetzt allgemein, für Curven beliebigen Grades mit einfachen Singularitäten, die *Verzweigung* und den *Zusammenhang* dieser Flächen. Eine erste bez. Notiz veröffentlichte ich bereits in den Erlanger Berichten, Mai 1874. Der Fortschritt, den meine jetzige Darstellung aufweist, beruht wesentlich auf dem Satze, den ich neuerdings in der Note: *„Ueber eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve“* mittheilte (p. 199 ff. dieses Bandes). Aber nicht nur auf diesen Satz, sondern auch auf die dort im Einzelnen befolgte Entwickelung werde ich mich wiederholt beziehen; ich werde daher diese Note weiterhin einfach mit den Worten „Ueber Singularitäten“ citiren oder auch nur eine bez. Seitenzahl angeben. Andererseits werde ich verschiedentlich Bezug nehmen auf zwei andere, dem gleichen Ideenkreise angehörige Arbeiten, in die ich bereits einige hier nöthig werdende Beweise eingeflochten habe, um bei der jetzigen Darstellung mich kürzer fassen zu können. Es ist dies zunächst der unmittelbar vorstehende Aufsatz: *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades*; er mag namentlich auch die Richtung bezeichnen, in welcher ich die hier vorzutragenden Untersuchungen weiter zu führen denke. Es ist andererseits die im 9ten Bande dieser Annalen p. 476—482 gegebene Notiz: *Ueber den Zusammenhang der Flächen.* Die Auffassung, welche ich schon bei einer früheren Gelegenheit (diese Annalen VII, p. 549—557) zur Sprache brachte, — der zufolge man bei Zusammenhangsbetrachtungen nicht von der Fläche schlechthin sondern von der Flächen*seite* zu sprechen hat —, wird in der genannten Notiz consequenter durchgebildet. Dies veranlasst mich, weiterhin einige derjenigen Festsetzungen, die ich in meinem ersten Aufsatze über die neue Art der Riemann'schen Flächen aus Zweckmässigkeitsgründen traf, etwas zu modificiren.

§ 1.

Anordnung der Blätter. Bedeutung der reellen Wendetangenten und der isolirten Doppeltangenten.

In der zuletzt genannten Notiz „Ueber den Zusammenhang der Flächen" habe ich (p. 479, 80) auf die enge Beziehung aufmerksam gemacht, welche zwischen der neuen Riemann'schen Fläche und der v. Staudt'schen Imaginärtheorie besteht, und habe entwickelt, dass man dementsprechend die Blätter der Fläche mit *Indicatricen* überdecken könne, die einen bestimmten *Sinn* besitzen. Durch ihn sollte dort in derselben Weise eine Unterscheidung zwischen den beiden Seiten einer Fläche ermöglicht werden, wie dies gewöhnlich durch Angabe des Sinnes der Flächen-Normale geschieht. Hier, wo die principiellen Fragen, die ich damals behandelte, zurücktreten, will ich mich der gewöhnlich gebrauchten, bequemeren Anschauung bedienen. Man errichte etwa die Normale immer nach derjenigen Seite, von der aus die betr. Indicatrix in der Richtung des Zeigers einer Uhr durchlaufen erscheint, und bezeichne dann diejenigen Blätter der Fläche, deren Normale auf den Beschauer zugerichtet ist, als *obere*, die anderen als *untere*.

Es wird im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich (§ 6.) das Gegentheil bemerkt wird, die Gleichung der zu untersuchenden Curve mit *reellen* Coefficienten gedacht. Dann ordnen sich die Blättter der Riemann'schen Fläche in der Weise zu zwei zusammen, dass die Punkte des einen Blattes die conjugirt imaginären Werthe derjenigen repräsentiren, welche im anderen Blatte ihre Darstellung finden. Da der *Sinn* der oben genannten Indicatricen zwischen den conjugirt imaginären Vorkommnissen scheidet, *so ist also von zwei zusammengehörigen Blättern das eine ein oberes, das andere ein unteres.* An jeder Stelle ist die Ebene von einer paaren Anzahl (die auch Null sein kann) von Blättern überdeckt; die halbe Zahl dieser Blätter gehört zu den oberen, die andere Hälfte zu den unteren, und jedes obere Blatt entspricht einem bestimmten unteren.

Um von einem oberen Blatte in ein unteres zu gelangen, giebt es zwei Möglichkeiten. Entweder, man geht (sofern es Blätter giebt, die sich durch das Unendliche erstrecken) durch das Unendliche hindurch, wobei sich der Sinn der Flächennormale von selbst umkehrt — oder man überschreitet einen reellen Zug der Curve, resp. eine reelle Wendetangente oder eine isolirte Doppeltangente derselben, wobei man vom oberen Blatte ausgehend in das unmittelbar unter ihm befindliche, zugehörige untere Blatt gelangt. Es wird zweckmässig sein, hier diese beiden letzten Vorkommnisse etwas zu erläutern, da die betr. Auseinandersetzungen meines ersten Aufzatzes, wie schon in der Einleitung angedeutet, nicht ganz zutreffend sind.

Auf p. 562 des ersten Aufsatzes wurde eine Curve dritter Classe mit isolirter Doppeltangente betrachtet (Fig. II ebenda). Dieselbe erscheint als eine Uebergangsform zwischen der allgemeinen, eintheiligen und der allgemeinen, zweitheiligen Curve (Fig. III, I); die Doppeltangente geht doppeltzählend aus einem Zuge der letztgenannten Curve hervor, der die Gestalt einer sehr steilen Hyperbel hat; beim Uebergange zu III kommt die Doppeltangente einfach in Wegfall. Die Modification, welche die bez. Riemann'sche Fläche bei diesem Uebergange erleidet, kann man folgendermassen beschreiben: Von der Fläche II ausgehend erhält man die Fläche III der eintheiligen Curve, indem man die beiden an die Doppeltangente hinanreichenden oberen Halbblätter mit einander vereinigt, und ebenso die beiden (zugehörigen) unteren Halbblätter; dagegen erhält man die Fläche der zweitheiligen Curve, indem man jedes der beiden an die Doppeltangente sich hinanziehenden oberen Halbblätter an das zugehörige untere Halbblatt anheftet. — Dieser doppelten Möglichkeit giebt man nur einen einseitigen Ausdruck, wenn man sich die Doppeltangente als eine Selbstberührungsgerade der Fläche denkt, wie ich damals wollte (p. 563); es ist besser, *man stellt sich die Fläche längs der Doppeltangente zerschnitten vor*, wo man dann die beiden Ränder je nach Bedürfniss vereinigen kann. Unter einem Rande der betr. Fläche wird dabei verstanden die Berandung eines oberen Halbblattes zusammen mit der Berandung des gegenüberliegenden unteren; denn sie hängen im Unendlichen zusammen. Wenn später (§ 4.) davon die Rede ist, dass, bei der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, der hier in Rede stehenden Doppeltangente ein Paar von Fundamentalpunkten entspricht, so hat man sich das so vorzustellen: dass der Umgebung des einen Fundamentalpunktes der eine der hier definirten Ränder, der Umgebung des anderen Fundamentalpunktes der andere Rand zugeordnet ist (vergl. Bd. VII, p. 554—557). — Diese Erläuterung, die sich zunächst auf den Fall der Curven dritter Classe bezog, soll selbstverständlich allgemeine Bedeutung haben, ebenso wie die Bemerkung, die hier betr. die reellen Wendetangenten zu machen ist. Hinsichtlich der letzteren werde nämlich festgesetzt, dass sie einfach in derselben Weise vorgestellt werden sollen, wie die reellen Züge der Curve (Bd. X, p. 367). Die frühere Festsetzung (Bd. VII, p. 563), der zufolge die Wendetangente als eine Rückkehrkante gedacht werden sollte, war desshalb ungeeignet, weil man, auf dem oberen Blatte aufwärtsstehend, durch Ueberschreitung der Wendetangente abwärtsstehend in das untere Blatt gelangen muss.

Da bei einer Curve mit reellen Coefficienten die imaginären Vorkommnisse immer paarweise, als conjugirt imaginäre, auftreten, so werden sich bei unseren Flächen alle Besonderheiten, die sich in einem oberen Blatte einstellen, an derselben Stelle des zugehörigen unteren

Blattes wiederholen. Insbesondere, wenn zwei obere-Blätter sich in einem Punkte verzweigen, wo dann, irgendwie gestaltet, von diesem Punkte ein Verzweigungsschnitt ausläuft, so verzweigen sich die zugehörigen unteren Blätter an derselben Stelle und man kann dem betr. Verzweigungsschnitte eben die Gestalt des anderen geben. Eine solche Stelle werde ich weiterhin einen *Doppelverzweigungspunkt* nennen (vergl. Bd. X. p. 379). Andere Verzweigungspunkte, als diese, giebt es nicht. Denn sollte ein oberes und ein unteres Blatt durch einen Verzweigungspunkt verbunden sein, so würde von ihm aus eine doppeltzählende, sich selbst conjugirte, d. h. *reelle* Tangente an die Curve gehen. Das geschieht aber nur bei denjenigen Punkten, welche den reellen Curvenzügen oder den reellen Wendetangenten oder den isolirten Doppeltangenten angehören; und deren Bedeutung für die Riemann'sche Fläche ist bereits untersucht. — Es wird also auch nie ein oberes und ein unteres Blatt durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sein, und, zerschneidet man die Fläche längs der reellen Curvenzüge, der reellen Wendetangenten und (wenn es noch nicht geschehen) längs der isolirten Doppeltangenten, so hängen die oberen Blätter der Fläche entweder überhaupt nicht mehr mit den unteren Blättern zusammen oder nur noch möglicherweise im Unendlichen.

§ 2.

Verzweigungspunkte.

Nach der eben gegebenen Erläuterung kann unsere Fläche nur an solchen Stellen Verzweigungspunkte aufweisen, an welchen zwei obere Blätter und zugleich zwei untere Blätter einen Punkt gemein haben. Das Letztere geschieht, wenn sich von dem betr. (reellen) Punkte der Ebene zwei conjugirt imaginäre doppeltzählende Tangenten an die gegebene Curve legen lassen. Wir werden hier diese Vorkommnisse aufzählen unter der auch später immer festgehaltenen (und dann nicht ausdrücklich hervorgehobenen) Voraussetzung, dass die geg. Curve nur einfache Singularitäten besitze. Zur Bezeichnung der letzteren verwende ich hier und überhaupt im Folgenden dieselben Buchstaben, die ich in der Note „Ueber Singularitäten" p. 206, 207 gebrauchte. Die hier zunächst in Betracht kommenden Punkte sind die folgenden:

1) die d'' isolirten Doppelpunkte der Curve,
2) die $\frac{1}{2}w''$ reellen Punkte, von denen zwei conjugirt imaginäre Wendetangenten ausgehen,
3) die $\frac{1}{2}t'''$ reellen Punkte, in denen sich zwei conjugirt imaginäre Doppeltangenten kreuzen.

Ich behaupte nur: *Die Punkte* 1), 2) *liefern in der That Doppelverzweigungspunkte, nicht aber die Punkte* 3). Mit diesem Satze und der

auf die reellen Wendetangenten und isolirten Doppeltangenten bez. Discussion des vorigen § ist der Einfluss, den die Singularitäten der Curve auf die Gestalt der zugehörigen Riemann'schen Fläche haben, erschöpfend angegeben, denn die Bedeutung der reellen nicht isolirten Doppelpunkte, der reellen Spitzen und der nicht isolirten reellen Doppeltangenten ist zu einfach, als dass sie noch besonders erläutert werden müssen (vergl. etwa die Figuren Bd. VII. p. 563, 64 oder die dem vorstehenden Aufsatze beigegebenen Tafeln); und die imaginären Doppelpunkte, resp. die imaginären Spitzen, welche die Curve besitzen mag, treten bei unserer Riemann'schen Fläche überhaupt nicht in unmittelbare Evidenz.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, benutze ich, wie in der Note „Ueber Singularitäten", die Methode, seine Richtigkeit an geeigneten Beispielen zu demonstriren; einen Beweis, den man vielleicht explicite wünschen mag, dass die jedesmaligen Beispiele hinlänglich allgemein sind, unterdrücke ich der Kürze wegen.

Dass ein *isolirter reeller Doppelpunkt* Doppelverzweigungspunkt ist, wurde, für Curven vierter Classe, Bd. X. p. 380 gezeigt und ist damit allgemein bewiesen.

Die Nothwendigkeit, *den reellen Punkt conjugirt imaginärer Wendetangenten* als Doppelverzweigungspunkt zu denken, wird sich im folgenden § bei Untersuchung der Curven dritter Ordnung ergeben, deren Fläche, ohne eine solche Annahme, aus getrennten Stücken bestehen würde, was der Irreducibilität widerstreitet.

Endlich, um zu sehen, *dass der reelle Punkt conjugirt imaginärer Doppeltangenten* keine Verzweigung herbeiführt, betrachte man die Curve vierter Classe, welche aus zwei sich schneidenden Kreisen gebildet wird. Diese reducibele Curve hat eine Riemann'sche Fläche, die aus den beiden bez. kreisförmigen Doppelblättern gebildet wird. Aber die Curve hat vier Doppeltangenten und unter ihnen zwei imaginäre. Der reelle Punkt derselben ist der sog. innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Von einer in ihm stattfindenden Verzweigung kann selbstverständlich keine Rede sein.

Wir werden jetzt diese Verhältnisse an dem Beispiele der *Curven dritter Ordnung* ausführlich discutiren. Dieselben sind, wenn sie keinen vielfachen Punkt haben, von der sechsten Classe und haben dann sechs imaginäre Wendungen; wir werden daher bei ihnen drei Doppelverzweigungspunkte und ev. sechs übereinander liegende Blätter haben, so dass eine schon ziemlich beträchtliche Anzahl von Elementen zu combiniren ist. Indem wir die Modificationen verfolgen, welche die zugehörige Fläche erfährt, wenn die Curve einen singulären Punkt erhält oder verliert, erhalten wir nebenbei eine bemerkenswerthe Ver-

anschaulichung der Plücker'schen Formeln, sofern dieselben aussagen, dass ein Doppelpunkt sechs, eine Spitze acht Wendungen absorbirt.

Noch in einer anderen Richtung scheinen die folgenden Figuren bemerkenswerth. Man hat sich seither bei der Wendepunktsgleichung der Curven dritter Ordnung und ähnlichen Problemen wesentlich mit der Aufstellung der Resolventen beschäftigt. Aber man kann die Frage in einem anderen Sinne stellen, indem man verlangt, *die einfachsten Näherungsmethoden anzugeben, welche bei numerischer Auflösung solcher Gleichungen am raschesten zum Ziele führen.* Die nachfolgenden Figuren geben für die Wendepunktsgleichung der Curven dritter Ordnung in diesem Sinne insofern eine Anleitung, als sie diejenigen Bezirke der Ebene kennen lehren, in welchen man die reellen Punkte der Wendetangenten zu suchen hat, was mit einer Separation der Wurzeln etwa auf gleicher Stufe steht. Das Wendepunktsproblem, wie es hier vorliegt, ist freilich noch zu einfach, um den Vorzug einer solchen Behandlung bei praktischen Fällen gegenüber der directen Auflösungsmethode wesentlich hervortreten zu lassen. Anders wird es aber z. B. schon bei Curven vierter Ordnung, wenn es sich um numerische Bestimmung der Doppeltangenten oder Wendetangenten handelt.

§ 3.

Die Riemann'schen Flächen der Curven dritter Ordnung.

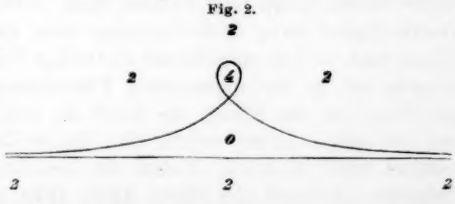
Bereits in Bd. VII. p. 564 (Fig. II der oberen Reihe) wurde die zu einer Curve dritter Ordnung mit Spitze gehörige Fläche gezeichnet. Da wir weiterhin (§ 4.) noch auf diejenige Partie der Fläche, welche in der Nähe des reellen Wendepunktes sich erstreckt, zu reden kommen, so wird es hier gestattet sein, den Wendepunkt unendlich weit zu projiciren und dadurch die Figur 1 zu einer symmetrischen zu gestalten.

Fig. 1.



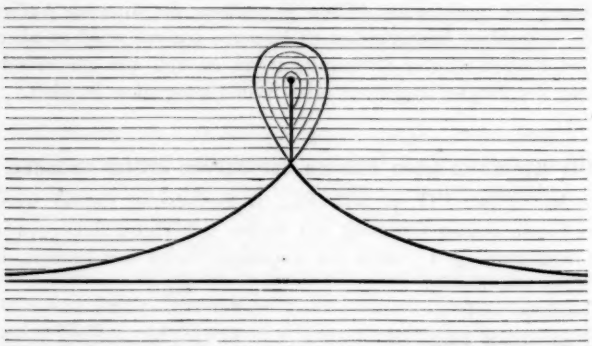
Nun soll aus der Curve mit Spitze eine Curve mit nicht isolirtem Doppelpunkte entstehen. Zu dem Zwecke haben wir die Spitze durch eine (zunächst kleine) Schleife zu ersetzen. Die Classe der Curve wächst bei diesem Uebergange um eine Einheit, und die Anzahl der Blätter der Riemann'schen Fläche ist dementsprechend die in Fig. 2 angegebene:

Fig. 2.



Enthielte nun das Innere der Schleife keinen Verzweigungspunkt, so könnten diese Blätter kein zusammenhängendes Ganze bilden. Ein isolirter Doppelpunkt ist aber nicht vorhanden, es müssen sich also imaginäre Wendungen gebildet haben — was die genannte Bestätigung der Plücker'schen Formeln ist — und sie müssen eine Verzweigung veranlassen — was den von uns für die betr. Behauptung in Aussicht gestellten Beweis ausmacht. Die Plücker'schen Formeln zeigen, dass die nun auftretenden imaginären Wendungen nur in der Zahl 2 vorhanden sind, wir erhalten also nur *einen* Doppelverzweigungspunkt. Wir wollen die beiden von ihm ausgehenden Verzweigungsschnitte in den Doppelpunkt auslaufen lassen (oder vielmehr die beiden Schnitte, die bez. die Durchdringung der beiden oberen und der beiden unteren Blätter vorstellen [und also in der Zeichnung coincidiren] im Doppelpunkte sich vereinigen lassen). So entsteht folgende Figur:

Fig. 3.



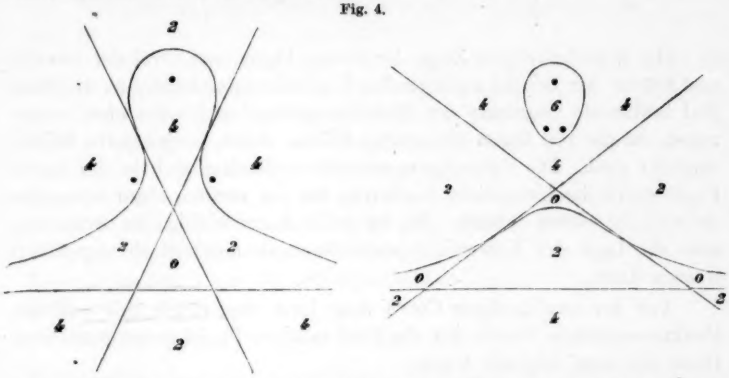
Wir denken uns bei ihr die beiden von der Schleife umschlossenen Blätter *zwischen* den beiden sich ins Unendliche erstreckenden Blättern gelegen; dementsprechend wurde die Schleife schwächer ausgezogen, als die übrigen Contouren und der Verzweigungsschnitt.

Von der Curve mit Doppelpunkt gehen wir, indem wir den Doppelpunkt in dem einen oder anderen Sinne auflösen, zu eintheiligen oder zweitheiligen Curven dritter Ordnung über, die dann von der sechsten Classe sind. — Die entstehende eintheilige Curve gehört, wie beiläufig bemerkt sei, zu den sogenannten *Viereckscurven*, d. h. sie verläuft in den Vierecken der Figur, die durch die drei reellen Wendetangenten und die gerade Linie, welche die drei reellen Wendepunkte enthält, gebildet wird (Möbius. Ueber die Grundformen der Linien dritter Ordnung. Abhandl. der Sächs. Akad. 1849. p. 80). Weiterhin leiten wir aus der zweitheiligen Curve, indem wir das Oval verschwinden lassen, eintheilige *Dreieckscurven* ab. Ihre Riemann'sche Fläche scheint auf

den ersten Blick von der Fläche der Viereckscurven sehr verschieden; dieselben gehen aber, wie noch gezeigt wird, continuirlich in einander über, sobald man den Uebergangsfall ins Auge fasst, in welchem sich die drei reellen Wendetangenten in einem Punkte kreuzen. Desshalb werden bei der allgemeinen Betrachtung (§ 5.) derartige Vorkommnisse (dass Curven überschritten werden, welche statt dreier Doppelpunkte, die durch Ueberkreuzung von Curvenzweigen oder auch von reellen Wendetangenten entstehen, einen dreifachen Punkt besitzen) nicht weiter discutirt.

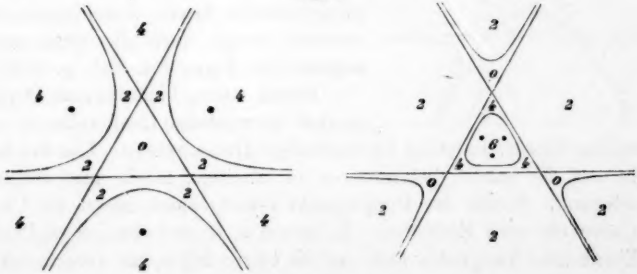
So wie wir bei der zuletzt gezeichneten Curve dritter Ordnung den Doppelpunkt auflösen, bilden sich nach Plücker's Angabe (Ueber Singularitäten p. 202) zwei reelle Wendungen und vier imaginäre, also bei unseren Flächen zwei neue Doppelverzweigungspunkte. Dass dieselben in der beistehenden Figur

Fig. 4.



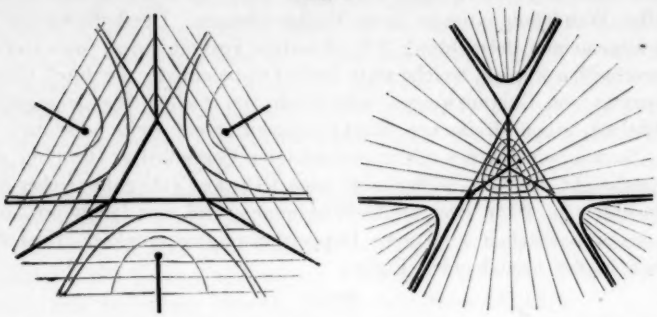
richtig angegeben sind (wir haben in diesen Figuren zugleich die betr. Blätteranzahlen notirt), ergiebt sich, da die Lage des schon vorhandenen Doppelverzweigungspunktes schon bekannt ist, aus Symmetriegründen. Man sieht das deutlicher bei den Figuren, die sich ergeben, wenn man die drei reellen Wendepunkte unendlich weit projicirt:

Fig. 5.



und, indem wir sie zu Grunde legen, erhalten wir die folgenden Riemann'schen Flächen:

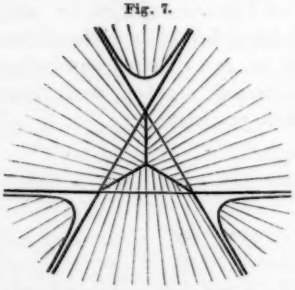
Fig. 6.



Die hyperbelartigen Züge der ersten Figur, das Oval der zweiten und Stücke der bei ihr auftretenden Verzweigungsschnitte, so wie beide Mal bestimmte Segmente der Wendetangenten sind schwächer ausgezogen, da die von ihnen begrenzten Blätter durch vorgelagerte Blätter verdeckt sind. Die Verzweigungsschnitte erstrecken sich in der ersten Figur durch das Unendliche hindurch; bei der zweiten Figur schneiden sie sich in einem Punkte. Es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, dass die Lage der Verzweigungsschnitte noch mannigfach abgeändert werden kann. —

Aus der zweitheiligen Curve mag jetzt eine Curve mit isolirtem Punkte entstehen, indem wir das Oval in einen Punkt zusammenziehen. Dann hat man folgende Figur:

Fig. 7.

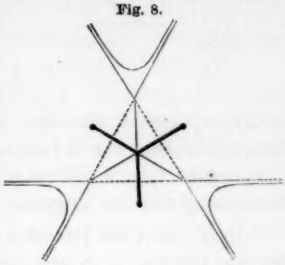


Man sieht, dass der Doppelpunkt, wie es die Plücker'schen Formeln verlangen, sechs Wendungen absorbirt hat. Der Doppelpunkt ist ein einfacher Doppelverzweigungspunkt; die drei in der Figur von ihm ausgehenden Verzweigungsschnitte lassen sich durch einen ersetzen (vergl. auch die etwas anders angeordnete Figur Bd. VII. p. 566).

Indem wir endlich das zum Doppelpunkte gewordene Oval vollends verschwinden lassen, entsteht die *eintheilige Dreieckscurve*. Um die betr. Fläche aus der zuletzt betrachteten zu erhalten, mache man folgende Ueberlegung. Indem der Doppelpunkt verschwindet, steigt die Classe der Curve um zwei Einheiten. Es lassen sich also von jedem Punkte der Ebene zwei Tangenten *mehr* an die Curve legen, als vorher. Aber

für keinen Punkt sind dieselben reell. Es ist also die ganze Ebene *mit einem neuen Doppelblatte* zu überdecken, dessen obere resp. untere Hälfte man sich vor der Vorderfläche resp. hinter der Rückfläche der bisherigen Figur ausgebreitet denken mag. Dasselbe hängt dadurch mit den übrigen Blättern zusammen, dass sich der isolirte Doppelpunkt wieder in *drei* Doppelverzweigungspunkte aufgelöst hat, wie die nebenstehende Figur aufweist.

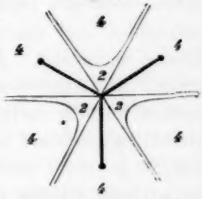
Fig. 8.



In ihr sind diejenigen Contouren, welche für den Beobachter durch zwei Blätter verdeckt erscheinen, nur punktirt; vor die schwach ausgezogenen Contouren ist nur je ein Blatt vorgelagert.

Von der so erhaltenen Zeichnung geht man nun zu *der eintheiligen Viereckscurve* zurück, indem man eine Curve betrachtet, bei der sich die drei reellen Wendetangenten in einem Punkte schneiden:

Fig. 9.



Dreht man diese Figur um 60 Grad, so übersieht man, dass dieselbe von der oben für die Viereckscurve gegebenen wenig verschieden ist. Man hat nur die drei Asymptoten der letzteren so zu verschieben, dass sie durch einen Punkt gehen, und die Verzweigungspunkte durch das Unendliche durch auf den Mittelpunkt der Figur zurücken zu lassen.

Hiermit sind alle Arten der Curven dritter Ordnung besprochen.

§ 4.

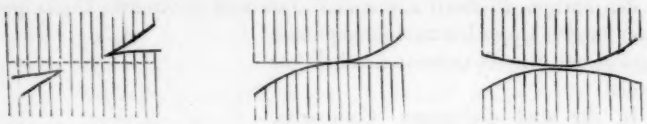
Der Zusammenhang unserer Flächen.

Wenn der Zusammenhang, den unsere Flächen besitzen, bestimmt werden soll, bedarf es vor allen Dingen einer Erörterung über die Gestalt der Fläche in der Nähe eines reellen Wendepunktes. Denn Flächen mit singulären Punkten sind von den gewöhnlichen Zusammenhangsuntersuchungen ausgeschlossen, und man muss, wenn bei ihnen dennoch von einer Zusammenhangszahl gesprochen werden soll, eine besondere Festsetzung treffen. Eine Curve mit Wendetangente ist, als Classencurve aufgefasst, Uebergangsfall zwischen einer Curve, welche eine isolirte, und einer Curve, welche eine nicht isolirte reelle Doppeltangente besitzt (Fig. 10).

Der Zusammenhang der Fläche sinkt, wenn wir von der ersten Figur zur letzten fortschreiten, um zwei Einheiten; es scheint daher naturgemäss, der in der Mitte befindlichen Figur die mittlere Zahl beizulegen.

Allgemein: Es sei eine Classencurve mit w' reellen Wendetangenten gegeben. So lasse man dieselben durch kleine Aenderung der Constanten in Doppeltangenten übergehen. Von denselben mögen w_1' nicht

Fig. 10.



isolirt, w_2' isolirt sein ($w_1' + w_2' = w'$)*). Sodann bestimme man den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche, die zu der modificirten Curve gehört, und addire $w_1' - w_2'$. *Die dann erhaltene Zahl soll der Zusammenhang der ursprünglichen Fläche genannt werden.*

Bestimmen wir jetzt den Zusammenhang der „modificirten" Fläche, die im Ganzen $t'' + w_2'$ isolirte Doppeltangenten enthält. Zu dem Zwecke vergleichen wir sie mit der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, die sich ergiebt, wenn man, vermöge der Gleichung der Classencurve, eine der beiden Linien-Coordinaten als Function der anderen betrachtet und die complexen Werthe der letzteren über die $x + iy$-Ebene ausbreitet. Auf diese gewöhnliche Riemann'sche Fläche ist unsere im Allgemeinen eindeutig abgebildet. Eine Ausnahme verursachen nur die isolirten reellen Doppeltangenten, die ihrer ganzen Erstreckung nach auf unserer Fläche liegen, während ihnen auf der gew. Fläche je ein Punktepaar entspricht. Da nun die gewöhnliche Riemann'sche Fläche den Zusammenhang $2p$ aufweist, so erhält unsere „modificirte" Fläche, nach einem schon im § 1. besprochenen, Bd. VII, p. 554 aufgestellten Satze**), den Zusammenhang:

$$2p + 2w_2' + 2t'',$$

und also unsere ursprüngliche Fläche den Zusammenhang:

$$Z = 2p + w_1' + w_2' + 2t'' = 2p + w' + 2t''.$$

Zu eben dieser Formel würde man geführt, wenn man, ohne sich auf eine nähere Untersuchung der reellen Wendepunkte und ihres Einflusses auf den Zusammenhang einzulassen, einfach von dem Umstande ausginge, dass den nach ihrer ganzen Erstreckung auf unseren Flächen

---

*) Vielleicht giebt es Fälle, in denen eine solche Modification nicht möglich ist, ohne dass gleichzeitig andere Doppeltangenten verschwinden etc. In solchen Fällen reicht der Wortlaut des Textes nicht mehr aus; es wird aber leicht sein, die Darstellung des Textes dennoch zu verwerthen.

**) Derselbe lautet: Sind zwei Flächen im Allgemeinen eindeutig auf einander bezogen, doch so, dass die eine μ, die andere ν Fundamentalpunkte trägt, so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um μ, gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um ν.

liegenden reellen Wendetangenten auf der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche nur je ein Punkt entspricht, und dann den eben citirten Satz anwendete. Ein solches Verfahren wäre natürlich nicht gerechtfertigt, da der betr. Satz an der angeführten Stelle nur unter Voraussetzungen bewiesen ist, die hier nicht zutreffen (die Existenz singulärer Punkte blieb ausgeschlossen). Vielmehr hat man in der Uebereinstimmung nur eine Bestätigung dafür zu erblicken, dass die oben getroffene, die Wendepunkte betr. Festsetzung naturgemäss ist.

Wir werden nun in den folgenden beiden § versuchen, die jetzt für Z gewonnene Formel direct, ohne auf die gewöhnliche Riemann'sche Fläche zurückzugehen, aus der Gestalt der Curven n^{ter} Classe zu beweisen. Mir scheint diese Aufgabe besonders desshalb interessant, weil sie zeigt, dass wir die jedenfalls sehr mannigfaltigen Gestalten dieser Curven doch schon mit Hülfe der jetzt bekannten Sätze bis zu einem gewissen Grade beherrschen.

Inzwischen werde hier ein instructives Beispiel vorausgeschickt, in welchem sich die directe Abzählung unmittelbar gestaltet.

Es sei die Classe k der Curve und die Ordnung n derselben eine gerade Zahl:

$$k = 2\varkappa, \quad n = 2\nu.$$

Dann kann die Curve — und das soll hier vorausgesetzt werden — möglicherweise ohne jeden reellen Zug sein. Auf dem von uns festgehaltenen Standpunkte der Allgemeinheit sind von den Singularitäten-Anzahlen w', t', r', d' in diesem Falle gleich Null zu setzen, während t'', d', t''', d''' beliebige Werthe haben, die unter einander und mit ν und $\varkappa$ nur durch die Plücker'schen Formeln und durch die Relation:

$$\nu + t'' = \varkappa + d''$$

verbunden sind (in welche in diesem Falle die allgemeine

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$$

übergeht).

Betrachten wir jetzt die zugehörige Riemann'sche Fläche. Dieselbe überdeckt die ganze Ebene mit $\varkappa$ unbegrenzten Doppelblättern, die durch $d'' + \frac{1}{2}w''$ Doppelverzweigungspunkte mit einander verbunden sind. Wären diese Verzweigungspunkte nicht vorhanden, so käme als Zusammenhangszahl $-2(\varkappa-1)$. Denn jedes die ganze Ebene überdeckende Doppelblatt hat (wie die als Doppelfläche betrachtete Ebene selbst) den Zusammenhang Null, und für die Trennung der $\varkappa$ Bestandtheile von einander hat man $(\varkappa-1)$ mal (-2) in Anrechnung zu bringen. Diese Zahl $-2(\varkappa-1)$ wird dann durch jeden Verzweigungspunkt um eine Einheit, durch jeden Doppelverzweigungspunkt also um zwei Einheiten erhöht. Somit kommt

$$Z = -2(\varkappa-1) + 2d'' + w''.$$

Dies aber ist in der That gleich $2p+w'+2t''$, wie sich folgendermassen ergiebt. Zunächst ist

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - t - w = (2\varkappa-1)(\varkappa-1) - t' - t''' - w''.$$

und

$$w' = 0,$$

also

$$2p + w' + 2t'' = 2(\varkappa-1)(2\varkappa-1) - 2t''' - 2w''.$$

Dann aber giebt die Plücker'sche Formel

$$2\nu = 2\varkappa(2\varkappa-1) - 2t'' - 2t''' - 3w''.$$

Aus ihr folgt:

$$2p + w' + 2t'' = 2\nu - 2(2\varkappa-1) + 2t' + w''$$

und dieses setzt die angegebene Relation:

$$\nu + t'' = \varkappa + d''$$

unmittelbar in die gewünschte Gestalt um:

$$2p + w' + 2t'' = -2(\varkappa-1) + 2d'' + w''.$$

§ 5.

Directe Bestimmung der Zusammenhangszahl.

Die directe Begründung der Formel

$$Z = 2p + w' + 2t''$$

aus der Gestalt der Curve soll jetzt in folgender Weise geführt werden. Wir zeigen zunächst, dass man für jede Classe k Beispiele angeben kann, in denen die Formel richtig ist. Wir zeigen sodann, dass sie richtig bleibt, wenn man von der im Beispiele benutzten Curve zu einer beliebigen anderen Curve derselben Classe übergeht.

Die Wahl des anfänglichen Beispiels kann natürlich auf sehr mannigfaltige Weise geschehen; man könnte z. B. für ein gerades k die zuletzt betrachteten Curven wählen, welche keinen reellen Zug enthalten*). Da ich aber weiterhin verschiedene Sätze brauche, die ich in dem Aufsatze „über Singularitäten" zusammengestellt habe, so ziehe ich es vor, mich überhaupt genau an diesen Aufsatz anzuschliessen. Es sind nur die Betrachtungen, die dort für Ordnungscurven angestellt wurden, hier durchgängig dualistisch auf Classencurven zu übertragen.

Beginnen wir damit, die dort zu Grunde gelegten Beispiele (p. 204, 205) nach dualistischer Uebertragung für die hier vorliegende Fragestellung zu verwerthen.

Ist k gerade $= 2\varkappa$, so nehme man (p. 204) $\varkappa$ Ellipsen, deren jede mit jeder anderen vier reelle Tangenten gemein hat, und construire

*) In meiner ersten bez. Note (Erlanger Berichte 1874) hatte ich eine Curve benutzt, die in lauter einzelne Punkte zerfallen war.

aus ihnen eine allgemeine Curve der Classe $2\varkappa$, indem man bei jeder dieser Tangenten eins der beiden Segmente, in die sie durch ihre Berührungspunkte zerlegt wird, in zwei reelle Curvenzüge spaltet, während man das andere Segment verschwinden lässt. (Dies ist also dasselbe Verfahren, welches insbesondere für Curven vierter Classe im vorstehenden Aufsatze angewandt wurde und dort ausführlich erläutert ist.) Jede dieser Operationen, deren Anzahl $2\varkappa(\varkappa-1)$ ist, erhöht den Zusammenhang der ursprünglichen Riemann'schen Fläche um zwei Einheiten; derselbe wird also

$$Z = -2(\varkappa-1) + 4\varkappa(\varkappa-1) = (k-1)(k-2),$$

da das Aggregat der nicht verbundenen $\varkappa$ elliptischen Doppelblätter den Zusammenhang $-2(\varkappa-1)$ aufweist und bei dem Aenderungsprocesse keine Verzweigungen entstanden sind. — Der gefundene Werth von Z stimmt überein mit der allgemeinen Formel

$$Z = 2p + w' + 2t'',$$

insofern im Beispiele überhaupt keine Wendungen oder Doppeltangenten vorhanden sind, und also:

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2}, \quad w' = 0, \quad t'' = 0.$$

Ist k dagegen ungerade, so setze man dasselbe $= 2\varkappa + 3$ und zeichne, analog wie p. 205, $\varkappa$ Ellipsen und eine Curve dritter Classe. Das Aggregat der bez. zugehörigen Flächen hat als Zusammenhangszahl

$$2 - 2\varkappa = -2(\varkappa-1),$$

und, geht man nun zu einer allgemeinen Curve k^{ter} Classe über, indem die $2\varkappa(\varkappa-1)$ reellen Tangenten, die den Ellipsen zu zwei gemeinsam sind, und die $6\varkappa$ reellen Tangenten, welche gleichzeitig eine Ellipse und die Curve dritter Classe berühren, in reelle Curvenzüge spaltet, so kommt

$$Z = -2(\varkappa-1) + 4\varkappa(\varkappa-1) + 12\varkappa = (k-1)(k-2),$$

was wiederum stimmt.

Von diesen Beispielen ausgehend zeigen wir nun zunächst: *Die Formel*

$$Z = 2p + w' + 2t''$$

gilt für alle allgemeinen Classencurven, d. h. für solche, die keine Doppel- und Wendetangenten besitzen.

Zu dem Zwecke lassen wir die einzelne in Betracht kommende Curve, je nachdem k gerade oder ungerade, aus dem ersten oder zweiten der angegebenen Beispiele nach Anleitung von p. 200, 201 entstehen. Dann werden, allgemein zu reden, eine Anzahl einzelner Curven überschritten werden müssen, bei denen die Riemann'sche Fläche eine wesentliche Gestaltänderung erfährt, und es ist zu zeigen, dass trotz

der Aenderung die Zusammenhangszahl dieselbe geblieben ist. Die hier in Betracht zu ziehenden Vorkommnisse beziehen sich entweder darauf, dass eine Curve überschritten wird, bei der eine besondere Singularität auftritt, oder dass bei der betr. Curve die immer vorhandene Singularität ihre Bedeutung für die Riemann'sche Fläche wechselt. Mit Rücksicht auf die oben (§ 2.) gegebene Erörterung über den gestaltlichen Einfluss, den die Singularitäten der Curve auf deren Riemann'sche Fläche haben, und im Anschlusse an die Entwickelung der p. 201 – 203 zeigt sich, dass für jede der beiden Arten nur *eine* Möglichkeit in Betracht zu ziehen ist, nämlich bez.:

das Auftreten einer reellen, nicht isolirten oder isolirten Doppeltangente

und der Uebergangsprocess, der dem Verschwinden einer Einbuchtung (Ueber Singularitäten p. 202, 203) dualistisch entspricht und bei dem daher

ein nicht isolirter Doppelpunkt zum isolirten wird.

Der Einfluss, den diese Vorkommnisse auf die Gestalt der Riemann'schen Fläche und damit auf ihre Zusammenhangszahl haben, wurde aber schon in den früheren Aufsätzen, sowie in § 1., 2. des vorliegenden hinlänglich erörtert. Wenn eine nicht isolirte Doppeltangente entsteht, so zieht sich ein „Band" der betr. Riemann'schen Fläche in ein doppeltzählendes Segment einer geraden Linie zusammen und kommt so in Wegfall; hernach aber gestaltet sich das ergänzende Segment der betr. geraden Linie zu einem Bande um, und der Zusammenhang hat auf der einen Seite 2 verloren, um auf der anderen 2 zu gewinnen. — Das Entstehen der isolirten Doppeltangente beeinflusst den Zusammenhang nach § 1. überhaupt nicht. Denn es ist damit gleichbedeutend, dass man in der betr. Riemann'schen Fläche einen Rückkehrschnitt ausführt. Die Ränder dieses Rückkehrschnittes werden dann später nur in umgekehrter Weise zusammengefügt. — Endlich das zweite der angegebenen Vorkommnisse wurde p. 380 des Aufsatzes: „Ueber Integrale" ausführlich betrachtet; die bes. Voraussetzung, die dort gemacht ist: dass bloss Curven der vierten Classe zu untersuchen sind, beeinflusst offenbar nicht die Allgemeingültigkeit der dort gegebenen Entwickelung.

Damit ist der gewünschte Beweis bereits erbracht. Der Zusammenhang bleibt bei der allgemeinen Classencurve immer $2p + w' + 2t''$, oder besser, da $w' = 0$, $t'' = 0$, er bleibt $= 2p$.

Um den Beweis jetzt auf solche Curven, die Doppel- und Wendetangenten haben, auszudehnen, verfahren wir wie auf p. 206. Jede solche Curve kann aus einer unmittelbar benachbarten allgemeinen Classencurve abgeleitet werden. Das Geschlecht der letzteren sei $[p]$. So wird die zu untersuchende Curve ein Geschlecht haben:

$$p = [p] - t' - t' - t''' - w' - w'',$$

wo t', t'' etc. die immer fest gehaltene Bedeutung haben (p. 206). Der Zusammenhang der Fläche, die zu der allgemeinen Curve gehört, ist

$$[Z] = 2\,[p],$$

der Zusammenhang der zu untersuchenden Fläche soll werden

$$Z = 2p + w' + 2t'' = 2[p] - 2t' - 2t''' - w' - 2w'',$$

und es ist also zu zeigen, dass:

$$Z = [Z] - 2t' - 2t''' - w' - 2w''.$$

Mit anderen Worten; es ist zu zeigen:

Das Entstehen

einer nicht isolirten reellen Doppeltangente,
einer imaginären Doppeltangente,
einer reellen Wendung,
einer imaginären Wendung

erniedrigt den Zusammenhang bez. um 2, 2, 1, 2 *Einheiten.*

Dagegen führt das Entstehen einer isolirten reellen Doppeltangente keine Erniedrigung herbei.

Von diesen Sätzen können diejenigen als bewiesen gelten, welche sich auf die reellen Doppeltangenten beziehen. Auch der Einfluss der reellen Wendungen ist damit gegeben, denn sie sollen, nach der im vorigen § getroffenen Festsetzung, die Mitte halten zwischen den isolirten und den nicht isolirten reellen Doppeltangenten.

Was die imaginären Doppeltangenten und Wendetangenten betrifft, so zeigt der Satz 3) der p. 206:

Der reelle Punkt zweier conjugirt imaginärer Doppeltangenten absorbirt zwei, und der reelle Punkt zweier conjugirt imaginärer Wendetangenten absorbirt drei reelle isolirte Doppelpunkte.

Es rücken daher in diese reellen Punkte 2, bez. 3 Doppelverzweigungspunkte der Fläche zusammen, um (nach § 2.) sich im ersten Falle zu compensiren und sich im zweiten Falle auf nur einen Doppelverzweigungspunkt zu reduciren. Beidemal verliert also die Fläche zwei Doppelverzweigungspunkte und also sinkt der Zusammenhang um 4 Einheiten. Das macht für die einzelne imaginäre Doppeltangente oder Wendetangente 2 Einheiten, w. z. b.

Und hiermit ist die geforderte allgemeine Abzählung geleistet.

§ 6.

Complexe Curven.

Es wird hier am Platze sein, noch einige Worte über die Riemann'sche Fläche solcher Curven zu sagen, deren Gleichung complexe Coefficienten besitzt (p. 207). Eine solche Curve, von der Ordnung n, der

Classe k hat auf dem hier festgehaltenen Standpunkte der Allgemeinheit eine Anzahl (δ) reeller isolirter Punkte und eine Anzahl (τ) reeller isolirter Tangenten. Sie besitzt sodann w'' imaginäre Wendetangenten, t''' imaginäre Doppeltangenten (und analog imaginäre Spitzen resp. Rückkehrpunkte).

Man vereinige nun die complexe Curve mit der ihr conjugirten. So entsteht eine neue Curve, deren Gleichung *reelle* Coefficienten hat, von der Ordnung $2n$, der Classe $2k$, mit $2w''$ imaginären Wendetangenten etc. und δ isolirten reellen Doppelpunkten, τ isolirten reellen Doppeltangenten. Bei ihrer Riemann'schen Fläche kennen wir den Zusammenhang und die Verzweigung der Blätter. Fügen wir hinzu, dass zusammengehörige Blätter dieser Fläche nothwendig auf die beiden verschiedenen complexen Curven Bezug haben, so erhalten wir bez. der einzelnen complexen Curve folgenden Aufschluss:

Die zugehörige Riemann'sche Fläche überdeckt die Ebene mit k einfachen Blättern, und hat die τ reellen isolirten Tangenten zu einfachen Randcurven.

Die Blätter sind durch $\delta + w''$ einfache Verzweigungspunkte verbunden, entsprechend den δ isolirten reellen Punkten und den w'' reellen Punkten der w'' imaginären Wendetangenten.

Der Zusammenhang der Fläche ist

$$z = 2p + \tau,$$

unter p das Geschlecht verstanden.

Was die Ableitung der letzteren Gleichung angeht, so verfahre man etwa folgendermassen. Die reelle Curve, welche durch Vereinigung der beiden complexen entsteht, hat $2w''$ Wendetangenten und $2t''' + k^2$ Doppeltangenten (in die die k^2 gemeinsamen Tangenten der beiden complexen Curven eingerechnet sind). Ihr Geschlecht ist also:

$$P = \frac{2k-1 \cdot 2k-2}{2} - 2w'' - 2t''' - k^2.$$

Andererseits ist

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - w'' - t''',$$

also

$$P = 2p - 1.$$

Der Zusammenhang der Fläche, welche zur reellen Curve gehört, muss aber nach den früheren Abzählungen sein:

$$Z = 2P + 2\tau.$$

Andererseits ist, da sich diese Fläche aus zwei Bestandtheilen vom Zusammenhange z zusammensetzt,

$$Z = 2z - 2.$$

Hieraus folgt durch Elimination das gewünschte Resultat:

$$z = 2p + \tau.$$

Als Beispiele betrachte man die Riemann'schen Flächen, die zum einzelnen complexen Punkte oder zum complexen Kegelschnitte gehören.

Im ersteren Falle ist $k = 1$, $\tau = 1$, $\delta = 0$. Die Fläche besteht aus einem einfachen Blatte, welches, die ganze Ebene überdeckend, von beiden Seiten an die reelle gerade Linie hinanreicht, welche den complexen Punkt mit seinem conjugirten verbindet, und diese Linie zur Randcurve hat. Wir haben eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche.

Bei complexen Kegelschnitten haben wir, nach p. 207, drei Arten zu unterscheiden. Ist kein reeller Punkt und also auch keine reelle Tangente vorhanden, so besteht die betr. Fläche aus einem nullfach zusammenhängenden, die ganze Ebene überdeckenden Doppelblatte. Aber es können 2 oder 4 reelle Punkte vorhanden sein, dann finden sich auch 2 oder 4 reelle Tangenten. Man erhält eine Fläche mit 2 oder 4 Randcurven, die 2 oder 4 Verzweigungspunkte besitzt und demnach doppelt oder vierfach zusammenhängend ist.

§ 7.

Bedeutung der reellen Curvenzüge für die Riemann'sche Fläche.

Zum Schluss will ich noch einige lose Bemerkungen zufügen, die sich wieder auf reelle Curven beziehen und die Bedeutung erläutern, welche die reellen Züge dieser Curven für die zugehörige Riemann'sche Fläche haben. Es müssen diese Sätze von fundamentaler Wichtigkeit sein, wenn man es unternimmt, bei beliebigen reellen Curven den Verlauf der Abel'schen Integrale in der Weise zu untersuchen, wie ich es im vorstehenden Aufsatze für die Curven vierter Classe begonnen habe. Dabei will ich der Einfachheit wegen hier die Annahme festhalten, dass keine reellen Wendetangenten oder reelle isolirte Doppeltangenten vorhanden sind; eine Ergänzung, welche auf Curven Bezug nimmt, bei denen diese Singularitäten auftreten, lässt sich leicht zufügen.

Zunächst sage ich: *Wenn eine Curve C reelle Züge besitzt und man zerschneidet die zugehörige Riemann'sche Fläche längs* $(C-1)$ *derselben, so zerfällt die Fläche noch nicht.* Denn wenn sie zerfiele, so könnte das nur so geschehen, dass sich zwei zusammengehörige (complex conjugirte) Bestandtheile bildeten. Dieselben werden dann aber nothwendig in dem noch unzerschnittenen, letzten Zuge zusammenhängen.

Es folgt hieraus zunächst (natürlich unter der Beschränkung, die wir uns hier im Interesse der Einfachheit der Darstellung auferlegt haben) der Harnack'sche Satz (diese Annalen X, p. 190): *dass eine Curve vom Geschlechte p nicht mehr als* $(p+1)$ *Züge haben kann.* Hätte sie nämlich $(p+2)$ Züge, so würde ein Zerschneiden längs $(p+1)$ derselben noch kein Zerfallen der Fläche herbeiführen, während man doch auf

einer $2p$-fach zusammenhängenden Fläche nicht mehr als p nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann.

Andererseits ergiebt sich für die Curven, deren Zügezahl

$$C > 0, \quad C < p + 1$$

eine bemerkenswerthe Eintheilung in zwei Arten.

Die Curven der ersten Art haben die Eigenschaft, dass ihre Riemann'sche Fläche, längs der C Züge zerschnitten, zerfällt; bei den Curven der zweiten Art findet ein solches Zerfallen nicht statt. Die von Hrn. Harnack betrachteten Curven mit $(p+1)$ Zügen mag man der ersten Art, die Curven, welche überhaupt keine reellen Züge besitzen (§ 4.) der zweiten Art zurechnen.

Ich erinnere in dieser Beziehung an die früher betrachteten Curven dritter und vierter Classe.

Die zweitheilige Curve dritter Classe gehört zur ersten, die eintheilige zur zweiten Art.

Bei den Curven vierter Classe ohne Doppeltangente gehören zur ersten Art: die viertheilige und die Gürtelcurve, zur zweiten Art die übrigen: die drei-, zwei-, eintheilige und die imaginäre.

Die Curven derselben Art zeigen eine grosse Reihe gemeinsamer Eigenschaften. Z. B. kann bei den Curven der ersten Art durch allmähliches Aendern der Constanten niemals eine isolirte reelle Doppeltangente neu entstehen, um dann einen $(C+1)^{\text{ten}}$ Curvenzug zu liefern; während die Curven der zweiten Art in dieser Richtung nicht beschränkt sind. Die Curven der zweiten Art sind, sozusagen, noch entwickelungsfähig, während es die Curven der ersten Art nicht sind. Doch soll hier auf diese Verhältnisse noch nicht näher eingegangen werden.

München, im April 1876.

Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1876.)

1. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des Sciences), von Hansen (in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Kometen, p. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Komet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine *vollständige* Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Kometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Kometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Kometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 *verflossenen Zeitraums zu untersuchen.*

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\cdots\right)=$$

$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\cdots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\cdots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und

materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Intrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen oder sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> *Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität* (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) *und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.*

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres* und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Zur Construction eines äquianharmonischen Systems.

Von H. Schröter in Breslau.

1. Wenn man auf einem geraden Träger L drei beliebige Punkte $a\,b\,c$ annimmt und eine cyclische Vertauschung derselben $b\,c\,a$ bildet, so lassen sich die beiden Reihen projectivisch setzen:

$$a\,b\,c \,\overline{\wedge}\, b\,c\,a,$$

indem diese drei Paare entsprechender Elemente: a und b, b und c, c und a gerade zur Bestimmung der projectivischen Beziehung ausreichen.

Sind $i\,i_1$ die Doppelelemente dieser beiden aufeinanderliegenden projectivischen Punktreihen, so nennt man $a\,b\,c\,i\,i_1$ ein *System von fünf äquianharmonischen Elementen*, und zwar $a\,b\,c$ die drei cyclisch-vertauschbaren, $i\,i_1$ die Doppelelemente des Systems*); denn es zeigt sich, dass auch die noch übrige dritte cyclische Vertauschung $c\,a\,b$, mit einer der beiden andern projectivisch gesetzt, zu denselben Doppelelementen führt. Aus der Projectivität der beiden Reihen:

$$a\,b\,c\,i\,i_1 \,\overline{\wedge}\, b\,c\,a\,i\,i_1$$

lesen wir nämlich auch ab:

$$c\,a\,b\,i\,i_1 \,\overline{\wedge}\, a\,b\,c\,i\,i_1.$$

Um die Doppelelemente $i\,i_1$ zu ermitteln, ziehen wir aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(a\,b\,i\,i_1) = (b\,c\,i\,i_1)$$

die Folgerung:

$$(b\,a\,i_1\,i) = (b\,c\,i\,i_1)$$

und erkennen hieraus, dass es ein hyperbolisches Punktsystem giebt, von welchem b ein Asymptotenpunkt, c und a ein Paar, i und i_1 ein zweites Paar conjugirter Punkte sind. Der andere Asymptotenpunkt β dieses hyperbolischen Punktsystems ist der vierte harmonische, zu b zugeordnete Punkt, während a und c das andere Paar zugeordneter Punkte sind, d. h.

$$(a\,c\,b\,\beta) = -1,$$

*) Wir verweisen hinsichtlich der Bezeichnung und Ausdrucksweise durchgehends auf: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Theil: „Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften", zweite Auflage, Leipzig 1876.

und das gesuchte Paar ii_1 muss $b\beta$ harmonisch trennen. In derselben Weise können wir die vierten harmonischen Punkte α und γ ermitteln:

$$(bca\alpha) = -1,$$
$$(abc\gamma) = -1;$$

dann müssen ii_1 alle drei Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ harmonisch trennen, oder mit andern Worten: ii_1 sind die Doppelpunkte eines Punktsystems, von welchem $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ drei Paare conjugirter Punkte sind. Dieses Punktsystem ist *elliptisch* und die Doppelpunkte ii_1 sind daher conjugirt-imaginär, sobald abc als reelle Punkte angenommen werden. Das durch die reell construirten Punktpaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ bestimmte Punktsystem (Involution) vertritt aber die imaginären Doppelelemente ii_1.

Wenn wir die angegebene Construction der Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma$ wirklich ausführen, so lässt sich dieselbe so modificiren, dass sie auch noch bestehen bleibt, sobald von den angenommenen Punkten $a\,b\,c$ nur einer, a, reell ist, die beiden andern, b und c, conjugirt-imaginär sind, d. h. durch ein gegebenes elliptisches Punktsystem vertreten werden. In diesem Falle zeigt es sich, dass ii_1 reelle Punkte werden und es ergiebt sich die Construction derselben. Auch umgekehrt müssen, wenn ii_1 und a reell angenommen werden, die beiden cyclisch-vertauschbaren Elemente b und c conjugirt-imaginär sein, und es lässt sich das sie vertretende elliptische Punktsystem reell construiren. Die möglichst einfache wirkliche Ausführung dieser Constructionen ist der Zweck nachfolgender Zeilen; sie sind überall da von Nutzen, wo ein äquianharmonisches System auftritt, z. B. bei den Wendepunkten der allgemeinen Curve dritter Ordnung.

2. Gehen wir von der Annahme dreier reeller Punkte abc auf dem geraden Träger L aus und construiren zuerst den vierten harmonischen Punkt α, so dass

$$(bca\alpha) = -1$$

wird; zu diesem Behufe ziehen wir durch a einen beliebigen Strahl, nehmen auf demselben zwei Punkte S und P beliebig an und bestimmen die Schnittpunkte:

$$(Sb,\ Pc) = \mathfrak{b}, \quad (Sc,\ Pb) = \mathfrak{c},$$

dann ist der Schnittpunkt:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ L) = a \qquad \text{(Fig. 1.)}.$$

Bezeichnen wir noch die Verbindungslinie:

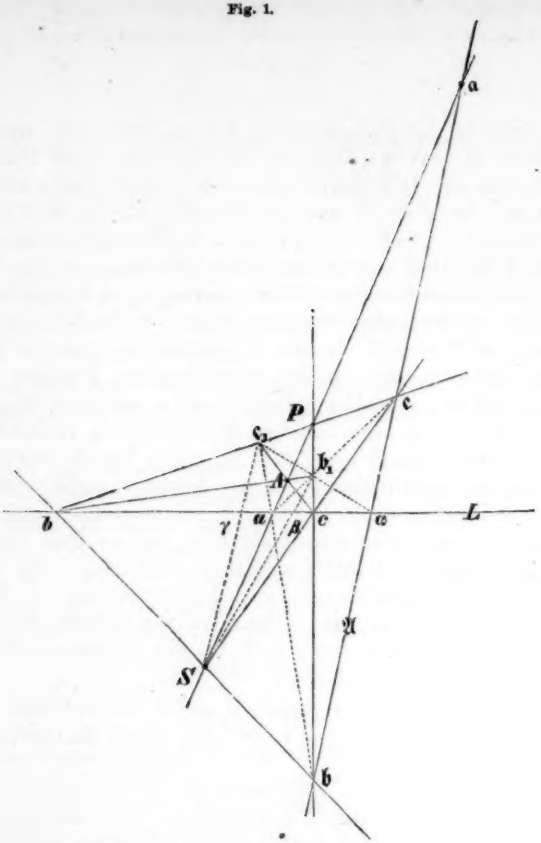
$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{A}$$

und den Schnittpunkt:

$$(PS,\ \mathfrak{A}) = \mathfrak{a};$$

es lässt sich alsdann der vierte harmonische Punkt β so construiren, dass wir auf dem durch b gehenden Strahle die beiden Punkte P und $\mathfrak{c}$ wählen, die Schnittpunkte aufsuchen:

Fig. 1.



$$(Pa,\ \mathfrak{c}c) = S; \quad (Pc,\ \mathfrak{c}a) = \mathfrak{b}_1$$

und den Schnittpunkt:

$$(S\mathfrak{b}_1,\ L) = \beta$$

erhalten; ebenso lässt sich der vierte harmonische Punkt γ dadurch construiren, dass wir auf dem durch c gehenden Strahle die beiden Punkte P und $\mathfrak{b}$ wählen, die Schnittpunkte aufsuchen:

$$(Pa,\ \mathfrak{b}b) = S; \quad (Pb,\ \mathfrak{b}a) = \mathfrak{c}_1$$

und den Schnittpunkt:

$$(S\mathfrak{c}_1,\ L) = \gamma$$

erhalten. Aus dieser Construction folgt, dass sowohl

$$Pb\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1,$$

als auch

$$P c \mathfrak{b} \mathfrak{b}_1$$

je vier harmonische Punkte sind und hieraus ergiebt sich einerseits die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(P b \mathfrak{c} \mathfrak{c}_1) = (P c \mathfrak{b} \mathfrak{b}_1),$$

woraus wir schliessen, dass die drei Punkte:

$$\mathfrak{b}_1 \; \mathfrak{c}_1 \; a$$

auf einer Geraden liegen, und andererseits die Projectivität der Strahlbüschel:

$$c (P b \mathfrak{c} \mathfrak{c}_1) \overline{\wedge} \; b (P c \mathfrak{b} \mathfrak{b}_1),$$

woraus wir schliessen, dass die drei Punkte:

$$P \; S \text{ und der Schnittpunkt } (b \mathfrak{b}_1, \; c \mathfrak{c}_1) = A$$

auf einer Geraden liegen.

Dieser Punkt A ist für unsere Construction von besonderer Bedeutung. Die vier harmonischen Strahlen, welche von A nach den vier Punkten:

$$P \; b \; \mathfrak{c}_1 \; \mathfrak{c}$$

hingehen, treffen nämlich den Träger L in den vier harmonischen Punkten:

$$a \; b \; c \; \gamma,$$

und die vier Strahlen, welche von A nach den vier Punkten:

$$P \; c \; \mathfrak{b}_1 \; \mathfrak{b}$$

hingehen, treffen den Träger L in den vier harmonischen Punkten:

$$a \; c \; b \; \beta;$$

folglich bestimmen die beiden Strahlenpaare:

$$Ab, \; A\mathfrak{b}; \quad Ac, \; A\mathfrak{c}$$

dasjenige Strahlsystem, dessen Asymptoten die gesuchten Doppelpunkte ii_1 auf dem Träger L ausschneiden.

Diesem Strahlsysteme gehört auch das Strahlenpaar:

$$Aa, \; A\mathfrak{a}$$

an, weil $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ und $P\mathfrak{a}$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, welche, mit dem Punkte A verbunden, bekanntlich drei Strahlenpaare eines Strahlsystems liefern.

Zugleich bemerken wir, dass die vier Strahlen, welche von c nach den vier harmonischen Punkten:

$$b \; P \; \mathfrak{c} \; \mathfrak{c}_1$$

hingehen, die Gerade PS in vier neuen harmonischen Punkten treffen, also

$$(aPSA) = -1$$

ist, wodurch der Punkt A unabhängig von b und c bestimmt wird; ferner sind wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $PSbc$ die vier Punkte $P \; S \; a \; \mathfrak{a}$ ebenfalls harmonisch gelegen, d. h.

$$(PSa\mathfrak{a}) = -1$$

und die Gerade $\mathfrak{A}$, welche vorhin durch die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bestimmt wurde, kann jetzt auch durch die Punkte α und $\mathfrak{a}$ bestimmt werden.

3. Um die vorige Construction, welche wesentlich von den als reell angenommenen Punkten b und c und den aus ihnen abgeleiteten Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ abhängt, von der Realität dieser Punktpaare unabhängig zu machen, denken wir uns einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ hergestellt, welcher in b und c die Tangenten bS und cS hat und durch den Punkt P geht. Dadurch ist $\mathfrak{K}^{(2)}$ gerade bestimmt, und in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist PS die Polare von α, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ die Polare von $\mathfrak{b}$, sowie $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ die Polare von $\mathfrak{c}$; folglich ist A der Pol der Geraden $\mathfrak{A}$ und das Strahlsystem, welches dem Punkte A in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört, ist identisch mit dem oben ermittelten Strahlsysteme, welches durch die Strahlenpaare:

$$Ab,\ A\mathfrak{b};\quad Ac,\ A\mathfrak{c}$$

bestimmt wird und dessen Asymptoten den Träger L in den gesuchten Doppelpunkten ii_1 des äquianharmonischen Systems treffen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist dem Dreieck Pbc umschrieben; die Tangenten in den Ecken treffen die Gegenseiten des Dreiecks in den Punkten $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ α, welche auf der Geraden $\mathfrak{A}$ liegen, und A ist der Pol der Geraden $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$*). Sobald nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ bekannt ist, können wir die Punkte b und c vertreten lassen durch das Punktsystem, welches der Geraden L in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört und dessen Doppelpunkte (reell oder conjugirt-imaginär) b und c sind; dem Punkte A gehört aber in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein bestimmtes Strahlsystem zu, dessen Asymptoten auf L die Doppelpunkte ii_1 des äquianharmonischen Systems bestimmen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist vollständig und eindeutig bestimmt durch folgende Bedingungen:

1) S und L sollen Pol und Polare in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein.
2) Ein bestimmtes auf L gegebenes Punktsystem (x, ξ), dessen Doppelpunkte bc reell oder conjugirt-imaginär sein können, d. h. ein auf L gegebenes Punktsystem (x, ξ), welches hyperbolisch oder elliptisch sein kann, soll der Geraden L in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehören.
3) Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ soll durch den Punkt P gehen.

Es kommt jetzt darauf an, das dem Punkte A zugehörige Strahlsystem zu construiren in Bezug auf den durch diese drei Bedingungen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$.

Der Punkt A selbst ist vorhin (**2.**) völlig unabhängig von b und c, nur durch die bekannten Punkte SPa ermittelt worden, ebenso auch der Punkt $\mathfrak{a}$. Ferner ist α der dem Punkte a conjugirte Punkt in dem

*) Vergl. Math. Annalen von Clebsch und Neumann Bd. II, S. 562.

gegebenen Punktsystem (x, ξ), weil $a\alpha$ harmonisch getrennt werden durch die Doppelpunkte b und c, folglich ist auch:

$$(\alpha\mathfrak{a}) = \mathfrak{A}$$

als die Polare von A in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ bekannt.

Nimmt man ein beliebiges Punktpaar $x\xi$ des auf dem Träger L gegebenen Punktsystems heraus, so ist die Polare von x die Gerade $S\xi$, die Polare von A die Gerade $\mathfrak{A}$, folglich der Schnittpunkt:

$$(S\xi, \mathfrak{A}) = \mathfrak{x}_1$$

der Pol von Ax; verbindet man ihn mit A, so sind Ax und $A\mathfrak{x}_1$ ein Paar conjugirter Strahlen des gesuchten Strahlsystems $[A]$; sodann sind auch $A\alpha$ und $A\mathfrak{a}$ ein Paar conjugirter Strahlen dieses Strahlsystems. Dasselbe ist schon durch diese beiden Strahlenpaare vollständig bestimmt. Bezeichnen wir den Schnittpunkt:

$$(A\mathfrak{x}_1, L) = \mathfrak{x},$$

so bestimmen die beiden Punktpaare:

$$a\alpha, \quad x\mathfrak{x}$$

das Punktsystem auf dem Träger L, dessen Doppelpunkte die gesuchten Doppelelemente ii_1 des äquianharmonischen Systems sind, während die Punktpaare:

$$a\alpha, \quad x\xi$$

das Punktsystem bestimmen, dessen Doppelpunkte bc mit a zusammen die cyclisch-vertauschbaren Elemente des äquianharmonischen Systems sind.

4. Dadurch ist die Construction unabhängig gemacht von der Realität der Punkte b und c, und wir können auch den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ganz bei Seite lassen, indem wir Aufgabe und Auflösung so formuliren:

Aufgabe.

Gegeben sind auf dem geraden Träger L ein Punkt a und ein Punktsystem (x, ξ), dessen Doppelpunkte b und c reell oder conjugirt-imaginär sein können, je nachdem es hyperbolisch oder elliptisch ist. Es sollen $a\,b\,c$ als die drei cyclisch-vertauschbaren Elemente eines äquianharmonischen Systems aufgefasst und die Doppelelemente ii_1 desselben gefunden werden.

Auflösung.

Man bestimme auf dem Träger L den dem Punkte a conjugirten Punkt α in dem gegebenen Punktsysteme (x, ξ). Durch a ziehe man einen beliebigen Strahl und nehme auf demselben zwei Punkte S und P beliebig an; man bestimme den zu a zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{a}$, so dass:

$$(SPa\mathfrak{a}) = -1$$

ist, und den zu S zugeordneten vierten harmonischen Punkt A, so dass

$$(aPSA) = -1$$

ist; man bezeichne die Verbindungslinie:

$$(a\mathfrak{a}) = \mathfrak{A}$$

und nehme irgend ein Paar conjugirter Punkte $x\xi$ des gegebenen Punktsystems heraus, bestimme die Schnittpunkte:

$$(S\xi,\ \mathfrak{A}) = \mathfrak{x}_1,$$
$$(A\mathfrak{x}_1,\ L) = \mathfrak{x},$$

dann bestimmen die beiden Punktpaare:

$$x\mathfrak{x} \text{ und } a\alpha$$

ein neues Punktsystem auf dem Träger L, dessen Asymptotenpunkte die gesuchten Doppelelemente ii_1 sind.

Wir können die Construction abkürzen und allein auf den Träger L als Operationsfeld beschränken, wenn wir von $\mathfrak{x}_1$ aus die vier harmonischen Punkte $S\ P\ a\ \mathfrak{a}$ auf den Träger L projiciren; dadurch erhalten wir vier Punkte $\xi\ p\ a\ \alpha$, für welche das Doppelverhältniss:

$$(a\ \alpha\ \xi\ p) = -1$$

ist und hierdurch wird der Punkt p als vierter harmonischer zu $a\ \alpha\ \xi$ bestimmt; durch p finden wir dann den Punkt $\mathfrak{x}$ aus dem Doppelverhältnisse:

$$(ap\xi\mathfrak{x}) = -1$$

als vierten harmonischen Punkt zu $ap\xi$.

Ebenso wie das Punktsystem (x, ξ), dessen Asymptotenpunkte bc sind, gerade bestimmt wird durch die beiden Punktpaare:

$$x\xi \text{ und } a\alpha,$$

wird das neue Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, dessen Asymptotenpunkte die äquianharmonischen Doppelelemente ii_1 sind, durch die beiden Punktpaare:

$$x\mathfrak{x} \text{ und } a\alpha$$

gerade bestimmt und die Construction lässt sich jetzt so aussprechen:

Man bestimme den zu a conjugirten Punkt α in dem auf L gegebenen Punktsystem, nehme ein beliebiges Paar conjugirter Punkte $x\xi$ desselben heraus, bestimme den vierten harmonischen Punkt p durch die Bedingung:

$$(a\alpha\xi p) = -1$$

und den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$ durch die Bedingung:

$$(ap\xi\mathfrak{x}) = -1,$$

dann bestimmen die beiden Punktpaare:

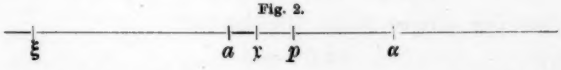
$$a\alpha \text{ und } x\mathfrak{x}$$

dasjenige Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte die gesuchten äquianharmonischen Doppelelemente ii_1 sind.

5. Diese Construction lässt an Einfachheit nichts mehr zu wünschen übrig; auch kann sie leicht allein mittelst des Lineals ausgeführt werden, indem man die vierten harmonischen Punkte p und $\mathfrak{x}$ in bekannter Weise durch das vollständige Viereck construirt.

Die Construction giebt nun auch Auskunft über die Realität der Punkte ii_1, welche von der Realität der Punkte bc abhängt. Mag das gegebene Punktsystem (x, ξ) hyperbolisch oder elliptisch sein, immerhin darf man von dem willkürlich herausgenommenen Punktpaar $x\xi$ den einen Punkt ξ als ausserhalb der Strecke $a\alpha$ gelegen annehmen. Dann muss in Folge der Construction p zwischen $a\alpha$ liegen, folglich a fortiori ξ auch ausserhalb der Strecke ap, mithin nach der Construction $\mathfrak{x}$ zwischen ap und a fortiori auch zwischen $a\alpha$. Wir sehen also, dass die Punkte in der Weise zu einander liegen:

Fig. 2.



d. h. wenn ξ ausserhalb $a\alpha$ angenommen wird, so liegt $\mathfrak{x}$ zwischen $a\alpha$, also $a\alpha$ wird durch ξ und $\mathfrak{x}$ getrennt. Unterscheiden wir nun die beiden Fälle des hyperbolischen und elliptischen Punktsystems:

1) Wenn das gegebene Punktsystem (x, ξ) hyperbolisch ist und ξ wird ausserhalb $a\alpha$ angenommen, so muss auch x ausserhalb $a\alpha$ liegen; da aber $\mathfrak{x}$ zwischen $a\alpha$ liegt, so werden die Punkte $a\alpha$ und $x\mathfrak{x}$ durch einander getrennt. Das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, dessen Doppelpunkte ii_1 sind, muss also elliptisch sein, d. h. ii_1 sind conjugirt-imaginär.

2) Wenn das gegebene Punktsystem (x, ξ) elliptisch ist und ξ wird ausserhalb $a\alpha$ angenommen, so muss x zwischen $a\alpha$ liegen; da aber auch $\mathfrak{x}$ zwischen $a\alpha$ liegt, so werden die Paare $a\alpha$ und $x\mathfrak{x}$ nicht durch einander getrennt. Das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, dessen Doppelpunkte ii_1 sind, muss also hyperbolisch sein, d. h. ii_1 sind reell. Das gewonnene Resultat lässt sich so aussprechen:

Wenn bei einem äquianharmonischen System von den drei cyclisch-vertauschbaren Elementen a b c alle drei reell sind, so sind die Doppelelemente ii_1 conjugirt-imaginär; wenn dagegen nur eines (a) reell und die beiden andern (b und c) conjugirt-imaginär sind, so sind die Doppelelemente ii_1 reell.

In beiden Fällen liefert die oben angegebene Construction das reelle Punktsystem, welches die Punkte ii_1 vertritt.

Diese Construction gestattet auch die Umkehrung der Frage, d. h. Wie sind b und c zu finden, wenn ii_1 gegeben sind, oder besser: Wie kann das Punktsystem (x, ξ) gefunden werden, wenn das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ gegeben ist?

Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir die Abhängigkeit der

Punkte ξ und χ von einander ohne Hülfe des vermittelnden Punktes p auszudrücken suchen.

Aus der harmonischen Beziehung:

$$(a\alpha\xi p) = -1$$

folgt bekanntlich:

$$(a\xi\alpha p) = 2,$$

und aus der harmonischen Beziehung:

$$(ap\xi\chi) = -1$$

folgt in gleicher Weise:

$$(a\xi p\chi) = 2.$$

Da aber für irgend fünf Punkte eines geraden Trägers immer die Möbius'sche Relation zwischen den Doppelverhältnissen gilt:

$$(a\xi\alpha p)\ \ (a\xi p\chi)\cdot(a\xi\chi\alpha) = 1,$$

so folgt aus den vorigen beiden Gleichungen:

$$(a\xi\alpha\chi) = 4$$

und hieraus:

$$(a\alpha\xi\chi) = -3.$$

Diese Beziehung lässt unmittelbar erkennen, wie die Punkte ξ und χ von einander abhängen und wie einer aus dem andern gefunden werden kann.

Während wir vorhin vermittelst dieser Beziehung:

$$(a\alpha\xi\chi) = -3$$

aus dem gegebenen Punkte ξ den gesuchten Punkt χ gefunden haben, können wir jetzt umgekehrt, indem wir dieselbe Beziehung so schreiben:

$$(a\alpha\chi\xi) = -3,$$

aus dem gegebenen Punkte χ den gesuchten Punkt ξ finden: Wir bestimmen zu $\alpha a\chi$ den vierten harmonischen Punkt π durch die Bedingung:

$$(a\alpha\chi\pi) = -1$$

und zu $\alpha\pi\chi$ den vierten harmonischen Punkt ξ durch die Bedingung:

$$(\alpha\pi\chi\xi) = -1,$$

dann ist ξ der gesuchte Punkt. Dies lässt sich auch so aussprechen:

Wenn das Punktsystem (x, χ), dessen Doppelpunkte ii_1 sind, und der Punkt a gegeben sind, so construire man den dem Punkte a conjugirten Punkt α in dem gegebenen Punktsysteme (x, χ) oder den vierten harmonischen Punkt α zu $ii_1 a$. Betrachtet man alsdann αii_1 als die drei cyclisch-vertauschbaren Elemente eines neuen äquianharmonischen Systems, so sind die Doppelelemente desselben die gesuchten Punkte b und c, so dass für die drei cyclisch-vertauschbaren Elemente abc eines äquianharmonischen Systems die gegebenen Punkte ii_1 die Doppelelemente werden.

Dies lässt sich in Form eines Satzes so aussprechen:

Wenn bei einem äquianharmonischen System abc die drei cyclisch-vertauschbaren Elemente und ii_1 die Doppelelemente sind und man bestimmt den vierten harmonischen Punkt α durch die Bedingung:

$$(ii_1a\alpha) = -1,$$

so sind αii_1 die drei cyclisch-vertauschbaren Elemente eines neuen äquianharmonischen Systems, dessen Doppelelemente b und c sind).*

6. Die Abhängigkeit der Punkte ξ und $\mathfrak{x}$ von einander war durch die Bedingung gegeben:

$$(a\alpha\xi\mathfrak{x}) = -3,$$

woraus leicht zu erkennen ist, dass, wenn wir den Punkt x auf dem Träger L verändern, die beiden von ihm abhängenden Punkte $\mathfrak{x}$ und ξ zwei projectivische Punktreihen beschreiben, deren Doppelpunkte a und α sind.

Es lässt sich aber aus dieser Gleichung die Richtigkeit der obigen Construction leicht a posteriori durch Rechnung bestätigen. Sind nämlich b und c die Doppelpunkte des gegebenen Punktsystems (x, ξ), welches bestimmt wird durch die beiden Punktpaare:

$$x\xi \text{ und } a\alpha,$$

so haben wir die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(a\alpha b\xi) = (\alpha abx). \tag{1}$$

Sind ferner ii_1 die Doppelpunkte des Punktsystems, welches bestimmt wird durch die beiden Punktpaare:

$$x\mathfrak{x} \text{ und } a\alpha,$$

so gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(a\alpha\mathfrak{x}i) = (\alpha axi). \tag{2}$$

Endlich haben wir für die Abhängigkeit der Punkte ξ und $\mathfrak{x}$ von einander die Bedingung:

$$(a\alpha\xi\mathfrak{x}) = -3. \tag{3}$$

Das Product der drei Gleichungen (1), (2), (3) giebt nach dem Möbius'schen Satze:

$$(a\alpha bi) = -3 \cdot (\alpha abi)$$

oder

$$(a\alpha bi)^2 = -3.$$

Der Werth des Doppelverhältnisses $(a\alpha bi)$ ist daher entweder $+\sqrt{-3}$ oder $-\sqrt{-3}$; wählen wir das positive Vorzeichen der Wurzelgrösse:

$$(a\alpha bi) = +\sqrt{-3},$$

so folgt, da

---

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, Seite 179.

$$(a\alpha cb) = -1$$

ist,

$$(a\alpha ci) = -\sqrt{-3}.$$

Die Veränderung des Vorzeichens der Wurzelgrösse kommt also überein mit der Vertauschung der Doppelpunkte b und c, oder auch mit der Vertauschung der Doppelpunkte ii_1; denn da

$$(a\alpha ii_1) = -1,$$

so wird auch:

$$(a\alpha bi_1) = -\sqrt{-3}$$

und endlich:

$$(a\alpha ci_1) = +\sqrt{-3}.$$

Aus den Werthen dieser Doppelverhältnisse ergeben sich weitere; denn aus:

$$(a\alpha bi) = +\sqrt{-3}$$

folgt:

$$(ab\alpha i) = 1 - \sqrt{-3}$$

und aus:

$$(a\alpha bc) = -1$$

folgt:

$$(abc\alpha) = \tfrac{1}{2},$$

mithin:

$$(abci) = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

und ebenso:

$$(abci_1) = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Es sind also die beiden Doppelverhältnisse:

$(abci)$ und $(abci_1)$

die beiden imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit d. h. die Werthe eines äquianharmonischen Doppelverhältnisses.

In ähnlicher Weise folgt:

$$(ii_1ab) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$(ii_1ac) = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

es sind also die beiden Doppelverhältnisse:

(ii_1ab) und (ii_1ac)

die beiden imaginären cubischen Wurzeln der positiven Einheit.

Breslau, den 25. April 1876.

Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Ich hatte ursprünglich die Absicht, meiner Abhandlung: *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln**) eine andere folgen zu lassen, welche nach einigen Richtungen hin die dortigen Forschungen weiter fortführen sollte. Dieses Vorhaben wurde mir inzwischen durch die Länge, welche jene erste Veröffentlichung annahm, verleidet, und ich habe, statt noch eine zweite Abhandlung zu schreiben, vorgezogen, Einzelnes aus der Fortsetzung meiner Untersuchungen in kurzem Auszug in jene Mittheilung während des Druckes einzuschalten (Art. 40 von „Dies Resultat" an und Schlussbetrachtungen), Anderes aber, wovon ich mir noch gewisse Ergebnisse versprach, habe ich gar nicht erwähnt. Letzteres hat meine Erwartungen getäuscht, ohne deshalb der Mittheilung ganz unwerth zu erscheinen, und Ersteres bedarf in einem Punkte einer richtigstellenden Erklärung, so dass ich es am Ende doch für angemessen halte, hiermit wenigstens einige Zusätze zu der in Rede stehenden Abhandlung zu machen.

Ueber einen Zusatz zum zweiten Hauptsatz, im Falle seine beiden Seiten divergiren.

Aus der Theorie der Fourier'schen Reihen ist bekannt, dass, wenn eine Function $f(x)$ für einen Werth x des Arguments durch eine solche Reihe darstellbar sein soll, der Limes ($h = \infty$) von:

$$\int_{-(\pi+x)}^{\pi-x} d\alpha\, f(x+\alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad h = \frac{2n+1}{2}, \quad n \text{ eine ganze Zahl,}$$

*) Abh. der K. Bayer. Akademie der W. II. Cl., XII. Bd., II. Abth.

endlich und bestimmt sein muss, umgekehrt aber, dass, wenn dieser Limes endlich und bestimmt ist, er stets den Werth $\pi f(x)$ hat und gleich der Summe der Fourier'schen Reihe ist. Weiter ist bekannt, dass die Untersuchung vorstehenden Integrals, falls $-\pi < x < +\pi$, auf die des folgenden:

$$\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} d\alpha f(x+\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

hinausläuft, wo α_1 und α_2 beliebig wenig von Null verschieden sind. Diesem Integral lässt sich zunächst die Form geben:

$$\int_0^{\alpha_2} d\alpha f(x+\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \int_0^{\alpha_1} d\alpha f(x-\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Bei der Willkürlichkeit von α_1 und α_2 kann man diese Grössen einander gleichsetzen, und somit handelt es sich schliesslich um die Untersuchung des Limes $h = \infty$ des Integrals:

$$\int_0^{a} d\alpha \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Diese Untersuchung vereinfacht sich dadurch, dass der Grenzwerth vorstehenden Integrals derselbe ist, wenn der Factor $\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ fortgelassen wird. Oder genauer:

Es sind die Grenzwerthe der Integrale:

$$(1)\quad \int_0^{a} d\alpha f(x\pm\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \int_0^{a} d\alpha \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

und dieser:

$$(2)\quad \int_0^{a} d\alpha f(x\pm\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}, \qquad \int_0^{a} d\alpha \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

gleichzeitig endlich und bestimmt, oder sie sind es nicht. Und, wenn sie endlich und bestimmt sind, so sind die Grenzwerthe der ersteren (1) *resp. gleich denen der zweiten* (2).

Ich habe diesen Satz noch nirgends in allen Theilen bewiesen, sondern nur nach Bedürfniss besondere Fälle davon, und will das jetzt nachholen. Es handelt sich nämlich im Grunde um eine nicht überflüssige Vervollständigung des zweiten Hauptsatzes:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha)\, \varphi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h),$$

der von mir gründlich discutirt worden ist nur für den Fall, wo der von a unabhängige $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h)$ endlich und bestimmt ist.

Setzt man zunächst im Anschluss an den speciellen Fall der Fourier'schen Reihe:

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \varphi(\alpha, h) = f(x \pm \alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \text{ oder } = \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h\alpha}{\alpha},$$

so sind, wie ich gezeigt, die Grenzwerthe der Integrale (2) von a unabhängig, und, wenn sie endlich und bestimmt sind, so sind sie resp. gleich denen der Integrale (1). Aber auch die Grenzwerthe der Integrale (1) können nicht endlich und bestimmt sein, ohne denen der Integrale (2) gleich zu sein. Denn von a sind die Grenzwerthe der Integrale (1) jedenfalls unabhängig, wenn die Grenzwerthe der Integrale (2) es sind, wie mit Hülfe des ersten Hauptsatzes leicht zu zeigen. Setzt man alsdann z. B.

$$f(\alpha) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}, \quad \varphi(\alpha, h) = f(x \pm \alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

so folgt aus dem ersten Hauptsatz in der That:

$$\lim \int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha} = \lim \int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Da nun die Grenzwerthe der Integrale (1) und (2) in der Beziehung stehen, dass wenn die der einen Gruppe endlich und bestimmt sind, die der anderen es ebenfalls sind, und die Grenzwerthe der Gruppen (1) und (2) dann völlig übereinstimmen, so folgt, *dass die Grenzwerthe* (2) *nicht divergiren können, ohne dass die Grenzwerthe* (1) *auch divergent wären.* Das Umgekehrte ist schon aus dem Früheren klar, da, wenn die Grenzwerthe (2) convergent sind, sie gleich den Grenzwerthen (1) sind, wenn also die Grenzwerthe (1) divergent sind, so können die Grenzwerthe (2) nicht convergent sein.

Dehnen wir diese Betrachtung auf den allgemeinen zweiten Hauptsatz aus, so hat man den Satz und Zusatz: Wenn $f(\alpha)$ den Be-

dingungen des zweiten Hauptsatzes genügt und $\lim \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h)$ endlich, bestimmt und von a unabhängig ist, so hat man:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \frac{f(\alpha)}{f(0)}\, \varphi(\alpha, h) = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h).$$

Dies war der Satz. Weiter, wenn $\frac{1}{f(\alpha)} = f_1(\alpha)$ den Bedingungen des zweiten Hauptsatzes genügt und $\lim \int_0^a d\alpha\, \frac{f(\alpha)}{f(0)}\, \varphi(\alpha, h)$ endlich, bestimmt und von a unabhängig ist, so ist:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h) = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \frac{f(\alpha)}{f(0)}\, \varphi(\alpha, h).$$

Daraus folgt der Zusatz:

Wenn der Limes:

$$\lim \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h)$$

nicht endlich und bestimmt ist, und $f(\alpha)^{-1}$ die Bedingungen des zweiten Hauptsatzes erfüllt, so ist auch der Limes:

$$\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h)$$

nicht endlich und bestimmt.

Dieser Schluss zeigt, dass unter gewissen Bedingungen für $f(\alpha)$, diese Function unter dem Integralzeichen die Convergenz oder Divergenz des Integralgrenzwerths nicht beeinflusst.

Ich werde ein ähnliches Resultat auf directem Wege ableiten, wobei eine genauere Vorstellung von der Art der gleichzeitigen Divergenz der Grenzwerthe:

$$\lim \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h), \quad \lim \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \varphi(\alpha, h)$$

gewonnen wird.

Ich nehme zuerst an, der Limes:

$$\lim \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

sei endlich. Man hat, $f'(\alpha)$ endlich vorausgesetzt:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h) = f(0)\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h) + \int_0^a d\alpha f'(\alpha)\int_\alpha^a d\beta f(\beta,h).$$

Das zweite Integral rechts hat den Limes Null. Denn setzt man:

$$\int_0^a = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^a,$$

und nimmt h schon so gross an, dass, für $a \geqq \varepsilon$, $\int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h)$ numerisch kleiner als die beliebig kleine Grösse μ sei, so ist:

$$\int_\varepsilon^a d\alpha f'(\alpha)\int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h) = \int_\varepsilon^a d\alpha f'(\alpha)\left\{\mu + \int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h)\right\} - \mu\big(f(a)-f(\varepsilon)\big),$$

und vor das Integral rechts kann man einen mittleren Werth von $f'(\alpha)$ nehmen. Hieraus folgt:

Falls $\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$ *endlich bleibt, während* h *unendlich wird, sinkt der Unterschied:*

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h) - f(0)\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$$

bei unbegrenzt wachsendem h *unter jede Grenze. D. i.*

$$\lim\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h) \text{ und } \lim\int_0^a d\alpha\,\frac{f(\alpha)}{f(0)}\varphi(\alpha,h)$$

haben, wenn $f(\alpha)$ *obige partielle Integration gestattet, dieselben Unbestimmtheitsgrenzen.*

Nehmen wir jetzt an, dass $\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$ bei unendlich werdendem h nicht zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Wenn die Function

$$\lambda(h) = \int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h),$$

welche wir stetig annehmen wollen, mit ins Unbegrenzte wachsendem h schliesslich dauernd oder unaufhörlich wiederkehrend jede Grenze numerisch überschreitet, so lässt sich stets eine nirgend abnehmende Function $\varrho(h)$ angeben, von solcher Beschaffenheit, dass

$$\frac{\lambda(h)}{\varrho(h)}$$

zwar nicht unendlich wird, aber auch nicht *unter* jede Grenze sinkt. Denn nimmt man irgend einen Werth h_1 an, so muss es stets einen Werth $h' > h_1$ geben, der Art, dass $\lambda(h') > \lambda(h)$ für alle Werthe $h < h'$. Lassen wir h' dieselbe Rolle spielen, wie eben h_1, so erhalten wir einen Werth $h'' > h'$, für den $\lambda(h'') > \lambda(h)$ für alle Werthe $h < h''$ u. s. f. Die Werthe $\lambda(h')$, $\lambda(h'')$, etc. können wir durch eine nirgend abnehmende Function $\varrho(h)$ verbinden, die stets $\geq \lambda(h)$ bleibt.

Da nun die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)}, \quad \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)}$$

nach dem Obigen, wenn der Limes des zweiten unter einer endlichen Grenze bleibt, gleichzeitig nicht unter jede Grenze sinken, so werden sie, mit $\varrho(h)$ multiplicirt, gleichzeitig dauernd oder unaufhörlich wiederkehrend über jede Grenze steigen. Dies ist derselbe Satz wie oben, nur mit einer anderen Bedingung für $f(\alpha)$, die vielleicht nach gewissen Richtungen weiter, nach anderen enger ist, jedenfalls aber ihren Nutzen hat.

Die gleichzeitige Divergenz der Grenzwerthe der Integrale

$$\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h), \quad \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \varphi(\alpha, h)$$

ist noch genauerer Bestimmungen fähig. Man hat die Beziehung:

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)} + \text{einer Grösse, die für } h = \infty \text{ verschwindet.}$$

Nach der Definition sind die *grössten* Werthe, die

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)}$$

unaufhörlich wiederkehrend annimmt, einander gleich. Also werden Functionen $P(h)$ und $P_1(h)$, die den Integralen:

$$\varrho(h) \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h),$$

$$\varrho(h) \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha, h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \varphi(\alpha, h)$$

in derselben Weise zugehören wie $\varrho(h)$ zu $\int_0^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$, einander gleich und gleich $\varrho(h)$ sein, d. h. die unaufhörlich wiederkehrend grössten Werthe der Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h), \quad \int_0^a d\alpha\, \frac{f(\alpha)}{f(0)}\, \varphi(\alpha, h)$$

werden gleich rasch unendlich.

Ich verfolge diese feineren Verhältnisse hier nicht weiter, weil dazu gewisse neue bei jeder Unbestimmtheit massgebende Functionen erst beschrieben werden müssten, die ich Unbestimmtheitsenveloppen nenne, und deren Theorie ich nächstens mittheilen werde.

Hinsichtlich der Fourier'schen Reiheu ist unser Ergebniss also, *dass die Convergenz und Divergenz des Limes* $h = \infty$ *des Integrals*

$$\int_0^a d\alpha\, \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\}\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

über Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Reihenentwickelung ausnahmslos entscheidet. Ich werde alsbald von diesem Satze Gebrauch machen, um eine merkwürdige Art der Convergenz und eine neue Art der Divergenz der Fourier'schen Reihen zu zeigen, bedarf indessen dazu einiger Formeln über asymptotische Formen von Integralgrenzwerthen, die ich voranschicken will.

Ueber einige asymptotische Grenzwerthe von Integralen.

Wenn das Integral

$$\int e^{iz}\, \psi(z)\, dz$$

über einen den positiven Quadranten umlaufenden Weg genommen wird, so ergiebt sich die Formel:

$$\int_0^\infty e^{ix}\, \psi(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, \psi(ix)\, i\, dx,$$

welche gilt, wenn $\psi(z)$ in jenem Quadranten stetig und eindeutig ist, und $r\psi(re^{i\varphi})$ mit r nicht so stark wie eine Potenz von e^r unendlich wird. In dieser Formel setze man $\psi(x) = \frac{1}{x+\gamma}$, alsdann findet man durch Zerlegung in den reellen und imaginären Theil:

$$\int_0^\gamma d\alpha\, \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - G\cos\gamma - H\sin\gamma,$$

$$\int_\gamma^\infty d\alpha\, \frac{\cos\alpha}{\alpha} = \quad - G\sin\gamma + H\cos\gamma,$$

wo

$$G = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma\alpha}\,d\alpha}{1+\alpha^2}, \quad H = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\gamma\alpha}\,d\alpha}{1+\alpha^2},$$

und daher:

$$G = \frac{u_1}{\gamma}, \quad H = \frac{u_2}{\gamma^2},$$

wo u_1 und u_2, während γ unendlich wird, nur zunehmend den Werth Eins erhalten.

Dies liefert die asymptotischen Werthe:

$$\int_0^\gamma d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - u_1 \frac{\cos\gamma}{\gamma} - u_2 \frac{\sin\gamma}{\gamma^2},$$

$$\int_\gamma^\infty d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} = \quad - u_1 \frac{\sin\gamma}{\gamma} + u_2 \frac{\cos\gamma}{\gamma^2},$$

wo

$$u_1 \overline{\overline{\infty}}\, u_2 \overline{\overline{\infty}}\, 1.$$

Uns genügen die asymptotischen Formen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\gamma d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{U}{\gamma}, \\ \displaystyle\int_0^\infty d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} = \frac{U_1}{\gamma}, \end{cases}$$

in denen U, U_1 zwischen -1 und $+1$ schwanken, wenn γ unendlich wird.

Um den asymptotischen Werth des Integrals

$$J = \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha}$$

zu finden, unterscheiden wir die Annahmen $h_1 \geqq h_2$, machen zunächst diese: $h_1 > h_2$, und setzen voraus, dass $h_1 - h_2$ mit h_1 und h_2 unendlich wird. Man findet leicht:

$$J = \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\int_{a(h_1-h_2)}^{a(h_1+h_2)} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\int_{a(h_1-h_2)}^{a(h_1+h_2)} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha}.$$

Wir nehmen ε so klein an, dass wir das erste Integral rechts vernachlässigen können, und dass das zweite (man nimmt einen mittleren Werth von $\cos\alpha$ vor das Integral) gleich $\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{h_2}{h_1}}{1-\frac{h_2}{h_1}}$ wird. Auf das dritte wendet man die Formeln (I) an. Somit folgt:

$$\text{(II)}\quad \int_0^a d\alpha \frac{\sin \alpha h_1 \sin \alpha h_2}{\alpha} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\frac{h_2}{h_1}}{1-\frac{h_2}{h_1}} + \frac{U'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U''}{2a(h_1+h_2)}.$$

wo, während h_1 und h_2 unendlich werden, U' und U'' zwischen den Grenzen ± 1 schwanken.

Beispielsweise folgt daraus:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \frac{\sin rh\alpha \sin sh\alpha}{\alpha} = \int_0^\infty d\alpha \frac{\sin r\alpha \sin s\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} \log \frac{r+s}{r-s}, \quad r > s.$$

Aehnlich ergiebt sich für $h_1 > h_2$ und Unendlichwerden der Differenz $h_1 - h_2$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \cos h_2\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{U'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U''}{2a(h_1+h_2)}, \\ \int_0^a d\alpha \frac{\cos h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha} = -\frac{U_1'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U_1''}{2a(h_1+h_2)}, \end{cases}$$

mit den Sonderergebnissen:

$$\int_0^\infty d\alpha \frac{\sin r\alpha \cos s\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty d\alpha \frac{\cos r\alpha \sin s\alpha}{\alpha} = 0,$$

wo die Grössen U, wenn h_1 und h_2 unendlich werden, ebenfalls zwischen $+1$ und -1 schwanken.

Der Fall $h_1 = h_2 = h$ führt auf folgende Formeln:
Man setzt:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin^2 \alpha h}{\alpha} = \int_0^\varepsilon d \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} + \int_\varepsilon^{ah} d\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha},$$

und führt unter dem zweiten Integral rechts den $\cos 2\alpha$ ein. Dies giebt:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin^2 \alpha h}{\alpha} = \frac{1}{2} \log (ah) - \frac{1}{2} \log \varepsilon - \frac{1}{2} \int_{2\varepsilon}^{2ah} d\alpha \frac{\cos \alpha}{\alpha} + \int_0^\varepsilon d\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha},$$

wodurch die asymptotische Form genügend festgestellt ist. Denn setzt man z. B. $\varepsilon = 1$, so bleibt das Integral $\int_{2\varepsilon}^{2ah} d\alpha \frac{\cos \alpha}{\alpha}$, wie durch Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes zu erkennen, numerisch kleiner

als $1 + \frac{1}{ah}$, das letzte Integral rechts kleiner als 1. Nimmt man also $ah > 1$ an, so hat man:

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^a d\alpha \frac{\sin^2 \alpha h}{\alpha} = \frac{1}{2} \log (ah) + V,$$

wo $V^2 < 4$.

Endlich folgt daraus wegen:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin h\alpha \cos h\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} \int_0^{2ah} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

dieser asymptotische Werth:

$$\text{(V)} \qquad \int_0^a d\alpha \frac{\sin h\alpha \sin h(\alpha + c)}{\alpha} = \frac{1}{2} \cos hc \log ah + \cos hc \cdot V + \frac{\sin hc}{2} \int_0^{2ah} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

wo wieder $V^2 < 4$.

Ueber Darstellbarkeit durch Fourier'sche Reihen von Functionen, die durchweg unendlichviele Maxima haben.

Dies vorausgeschickt sei $f(x)$ eine Reihe der Form

$$f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$$

in der die $\varkappa$ eine positive convergente Zahlenreihe vorstellen. Man denke sich die Grössen h_1, h_2 etc. derart, dass $h = \frac{2n+1}{2}$ bei seinem Wachsthum ihnen successive gleich wird. Nun sei $h = h_m$, alsdann hat man:

$$\int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha) \frac{\sin \alpha h_m}{\alpha} = \pm \sum_{p=1}^{p=m-1} \varkappa_p \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_p (\alpha \pm x) \sin h_m \alpha}{\alpha}$$

$$\pm \varkappa_m \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_m (\alpha \pm x) \sin h_m \alpha}{\alpha} \pm \sum_{p=m+1}^{p=\infty} \varkappa_p \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_p (\alpha \pm x) \sin h_m \alpha}{\alpha}.$$

Es liegt nun nahe, um eine nicht darstellbare Function $f(x)$ zu erhalten, $\varkappa_p$ und h_p so zu wählen, dass, wenn h unendlich wird, das mittlere Integral ebenfalls unendlich wird, während die Summen an seinen beiden Seiten endlich bleiben. Nach Formel (V) wird das mittlere Integral:

$$\varkappa_m \left\{ \frac{1}{2} \cos h_m x \log ah_m + \text{einer Grösse, die endlich bleibt, wenn } h_m \text{ unendlich wird} \right\}.$$

Soll vorstehendes Product mit m unendlich werden, oder doch nicht verschwinden, so muss sein:

$$\varkappa_p l h_p \gtrsim 1,$$

wozu die weitere Bedingung kommt

$$\varkappa_p \prec \frac{\tau(p)}{p},$$

in der $\frac{\tau(p)}{p}$ die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz vorstellt (Untersuchungen etc. p. XV Anm. und p. 45). Die beiden Bedingungen:

$$\varkappa_p \prec \frac{\tau(p)}{p}, \quad \varkappa_p l h_p \gtrsim 1$$

reichen für die Divergenz des Limes $h = \infty$ von:

$$\int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

aus, da, wie ein Blick auf die asymptotischen Formen III lehrt, die Summe rechts vom mittleren Integral Null, die Summe links $\frac{\pi}{2} f(x)$ zur Grenze hat, weil aus $l h_p \gtrsim \frac{p}{\tau(p)}$, also $l h_p \succ p$ jedenfalls folgt $h_p - h_{p-1} \succ 1$, da dies schon aus $h_p \succ p$ folgen würde.

Bildet man dagegen mit $f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$ das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h_m \alpha}{\alpha}$$

und theilt es wie oben in drei Theile, so wird der mittlere:

$$\varkappa_m \int_0^a d\alpha \{\sin h_m(x+\alpha) + \sin h_m(x-\alpha)\} \frac{\sin h_m \alpha}{\alpha}$$

$$= \varkappa_m \cos h_m x \int_0^a d\alpha \frac{\cos h_m \alpha \sin h_m \alpha}{\alpha} = \frac{\varkappa_m}{2} \cos h_m x \int_0^{2\alpha h_m} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

und verschwindet für $h_m = \infty$, während der erste Theil $\pi f(x)$ zur Grenze hat und der dritte ebenfalls Null.

Es folgt hieraus, dass die Function

$$f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$$

unter den Bedingungen $\varkappa_p \prec \frac{\tau(p)}{p}$, $\varkappa_p l h_p \gtrsim 1$ für die $\varkappa$ und h einen divergenten Limes:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

und einen gegen $\pi f(x)$ convergenten Limes

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left\{ f(x+\alpha) + f(x-\alpha) \right\} \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

ergiebt. Mithin ist die Function $f(x)$ für jeden Werth von x durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar, indem die Divergenz der Grenzwerthe von

$$\int_0^a d\alpha\, f(x+\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha\, f(x-\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

sich aufhebt.

Aber man kann, indem man eine Function aus Strecken der Function $f(x)$ und anderer Functionen zusammensetzt, jene so herstellen, dass sie, wenngleich durchweg endlich und stetig, in beliebig vielen Punkten durch Fourier'sche Reihen nicht convergent entwickelbar ist. Es sei z. B. eine Function $\varphi(x)$ gleich $f(x_1)$ für $x < x_1$ und gleich $f(x)$ für $x \geq x_1$. Um sie durch die Fourier'sche Formel darzustellen, bedürfte es der Untersuchung, ob dies möglich ist, und es würde sich zeigen, dass es für $x = x_1$ nicht möglich ist. Wir können sie aber durch andere darstellende Integrale ausdrücken. Es ist z. B.

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \varphi(\alpha) h e^{-h^2(\alpha-x)^2},$$

also

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty} \left\{ f(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} d\alpha\, h e^{-h^2(\alpha-x)^2} + \int_{x_1}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha) h e^{-h^2(\alpha-x)^2} \right\}$$

$$= \lim_{h=\infty} \left\{ f(x_1) \int_{-\infty}^{h(x_1-x)} d\alpha\, e^{-\alpha^2} + \int_{h(x_1-x)}^{\infty} d\alpha f\left(x + \frac{\alpha}{h}\right) e^{-\alpha^2} \right\}.$$

Diese Function ist also für $x = x_1$ durch Fourier'sche Reihen nicht darstellbar.

Von besonderem Interesse ist der Fall $x_1 = 0$, wo also:

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-hx}^{\infty} d\alpha f\left(x + \frac{\alpha}{h}\right) e^{-\alpha^2}.$$

Fragt man nämlich nach der Function $\frac{1}{\varrho(x)}$, mit der man $f(x_1) - f(x)$ multipliciren muss, damit $\frac{f(x_1) - f(x)}{\varrho(x)}$ für $x = x_1$ weder Null noch unendlich werde, so wird $\varrho(x)$ offenbar am raschesten Null werden für

$x_1 = 0$, und wenn $\varrho(x)$ successive die $x = 0$ nächstgelegenen *Minima* von $\varkappa_1 \sin h_1 x$, $\varkappa_2 \sin h_2 x$, $\cdots$ verbindet, weil diese Minima von $x=0$ entfernter sind, als die einem anderen Werth x nächstgelegenen von diesem anderen Werth entfernt sind. Die $x=0$ nächstgelegenen Minima von $\varkappa_1 \sin h_1 x$, $\varkappa_2 \sin h_2 x$, $\cdots$ sind bestimmt durch $h_p x = \frac{3\pi}{2}$. Man hat also:

$$\varkappa_p l h_p \gtrsim 1, \quad h_p x = \frac{3\pi}{2}, \quad \varrho(x) = \varkappa_p.$$

Daraus folgt:

$$\varrho(x) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{x}}.$$

Diese Bedingung für die Divergenz einer Function, die für $x > 0$ Null ist, für $x \geq 0$ gleich $f(x)$ ist, stimmt überein mit der (Untersuchungen etc. p. 86 und 87) für $\varrho(x)$ aufgestellten Bedingung.

Bemerkungen zu den vorstehenden Ergebnissen.

Ich verband einen ganz anderen Zweck mit der Untersuchung auf ihre Darstellbarkeit durch Fourier'sche Reihen einer Function:

$$F(x) = \varkappa_1 \varphi_1(x) \sin h_1 x + \varkappa_2 \varphi_2(x) \sin h_2 x + \cdots,$$

von der die eben betrachtete $f(x)$ ein specieller Fall ist. Es handelte sich für mich um die Frage: *Wenn es zweifellos durchweg endliche, stetige Functionen giebt, die in einzelnen Punkten oder sogar in Punkten, die in jedem kleinsten Intervall vorkommen, nicht darstellbar sind: giebt es wohl auch durchweg endliche und stetige Functionen, die in keinem Punkte darstellbar sind?*

Ich bin nicht so glücklich gewesen, diese Frage zu erledigen. Mit der angeführten Form $F(x)$ habe ich keine solche nirgend darstellbare Functionen zusammensetzen können. Ja eigentlich habe ich meine Bemühungen nur deshalb aufgegeben, weil mir schliesslich die *Möglichkeit* derartiger Functionen nicht mehr einleuchten wollte. Denn der Grenzwerth eines der Integrale

$$\int_0^a d\alpha f(x+\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha f(x-\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

wird divergent, wenn bei dem Wachsthum von h immer genügend Zeichenwechsel von $\sin \alpha h$ durch $f(x \pm \alpha)$ aufgehoben werden, und wenn dies für eines der Integrale der Fall ist, und die hierzu erforderliche sinusartige Beschaffenheit von $f(x)$ erstreckt sich auch nur um ein Kleines an beiden Seiten von x, so wird die Divergenz des einen Integrals durch die des anderen stets aufgehoben, welchem Umstand es zu verdanken ist, dass ungemein viel mehr Functionen durch Fourier'sche Reihen

darstellbar sind, als man dies bei Betrachtung nur eines jener Integrale erwarten sollte. In gesonderten Punkten kann die sinusartige Beschaffenheit von $f(x)$ unterbrochen werden, aber in allen Punkten — nun ich kann es mir eben nicht denken. Indessen täuschen dergleichen allgemeine Betrachtungen bisweilen, und so ist es auch durchaus nicht meine Absicht hier eine *Behauptung* aufzustellen, sondern nur meine Erfahrungen und Ansichten mitzutheilen.

Noch einen Punkt will ich schliesslich hier zur Sprache bringen, in Bezug auf welchen ich nachträglich meine Behauptung etwas genauer begrenzen will.

Ich habe (Untersuchungen etc. p. 86 und 87) gezeigt*), dass bei Functionen, die ausser in der beliebig kleinen Umgebung des Punktes $x=0$ nicht unendlich viele Maxima haben, die Darstellbarkeit für diesen Punkt erst aufhören kann, wenn der Function die Form $\varrho(x)\,\varphi(x)$ sich geben lässt, wo $\varrho(x) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{x}}$ und $\varphi(x)$ für $x=0$ nicht verschwindet. Dergleichen Functionen sind thatsächlich unter Umständen nicht darstellbar. Die Frage ist eben nur, ob die Darstellbarkeit nicht für kleinere Nullen von $\varrho(x)$ schon aufhört. Ich habe wiederum gezeigt, dass für $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$, wo

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\,l_2\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}} \succ \tau(\alpha) \succ \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\,l_2\frac{1}{\alpha}\cdots\left(l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}},\ \mu \text{ beliebig klein},$$

die Function *stets* darstellbar ist. Es handelt sich also um die infinitäre Lücke:

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}} \succ \varrho(\alpha) \succ \tau(\alpha).$$

Die Ausdehnung der Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ auf Functionen, die durchweg unendlich viele Maxima haben, oder gar nach Art gewisser integrirbarer Functionen durchweg unstetig sind, ist es, welche ich nicht in befriedigender Weise ausser Zweifel zu setzen vermag. Zwar widerspricht ihr die obige Betrachtung der Function $\varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$ keineswegs, da sie vielmehr dieselbe Grenze ergiebt. Der allgemeine Beweis aber, den ich nachträglich mittheilen wollte, und der auf einer idealen Zusammenschiebung der Stellen ohne Zeichenwechsel beruht, will diese Functionen, die doch lediglich Geschöpfe der Analysis sind,

*) Ich habe mich an dieser während des Druckes eingeschalteten Stelle etwas kurz fassen müssen, indessen wird das Gesagte wohl genügen.

einer geometrischen Anschauungsweise unterwerfen, der sie allerdings schwer sich fügen werden, die daher berechtigten Zweifeln begegnen könnte, und die mir selbst von Tag zu Tag bedenklicher wird, so dass ich vorziehe, hiermit die Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ ausdrücklich nur für die Functionen $f(x)$, die ausser in der Umgebung von $x = 0$ nicht unendlich viele Maxima haben, oder durch trigonometrische Reihen mit unbedingt convergenten Coefficienten darstellbar sind, zu behaupten*).

Tübingen, Mai 1876.

---

*) Da die Functionen der Form $\varrho(\alpha)\psi(\alpha)$, wo $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ nicht verschwindet, und $\varrho(\alpha) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ ist, nachweislich für $\alpha = 0$ manchmal nicht darstellbar sind, so ist also nur zu zeigen, dass sie für $\varrho(\alpha) \prec \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ darstellbar sind, was darauf hinausläuft, zu beweisen, dass $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha l\frac{1}{\alpha}} \sin h\alpha = 0$, falls $\varphi(0) = 0$. Es scheint aber, dass ein analytischer Beweis dieses Satzes Schwierigkeiten derselben Ordnung bietet, wie die Untersuchung des Integrals $\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \sin h\alpha$, wiewohl man meinen könnte, wegen des Logarithmus im Nenner, in viel vortheilhafterer Lage zu sein. Jedenfalls ist durch meine Untersuchungen gegenwärtig das Interesse der Theorie von diesem Integral in jenes verlegt. Ich habe aber nicht die Absicht mich weiter damit zu beschäftigen.

Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

On appelle *ordinaires* les singularités que présente une surface représentée par une équation ponctuelle générale, et celles que présente une surface représentée par une équation tangentielle générale. Les relations qui ont lieu entre les nombres de ces singularités, et qui jouent dans la théorie des surfaces le même rôle que les formules de Plücker dans la théorie des courbes planes, sont trouvées, à une près, par M. Salmon*). Celle qui restait a été trouvée plus tard par M. Cayley**), qui étendait en même temps la théorie par l'introduction de plusieurs singularités extraordinaires (celles qui sont désignées, dans ce qui suit, par B, j et χ et deux cas particuliers des points coniques qu'il appelle „cnicnodes“ et „offpoints“, ainsi que les singularités réciproques). J'ai indiqué ensuite sans démonstration — au commencement d'un mémoire, dont le but principal était d'exposer d'autres recherches***) — l'extension des formules de M. Salmon à des surfaces présentant des points coniques plus généraux.

Voilà une brève indication des travaux qui ont conduit les relations dont nous allons nous occuper à leur état actuel, sur lequel on peut consulter la nouvelle (3me) édition de l'excellente *„Geometry of three Dimensions“* de M. Salmon†).

Le *premier* but du travail que je présente ici a été une *révision* des termes de quelques-unes des formules qui dépendent de singularités *extraordinaires*. J'ai été excité à cette révision par quelques doutes,

*) Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 23. — Voir aussi les deux premières éditions de *„Geometry of three Dimensions“*.

**) *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces.* Philosophical Transactions 1869. Un supplément de ce mémoire se trouve dans les Phil. Trans. de 1871.

***) *Sur les droites multiples des surfaces.* Mathematische Annalen t. IV.

†) On peut aussi consulter la nouvelle édition allemande, due à M. Fiedler, du même livre.

qui s'étaient levées dans moi immédiatement après la publication de mon mémoire que je viens de citer, et qui me faisaient déclarer dans une note additionnelle*), que je n'osais appliquer une partie des formules — celles qu'on déduit en regardant la surface comme lieu de points et qui sont remplacées ici (dans le n° 3.) par les formules (13)—(18) — à des surfaces douées des singularités désignées, dans ce qui suit, par j', χ', η' et ζ', ni non plus les formules réciproques ((13′)—(18′)) à des surfaces douées des singularités j, χ, η et ζ**). En effet, dans ma propre démonstration — non publiée — je n'avais pas observé que les définitions de ces singularités, qui se rapportent à la surface regardée comme lieu de points, amènent en général certaines singularités tangentielles auxquelles il faut avoir égard dans les équations (13′)—(18′), et que les définitions des singularités j', χ', η' et ζ' amènent certaines singularités ponctuelles. Les démonstrations de M. Cayley***) ne me semblaient pas être à l'abri de cette même reproche, en même temps que la détermination de coëfficients au moyen des surfaces cubiques me semblait incertaine, parce que les singularités ne se présentent pas là dans leur forme la plus générale. Mes doutes se confirmaient par une nouvelle recherche qui me montrait que le coëfficient du terme χ devait être injuste, du moins dans une des équations†).

En retournant à ces recherches j'ai trouvé que les coëfficients des termes j et j' sont justes dans toutes les formules; mais quant aux autres singularités dont je viens de parler mes doutes se sont justifiées. J'ai trouvé, par exemple, que chacun des χ' plans-clos (voir, dans ce qui suit, le n° 28.) contient *en général* un, et chacun des B' plans biponctuels deux points triples à un seul plan tangent où passent quatre branches de la courbe cuspidale. Ces points singuliers donnent lieu aux termes $8\chi' + 16B'$ de notre équation (15), et aux termes $6(-6\chi' - 12B')$ de notre équation (18), et ils donneraient lieu à d'autres nouveaux termes dans l'équation de M. Cayley à laquelle nous avons substitué l'équation (19).

---

*) *Note sur la théorie des surfaces réciproques.* Mathematische Annalen t. IV, p. 636. — Dans cette note j'ai démontré aussi, par le principe de correspondance, une formule qui peut remplacer, dans le système de relations, celle de M. Cayley dont j'ai parlé, et que j'y substituerai aussi dans le présent mémoire (mon équation (19)).

**) Mes doutes s'étendaient aussi aux points B que je regardais comme des points coniques où $\eta = 1$, et aux plans B'.

***) Aussi M. Cayley ne prétend pas à développer complètement, dans le mémoire cité, la théorie des surfaces réciproques.

†) *J'avais tort* en disant que les coëfficients de j étaient incompatibles aux valeurs des nombres de singularités d'une surface quartique à une conique double (voir le n° 70. du présent travail).

Certes M. Cayley ne neglige pas entièrement ces points: il les représente par le nombre ϑ de points de singularité inexpliquée (*points of unexplained singularity*). Chacun de nos points triples, que nous regardons comme faisant partie des singularités désignées par χ' et B', est représenté par 8 de ces points. Il faudrait donc, pour établir l'accord des formules de M. Cayley avec celles que nous allons exposer ici, substituer $\vartheta = 8\chi' + 16B'$. Cet accord sera aussi établi pour la première et pour la dernière*) des formules que nous venons de nommer, mais non pas pour la formule (18): dans la formule de M. Cayley qui y correspond — ou plutôt, parce que M. Cayley attribue à la notation h une autre signification que moi**), dans la formule qui correspond à notre formule (11) — manquent les termes dépendant de ϑ. Le manque réciproque a amené dans le mémoire du même auteur „On Cubic Surfaces", quelques inexactitudes dans les valeurs de h' et r' appartenant aux surfaces cubiques***). Le nom des points introduits par M. Cayley indique que, même sans le manque que nous venons de signaler, il y aurait ici des recherches à faire.

En soumettant aussi les autres singularités extraordinaires à une analyse détaillée, nous avons trouvé de même les termes dépendant de η' et ζ' qu'il faut ajouter aux formules qui portent ici les n^{os} (13)—(18), les termes dépendant de χ, B, η et ξ qu'il faut ajouter aux formules réciproques, et les termes dépendant de toutes les singularités extraordinaires qu'il faut introduire à la formule (19), substituée à la formule de M. Cayley.

A cette révision des formules j'ai joint une *extension*, en attribuant aussi à la surface des points uniplanaires — qui ne sont pas dans toutes les formules équivalents à trois „cnicnodes" — et des plans osculateurs, de même que les singularités réciproques. Je lui attribue aussi une certaine classe de points doubles dont les propriétés principales sont développées dans un article, précesseur du présent mémoire (voir l'énumération des singularités dans le n° 1.).

Ce choix des singularités auxquelles j'aurai égard dans le présent travail a certes quelque chose d'arbitraire, ce qui serait difficile à éviter tant qu'on ne sait former pour les surfaces, comme M. Cayley l'a

---

*) Celà n'aura pas lieu toutefois pour la forme de celle-ci qui doit exprimer l'égalité du genre de la surface à celui de la surface réciproque (formule (26) à la p. 544 de la „Geom. of three Dimensions" et à la p. 609 de l'édition allemande du même livre). Voir le n° 76. du présent mémoire.

**) Voir, dans ce qui suit, les notes du n° 1.

***) Voir, dans ce qui suit, le n° 69. On y verra que les points triples accompagnant les singularités χ' d'une surface cubique, et parfois aussi un des plans à la singularité réciproque qui accompagnent un point B, ou tous ces deux plans, peuvent être remplacés par d'autres singularités ($\vartheta = 0$, $\vartheta' = 16B$, $8B$ ou 0).

fait pour les courbes*), une théorie des équivalents; mais si, dans une recherche, on rencontre des surfaces présentant d'autres singularités que celles qui sont introduites dans les formules, on pourra y appliquer les *mêmes procédés*, à peu près, que ceux qui nous ont fourni les termes écrits dans les formules. Ayant surmonté, par exemple, les difficultés que présentent les ξ génératrices stationnaires des points coniques qui ne sont tangentes ni à la courbe double ni à la courbe cuspidale, on saura surmonter, s'il est demandé, les difficultés, moins grandes sans doute, que présentent les génératrices stationnaires tangentes à la courbe double.

L'étude détaillée des différentes singularités, introduites antérieurement ou nouvelles, n'a pas eu toutefois pour seul but la détermination de nouveaux termes des équations. Elle a fourni en même temps *une connaissance plus complète des singularités*, qui a un intérêt indépendent des formules numériques, et qui est assurée par ces formules et par les vérifications auxquelles elles donnent lieu. Cette connaissance conduit aussi à de nouvelles démonstrations plus directes et plus explicatives des coëfficients des anciens termes des formules. Afin de n'étendre pas trop notre mémoire, nous nous bornerons à cet égard aux singularités extraordinaires.

Le moyen dont nous nous servirons principalement pour discuter les singularités d'une surface, c'est l'étude des singularités de cônes circonscrits dont les sommets ont différentes positions particulières. Une note précédente sur *les singularités des courbes planes***) a eu pour but de faciliter cette étude qui se fait en grande partie par les *relations plückériennes*. Les procédés généraux de cette étude seront exposés dans la partie IV; mais on les comprendra mieux en voyant dans les parties suivantes V—XII leurs applications aux points-pinces, points-clos, points biplanaires et uniplanaires, plans osculateurs et points coniques. (Les propriétés des singularités réciproques se trouvent par le principe de dualité.)

Les trois premières parties du mémoire contiendront une énumération des singularités, un exposé des formules numériques, et la démonstration par le principe de correspondance de M. Chasles des formes de ces relations, pendant que la justesse de leurs termes dépendant de singularités extraordinaires ne peut être établie que dans les parties déjà nommées. La partie XIII contiendra des applications à des surfaces particulières, et la partie XIV une addition sur le genre.

---

*) Quarterly Journal t. VII.

**) Mathematische Annalen t. X. — Je saisis l'occasion pour ajouter aux travaux cités dans cette note un beau mémoire de M. Smith, publié, dans les „Proc. of Lond. Math. Soc." vol. VI, p. 153, en même temps que ma note.

I.

Énumération des singularités.

1. Pour comprendre les indications suivantes des significations dont nous ferons usage dans le présent mémoire, il faut observer que les définitions de la première colonne sont „*ponctuelles*“, celles de la seconde colonne, „*tangentielles*“, c'est à dire que nous attribuons aux singularités définies les propriétés les plus générales que permettent les définitions si la surface est regardée, respectivement, comme lieu de ses points, ou comme enveloppe de ses plans tangents*). — Quant à une partie des singularités nous nous contentons ici de les nommer, en renvoyant pour les explications ultérieures à des n^{os} suivants, indiqués à part.

Nombres plückériens

des sections planes:	des cônes circonscrits:
n l'ordre (de la surface),	n' la classe (de la surface),
a' la classe,	a l'ordre,
δ' le nombre des tangentes doubles,	δ le nombre des génératrices doubles,
$\varkappa'$ le nombre des tangentes stationnaires.	$\varkappa$ le nombre des génératrices stationnaires.

Singularités ordinaires:

b' la classe de la *développable bitangente***),	b l'ordre de *la courbe double*,
q' son rang,	q son rang,
s' l'ordre de son arête de rebroussement,	s la classe de l'enveloppe de ses plans osculateurs,
k' le nombre *plückérien****) des tangentes doubles d'une section plane de cette développable,	k le nombre *plückérien****) des génératrices doubles d'un cône qui la projette,
t' le nombre de ses plans tangents triples (ordinaires),	t le nombre de ses points triples (ordinaires),
γ' le nombre de ses plans tangents stationnaires (ordinaires),	γ le nombre de ses points stationnaires (ordinaires),

*) L'importance de cette distinction, bien connue dans la théorie des formules plückériennes, sera illustrée par un exemple dans le n° 15.; voir aussi la note du n° 2.

**) C'est à dire: l'enveloppe des plans tangents doubles.

***) Mes notations k et k' diffèrent de celles des MM. Cayley et Salmon, qui désignent par k le nombre de points doubles apparents de la courbe double. La différence qui en résulte entre les formules de ces savants et les miennes n'est donc qu'apparente. J'écris $k - 3t - \cdots$ (voir le premier terme du second membre de la formule (17)) où M. Cayley écrit k.

ϱ' l'ordre de sa courbe de contact;

c' la classe de *l'enveloppe des plans tangents stationnaires*,

r' son rang,

m' l'ordre de son arête de rebroussement,

h' le nombre *plückérien**) des tangentes doubles d'une section plane de cette développable,

β' le nombre de ses plans tangents stationnaires (ordinaires),

σ' l'ordre de sa courbe de contact (la courbe parabolique).

ϱ la classe de la développable tangente à la surface de long de la courbe double;

c l'ordre de *la courbe cuspidale*,

r son rang,

m la classe de l'enveloppe de ses plans osculateurs,

h le nombre *plückérien**) des génératrices doubles d'un cône qui la projette,

β le nombre de ses points stationnaires (ordinaires),

σ la classe de la développable tangente à la surface le long de la courbe cuspidale.

Singularité ordinaire à une surface à laquelle on a déjà attribué

une courbe double:	une développable bitangente:
j points-pinces (nos 15.—21.).	j' plans-pinces (no 21.).

Singularité ordinaire à une surface à laquelle on a déjà attribué

une courbe cuspidale:	une suite de plans tangents stationnaires:
χ points-clos (nos 22.—28.).	χ' plans-clos (no 28.).

D'autres singularités extraordinaires:

B points biplanaires (nos 29.—35.);

U points uniplanaires (nos 36.—42.);

O plans osculateurs (nos 43.—49.); des *points coniques* (nos 50.—67.), où les tangentes forment un cône dont nous désignons par

μ l'ordre,

ν la classe,

$y+\eta$ le nombre des génératrices doubles, dont les

y sont tangentes à des branches de la courbe double,

B' plans biponctuels (no 35.);

U' plans uniponctuels (no 42.);

O' points osculateurs (no 49.); des *plans tangents le long d'une courbe* (nos 61.—67.) dont nous désignons par

μ' la classe,

ν' l'ordre,

$y'+\eta'$ le nombre des tangentes doubles, dont les

y' sont génératrices de la développable bitangente,

*) Les définitions de h et h' ont les mêmes différences de celles des MM. Salmon et Cayley que les définitions de k et k'.

$z+\zeta$ le nombre des génératrices stationnaires, dont les
z sont tangentes à des branches de la courbe cuspidale,
u le nombre des plans tangents doubles,
v le nombre des plans tangents stationnaires,
(Σ désigne une somme étendue à tous ces points singuliers);

$z'+\zeta'$ le nombre des tangentes stationnaires, dont les
z' sont génératrices de l'enveloppe des plans tangents stationnaires,
u' le nombre des points doubles,
v' le nombre des points stationnaires,
(Σ' désigne une somme étendue à tous ces plans singuliers);

et enfin:

des points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents. Nous désignons par

f le nombre des points doubles de la courbe double,
d le nombre des points stationnaires de la courbe double,
i le nombre des points d'intersection de la courbe double et de la courbe cuspidale,
g le nombre des points doubles de la courbe cuspidale,
e le nombre des points stationnaires de la courbe cuspidale,

qui se trouvent en ces points de la surface. Nous avons démontré, dans le mémoire „Sur une classe de points singuliers de surfaces“*), que les plans tangents en ces points ont les propriétés réciproques. f etc. indiquent donc aussi les nombres de plans tangents doubles de la développable bitangente etc. qui coïncident avec ces plans tangents.

2. En attribuant à la surface dont nous nous occuperons dans le présent mémoire toutes les singularités énumérées ici, nous attribuerons, par exemple, à sa courbe double plusieurs espèces de points stationnaires, non seulement ceux dont les nombres sont désignés par γ et d, mais aussi d'autres qui se trouvent en différents points des plans tangents le long d'une courbe. Pour plus de clarté nous indiquerons ici les nombres totaux de ces points et de ceux qui jouent un rôle analogue, qui résulteront, dans ce qui suit, des discussions des différentes singularités attribuées à la surface.

La courbe double a

*) Mathematische Annalen vol. IX. Il est probable que les „points p-tuples à un seul plan tangent (p-tuple), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en $2p$ points coïncidents“, ont des propriétés analogues.

$$3t+3O'+\Sigma\left[\frac{y(y-1)}{2}\right]+\Sigma'\left[u'+2\zeta(\nu'-3)+3\frac{\eta'(\eta'-1)}{2}+\eta'\zeta'+6\frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2}\right]$$
$$+ f \text{ points doubles,}$$

et

$$\gamma+\Sigma'[\eta'(\nu'-4)+2\eta'\zeta']+d \text{ points stationnaires.}$$

La courbe double rencontre la courbe cuspidale en

$$3\beta+2\gamma+12O'+\Sigma(yz)+\Sigma'(\nu'+4\eta'+4\zeta')+i \text{ points.}$$

La courbe cuspidale a

$$6\chi'+12B'+U'+4O'+\Sigma\left[\frac{z(z-1)}{2}\right]+\Sigma'(\zeta')+g \text{ points doubles,}$$

et

$$\beta+2O'+e \text{ points cuspidaux.}$$

Note. En allant déduire les relations qui ont lieu entre les nombres que nous venons d'énumérer, il faut supposer que les singularités se présentent de la manière la plus générale, que permette leur définition — ponctuelle ou tangentielle —, et qu'aucune singularité ultérieure, qui ne résulte pas de leur définition, ne vient s'y ajouter. *Nous ne comprendrons donc aucune des classes de singularités dont nous avons désigné les nombres par les notations énumérées au nombre indiqué par une autre des notations**).

Si l'on veut appliquer une ou toutes les formules à des cas où des singularités ultérieures se joignent à une des singularités énumérées — ce qui est possible en beaucoup de cas — il faut soumettre l'influence de celles-là à une discussion particulière. Il faut notamment avoir égard à des droites, non indiquées par les définitions des singularités, qui passent par les points singuliers ou se trouvent dans les plans singuliers, et, encore plus, aux éléments développables; puis à la décomposition de cônes tangents aux points coniques, ou de courbes de contact de plans, en des parties aux nombres desquelles il y a des plans ou des points. On ne peut, par exemple, dans quelques-unes des formules (celles que nous appellerons (15′), (17′), (18′) et (19)), remplacer un point biplanaire par un point conique, dont on a $\mu=2$, $\eta=1$, $\nu=y=\text{etc.}=0$, quoique les points biplanaires sont des points coniques dont les cônes tangents sont composés de deux plans. C'est pour cette raison que nous avons introduit expressément les B points biplanaires (et les B' plans ayant les singularités réciproques), pendant que nous n'avons pas besoin de considérer séparément les points que M. Cayley a appelés „*cnicnodes*“, qui ne sont que des points coniques

*) Cette remarque ne s'applique pas aux nombres *plückériens* de cônes et de sections, qui ne sont pas des nombres de singularités propres de la surface. Voir les notes du n° 1.

dont $\mu = \nu = 2$, $y = \eta = z = \zeta = u = v = 0$, ni non plus les „*off-points*“, qui ne sont que des points coniques dont $\mu = \nu = 3$, $z = v = 1$, $y = \eta = \zeta = 0$. (17)

II.

Formules.

3. Les nombres a et a' ont la même signification, de façon que

$$a = a'. \tag{1}$$

En posant pour chacun des points coniques

$$\nu + 2\eta + 3\zeta = x, \tag{2}$$

on aura, selon les équations plückériennes,

$$\mu(\mu-1) = x + 2y + 3z, \tag{3}$$ (18)

$$\nu(\nu-1) = \mu + 2u + 3v, \tag{4}$$

$$z + \zeta - v = 3(\mu - \nu). \tag{5}$$

Des équations analogues auront lieu pour chacun des plans tangents le long d'une courbe.

Les nombres énumérés dans le n° 1. satisfont encore aux équations suivantes: (19)

$$n(n-1) = a + 2b + 3c, \tag{6}$$

$$a(a-1) = n + 2\delta' + 3\varkappa', \tag{7}$$

$$c - \varkappa' = 3(n-a), \tag{8}$$

$$b(b-1) = q + 2k + 3\{\gamma + \Sigma'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d\}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 3(b-q) &= \gamma + \Sigma'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d - [s + \Sigma'(\zeta')] \\ &= \gamma + d - s + \Sigma'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta' - \zeta'], \end{aligned} \tag{10}$$

$$c(c-1) = r + 2h + 3(\beta + 2O' + e), \tag{11}$$

$$3(c-r) = \beta + 2O' + e - m - \Sigma'(\zeta'), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a(n-2) &= [\varkappa - B - \Sigma[\eta + 2\zeta)] + \varrho + 2\sigma + \Sigma[x(\mu-2)] \\ &= \varkappa - B + \varrho + 2\sigma + \Sigma[x(\mu-2) - \eta - 2\zeta], \end{aligned} \tag{13}$$

$$b(n-2) = \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \Sigma[y(\mu-2)], \tag{14}$$

$$c(n-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O' + \Sigma[z(\mu-2)], \tag{15}$$

$$\begin{aligned} a(n-2)(n-3) &= 2\left\{\delta - 3U - \Sigma\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu\eta + 3\nu\zeta + \frac{4\eta(\eta-1)}{2} + 6\eta\zeta + \frac{9\zeta(\zeta-1)}{2} + \zeta\right]\right\} \\ &\quad + 3[ac - 3\sigma - \chi - \Sigma(xz)] + 2[ab - 2\varrho - j - \Sigma(xy)] \\ &\quad + \Sigma[x(\mu-2)(\mu-3)] \\ &= 2(\delta - 3U) + 3(ac - 3\sigma - \chi) + 2(ab - 2\varrho - j) \\ &\quad + \Sigma[x(-4\mu+7) + 2\eta + 4\zeta], \end{aligned} \tag{16}$$

$$(17)\quad b(n-2)(n-3)=4\Big\{k-3t-3O'-\Sigma\Big[\frac{y(y-1)}{2}\Big]$$
$$-\Sigma'\Big[u'+2\zeta'(\nu'-3)+3\frac{\eta'(\eta'-1)}{2}+\eta'\zeta'+6\frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2}\Big]-f\Big\}$$
$$+[ab-2\varrho-j-\Sigma(xy)]$$
$$+3[bc-3\beta-2\gamma-12O'-\Sigma(yz)-\Sigma'(\nu'+4\eta'+4\zeta')-i]$$
$$+9O'+\Sigma[y(\mu-2)(\mu-3)]$$
$$=4(k-3t-f)+(ab-2\varrho-j)+3(bc-3\beta-2\gamma-i)$$
$$-39O'+\Sigma[y(-4\mu+8)]$$
$$-\Sigma'(4u'+3\nu'+8\zeta'\nu'+6\eta'^2+4\eta'\zeta'+12\zeta'^2+6\eta'-24\zeta'),$$

$$(18)\quad c(n-2)(n-3)=6\Big\{h-6\chi'-12B'-U'-4O'-\Sigma\Big[\frac{z(z-1)}{2}\Big]-\Sigma'(\zeta')-g\Big\}$$
$$+[ac-3\sigma-\chi-\Sigma(xz)]$$
$$+2[bc-3\beta-2\gamma-12O'-\Sigma(yz)-\Sigma'(\nu'+4\eta'+4\zeta')-i]$$
$$+18O'+\Sigma[z(\mu-2)(\mu-3)]$$
$$=6(h-6\chi'-12B'-U'-g)+(ac-3\sigma-\chi)+2(bc-3\beta-2\gamma-i)$$
$$-30O'+\Sigma[z(-4\mu+9)]-2\Sigma'(\nu'+4\eta'+7\zeta'),$$

$$(19)\quad \sigma+m-r-\beta-4j-3\chi-14U'-\Sigma'[(2\mu'+x')+6\eta'+7\zeta']$$
$$=\sigma'+m'-r'-\beta'-4j-3\chi-14U-\Sigma[(2\mu+x)+6\eta+7\zeta],$$

et aux équations qu'on forme en y substituant des lettres accentuées à celles qui n'ont pas d'accent — à l'exception de a, f, d, i, g, e —, et réciproquement. Alors l'équation (19) reste inaltérée, mais les équations (6)—(18) conduisent à 13 nouvelles formules que nous désignerons par (6′), (7′), (8′), (9′), (10′), (11′), (12′), (13′), (14′), (15′), (16′), (17′), (18′).

4. Il est commode de remplacer les équations (16), (17), (18) par d'autres, qu'on en déduit*) en ayant égard aux équations précédentes. On trouve, en multipliant l'équation (6) par a, en substituant ensuite à a^2 l'expression fournie par (7′), et en soustrayant l'équation (13), multipliée par 4, et l'équation (16):

$$(20)\quad -a+n'-\varkappa+\sigma+2j+3\chi+4B+6U+\Sigma(\nu+4\eta+7\zeta)=0.$$

Par des opérations tout-à-fait analogues, on déduit des équations (6), (9), (14) et (17):

$$(21)\quad 2\varrho-2q=\beta+j+3O'+4f+6d+3i$$
$$+\Sigma'[4u'+3\nu'+6\eta'(\nu'-4)+8\zeta'(\nu'-3)+6\eta'(\eta'-1)$$
$$+16\eta'\zeta'+12\zeta'(\zeta'-1)+12\eta'+12\zeta'],$$

*) Cette réduction est due à M. Cayley. Voir Salmon: Geometry of three Dimensions, 3me éd. (p. 547; p. 611 dans l'édition de M. Fiedler); dans l'équation qui correspond à notre équation (21) le terme $4f$ manque.

et des équations (6), (11), (15) et (18):

$$(22)\quad 5\sigma+\beta = c+3r+\chi+4\chi'+8B'+6U'+2i+6g+9e \\ -\Sigma(s)+2\Sigma'(v'+4\eta'+7\zeta').$$

En éliminant m et m' de (19), (12) et (12′), on trouve

$$(23)\quad \sigma+2r-3c-4j'-3\chi'-14U'+2O'-\Sigma'(2\mu'+\nu'+8\eta'+11\zeta') \\ =\sigma'+2r'-3c'-4j-3\chi-14U+2O-\Sigma(2\mu+\nu+8\eta+11\zeta).$$

III.

Sur la démonstration des formules.

5. On trouve les formules (6)—(12) en appliquant les équations plückériennes à une section plane, au cône qui projette la courbe double, et à celui qui projette la courbe cuspidale. Il s'ensuit que la formule (10) ou (12) n'est pas applicable au cas où la courbe double ou cuspidale est composée de parties au nombre desquelles il y a des droites. Les termes dépendant des points osculateurs et des plans tangents le long d'une courbe résulteront de nos études de ces singularités (voir le n° 2.).

6. *La démonstration des formules* (13)—(18) se fait par des applications, très semblables entre elles, du principe de correspondance. Soit donné, dans l'espace, un point fixe P et une courbe (X) d'ordre ξ, qui ne passe pas par P, et supposons qu'à chaque point X de la courbe correspondent α points Y de la droite PX, dont aucun, pour aucune position du point X, ne coïncide avec le point P. Alors je dis, que le nombre des coïncidences d'un point X avec un point correspondant Y, est égal à $\alpha\xi$.

En effet, l'ordre du lieu des points Y est égal à $\alpha\xi$, ce qu'on voit en comptant ses points d'intersection avec un plan par P. Par conséquent, si l'on joint des points correspondants X et Y par des plans à une droite fixe (D), à chaque plan $(D)Y$ correspondront $\alpha\xi$ plans $(D)X$. A chaque plan $(D)X$ correspondront de même $\alpha\xi$ plans $(D)Y$. Le nombre de coïncidences de plans correspondants est donc égal à $2\alpha\xi$. De ces coïncidences, $\alpha\xi$ ont lieu dans le plan $(D)P$. Les autres, au nombre de $\alpha\xi$, résultent de coïncidences de X avec Y.

Dans la déduction de toutes les formules (13)—(18) P est un point arbitraire de l'espace.

Formule (13): X est le point de contact d'une tangente menée par P, Y est un des $n-2$ points d'intersection de la tangente avec la surface. Alors

$$\xi = a, \quad \alpha = n-2.$$

Formule (14): X est un point de la courbe double, Y est un des

$n-2$ autres points d'intersection de la droite PX avec la surface. Alors

$$\xi = b, \quad \alpha = n - 2.$$

Formule (15): X est un point de la courbe cuspidale, Y est un des $n-2$ autres points d'intersection de la droite PX avec la surface. Alors

$$\xi = c, \quad \alpha = n - 2.$$

Formule (16): X et Y sont deux points d'intersection d'une tangente menée par P. Alors*)

$$\xi = a(n-2), \quad \alpha = n - 3.$$

Formule (17): X et Y sont deux des $n-2$ points où la droite joignant P à un point de la courbe double rencontre encore la surface. Alors

$$\xi = b(n-2), \quad \alpha = n - 3.$$

Formule (18): X et Y sont deux des $n-2$ points où la droite joignant P à un point de la courbe cuspidale rencontre encore la surface. Alors

$$\xi = c(n-2), \quad \alpha = n - 3.$$

Les différents termes des seconds membres de ces équations contiennent les nombres de coïncidences de différente espèce. Leurs coëfficients se déterminent par la règle suivante, qui est une conséquence de celle qui sert en général à la détermination des degrés de multiplicité de solutions trouvées par le principe de correspondance**):

Le nombre de coïncidences qui ont lieu en un point D du lieu des points X est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits XY, interceptés, sur une droite PX qui fait avec PD un angle infiniment petit du premier ordre, par X et les points correspondants Y; si D est un point multiple de la courbe (X), il faut considérer séparément les cas où le point X infiniment voisin de D se trouve sur les différentes branches partielles de ce lieu.

Pour appliquer cette règle aux termes qui dépendent de singularités extraordinaires, et même pour savoir quels termes il faut introduire, on a besoin de connaître les propriétés des points et plans singuliers; nous déterminerons ces termes et leurs coëfficients dans les parties suivantes

---

*) Le lieu des points Y, dont nous avons dit qu'il est de l'ordre $\alpha\xi$, sera ici, et dans les démonstrations des formules (17) et (18), identique à celui des points X, pris $n-3$ fois, parce que chaque point correspond à $n-3$ points X.

**) Voir mon mémoire sur „*les propriétés générales des systèmes de courbes planes*“ (Mémoire de l'Académie danoise des Sciences 5me série, t. 10, IV, p. 331) ou un article dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, t. V, p. 187. — J'ai fait usage de la même règle dans le n° 3. de mon précédent article (*Note sur les singularités des courbes planes*).

du présent mémoire après avoir déduit les propriétés nécessaires. Quant aux termes connus des mêmes équations, dues à M. Salmon, je n'insisterai pas ici à leur détermination par la règle citée, parce que je l'ai exécutée ailleurs*).

7. *Sur la démonstration de la formule* (19). La transition des parties de la surface où la courbure est elliptique à celles où elle est hyperbolique, se fait soit par la courbe parabolique soit par la courbe cuspidale. Quant à cette dernière transition, il est évident qu'à un observateur qui se meut le long de la courbe cuspidale, entre les deux nappes qui y sont réunies, la nappe à courbure elliptique se trouve du même côté où se présente la concavité de la courbe cuspidale.

Il en résulte que les deux nappes changent de courbure aux points de la courbe cuspidale où une coïncidence a lieu du plan tangent avec le plan osculateur, et qui ne présentent aucune autre singularité. Il est donc nécessaire que la courbe parabolique, devant séparer les parties de chacune des deux nappes où la courbure est elliptique de celles où elle est hyperbolique, passe par ces points. On voit par les mêmes considérations que, réciproquement, aux points de la courbe cuspidale où passe une branche de la courbe parabolique, et qui ne présentent aucune autre singularité, les deux plans dont nous venons de parler coïncident.

En appliquant le principe de dualité à ces considérations, on trouve qu'à ces mêmes points coïncident des points de contact de plans tangents stationnaires avec les points où ces mêmes plans sont osculateurs à l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, et que cette coïncidence n'a lieu qu'en ces points et en des points de contact de plans tangents présentant une singularité plus compliquée.

On voit ainsi qu'en cherchant le nombre total des coïncidences d'un plan tangent à la surface en un point de la courbe cuspidale avec le plan osculateur de cette courbe, et en en soustrayant le nombre des coïncidences qui sont dues aux singularités que nous avons attribuées à la surface, on trouve un nombre ψ qui est égal à celui des plans doués des propriétés réciproques, ou bien, au nombre qu'on exprime en substituant des lettres accentuées à celles qui n'ont pas d'accent, et réciproquement.

Les deux membres de l'équation (19) sont les deux expressions de ψ. En effet, on trouve par le principe de correspondence, que le nombre de coïncidences des points de rencontre d'une droite fixe (D) avec le plan tangent et le plan osculateur en un point de la courbe cuspidale, est égal à $\sigma + m$. Celui des coïncidences de ces deux plans est donc égal à

*) Voir le n° 40. du premier des mémoires cités dans la note précédente.

$$\sigma + m - r,$$

le nombre des tangentes de la courbe cuspidale qui rencontrent la droite étant égal à r. Les autres termes négatifs du premier membre de l'équation (19) indiquent les nombres de coïncidences qui ont lieu à cause des singularités attribuées à la surface, y compris, de singularités ordinaires, les β points stationnaires de la courbe cuspidale (voir le n° 13.). Nous rendrons compte des autres dans ce qui suit. Les coëfficients sont déterminés au moyen de la règle ordinaire (voir le n° précédent)*).

Note. La base de cette déduction de l'équation (19) est le fait que les points de la courbe cuspidale où le plan tangent coïncide avec le plan osculateur — et qui ne présentent aucune autre singularité — ont les propriétés qui correspondent selon le principe de dualité à celles de leurs plans tangents**). On peut aussi démontrer cette identité de singularités, réciproques l'une à l'autre, au moyen des procédés dont nous nous servirons dans la suite du présent mémoire. Nous indiquerons ici brièvement la marche de cette démonstration, en renvoyant, pour le sens des notations etc. dont nous nous y servirons, aux parties suivantes du mémoire.

On peut voir de différentes manières, par exemple par une représentation au moyen de coordonnées ponctuelles***), qu'un point P de la courbe cuspidale où le plan tangent coïncide avec le plan osculateur a en général les propriétés ponctuelles suivantes: une droite quelconque par P rencontre la surface en deux points coïncidents, une droite du plan tangent, en trois, et la tangente de la courbe cuspidale, en six. La section faite par un plan quelconque par P y a donc un point stationnaire, celle que fait un plan par la tangente de la courbe cuspidale, deux branches ayant en P un contact triponctuel avec la tangente, et celle du plan tangent, un point triple à une seule tangente rencontrant la section en six points coïncidents. Cette singularité a les équivalents $\binom{6,\ 0}{6,\ 0}$ ou $\binom{3,\ 2}{3,\ 2}$ ou $\binom{0,\ 4}{0,\ 4}$. Les trois points d'intersection du plan

*) J'ai indiqué brièvement cette démonstration dans les „Mathematische Annalen" vol. IV, p. 636. Par une faute de distraction les termes $-\beta$ et $-\beta'$ manquent dans l'équation à la ligne 11 en bas; les équations suivantes sont justes.

**) Les points et plans qui nous occupent sont des singularités ordinaires, soit d'une surface regardée comme lieu de points à laquelle on a attribué une courbe cuspidale, soit d'une surface regardée comme enveloppe à laquelle on a attribué une suite de plans tangents stationnaires. Nous regardons donc, dans cette discussion, comme les plus générales les propriétés exprimées de la manière la plus générale par une représentation ponctuelle ou tangentielle, suivant que nous parlons de la courbe cuspidale ou de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.

***) Voir la note précédente.

avec la courbe cuspidale qui sont confondus en P étant des points stationnaires de la section, seulement le troisième de ces groupes reste possible. Le quatrième point stationnaire qui se trouve en P étant nouveau, le plan est un plan tangent stationnaire de la surface; sa section a les nombres plückériens

$$a_1 = a - 3, \quad \delta_1' = \delta' - 3(a-6), \quad \varkappa_1' = \varkappa' - 8,$$
$$n_1 = n \quad , \quad b_1 = b \quad , \quad c_1 = c + 1.$$

Trois tangentes menées de P à une section quelconque passant par lui coïncident avec la trace du plan tangent; le cône circonscrit dont le sommet se trouve en P est donc composé de ce plan pris trois fois et d'un cône résidu. Cette décomposition étant identique à celle d'un cône circonscrit dont le sommet se trouve en un point quelconque de la courbe cuspidale, les nombres plückériens du cône résidu au sommet P restent les mêmes que pour un autre sommet sur la courbe cuspidale; ils auront donc (voir le n° 10.) les valeurs de

$$a_1 = a - 3, \quad \delta_1 = \delta - 3(a-6), \quad \varkappa_1 = \varkappa - 8,$$
$$n_1' = n' \quad , \quad b_1' = b' \quad , \quad c_1' = c' + 1.$$

Les propriétés des sections faites par les plans passant par la tangente à la courbe cuspidale montrent qu'elle est une génératrice triple du cône résidu, à un seul plan tangent, qui coïncide avec celui de la surface, et qui rencontre le cône en six génératrices coïncidentes. Le plan tangent étant plan tangent stationnaire, mais non pas plan tangent double de la surface, les équivalents de la singularité ne pourront avoir que les équivalents $\binom{0,\ 4}{0,\ 4}$. Un des quatre plans tangents stationnaires coïncidents du cône résidu étant nouveau ($c_1' = c' + 1$), les trois autres doivent être des plans tangents consécutifs de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. P est donc un point de l'arête de rebroussement de cette développable.

8. Pour contrôler les termes de nos équations qui contiennent les nombres des points et des plans singuliers, il sera utile d'en avoir plusieurs déductions différentes. Pour cette raison, nous indiquerons ici des démonstrations directes de l'équation (21) et des deux équations suivantes:

$$(20^b)\quad 2\varkappa + 2n' - 2a = c' + \sigma + 2j + 3\chi + 4B + 6U + \Sigma(\nu + 4\eta + 7\zeta),$$

$$(22^b)\quad c(n-3) + 3\sigma = 3r + 3\beta + \gamma + \chi + 12\chi' + 24B' + 6U' + 2i + 6g + 9e + 12O' + \Sigma[s(\mu-3)] + 2\Sigma'(\nu' + 4\eta' + 7\zeta'),$$

dont la première résulte d'une combinaison des équations (20) et (8′), la seconde, d'une combinaison de (22) et (15).

Les deux membres de l'équation (20^b) expriment le nombre de coïncidences des tangentes principales (Haupttangenten) que contiennent les plans tangents passant par un point fixe P. En effet, la surface gauche lieu de ces tangentes principales est de l'ordre $\varkappa + 2n'$, ce qu'on voit en comptant ses intersections avec une droite par P: cette droite rencontre les $\varkappa$ tangentes principales qui passent par P, et les $2n'$ que contiennent les plans tangents qui passent par elle. Il y aura donc, dans un faisceau de droites, dont le plan ne passe pas par P, et où l'on regarde comme correspondantes les droites qui rencontrent les deux tangentes principales d'un plan tangent par P, $2(\varkappa+2n')$ coïncidences de droites correspondantes. $2n'$ de ces coïncidences résultent seulement de la circonstance que n' des plans tangents passent par le centre du faisceau, $2a$, de celle que a des points de contact se trouvent dans le plan du faisceau. Il reste donc

$$2(\varkappa+2n') - 2n' - 2a = 2\varkappa + 2n' - 2a$$

coïncidences de tangentes principales. Le second membre indique la distribution de ces coïncidences*).

Les deux membres de l'équation (21) expriment le nombre de coïncidences des deux plans tangents en un point de la courbe double. On trouve le premier membre en appliquant le principe de correspondance aux points où une droite rencontre les deux plans. Le nombre total des coïncidences de ces points est égal à 2ϱ; mais il faut en soustraire les $2q$ coïncidences qui ont lieu aux q points où la droite rencontre des tangentes de la courbe double**).

Les deux membres de l'équation (22^b) indiquent le nombre de droites, rencontrant une droite fixe, et tangentes à la surface en des points de la courbe cuspidale, qui ont quatre intersections confondues en leurs points de contact. En effet, la surface gauche lieu des tangentes en des points de la courbe cuspidale qui rencontrent une droite fixe est de l'ordre $c + \sigma$, ce qu'on voit en comptant ses intersections avec une droite qui rencontre la droite fixe. On verra donc sans difficulté, en

*) Comparer à l'équation (15) de mon mémoire déjà cité sur *les systèmes de courbes planes*, où j'ai déterminé le nombre de courbes d'un système dont les deux tangentes en un point double coïncident. Les termes c', σ et 3χ de (20^b) correspondent immédiatement aux termes β, $(d, 2e)$ et $3(d, e)$, le terme $2j$, à peu près, au terme $2(2d)$ de l'équation citée, appliquée aux projections des sections faites par les plans tangents qui passent par P.

**) Comparer l'équation réciproque à (21) à l'équation (6) du mémoire sur les *systèmes de courbes planes*, où j'ai déterminé le nombre de courbes d'un système dont deux points doubles coïncident, ou mieux, comparer l'équation (21) elle-même à celle que nous avons citée dans la note précédente et que nous appliquons à présent aux sections faites par les plans d'un faisceau. Les termes $4f$, j, β et $3i$ de (21) correspondent aux termes $2(2d)$, β, $(d\,2e)$, $3(de)$ de cette équation.

appliquant le principe de correspondance aux plans joignant une autre droite fixe au point de contact X et à un des points d'intersection Y d'une des tangentes, que le nombre dont il s'agit, qui est celui des coïncidences de points correspondants X et Y, est égal à

$$c(n-3)+[n(c+\sigma)-3c]-(c+\sigma)(n-3)=c(n-3)+3\sigma,$$

qui est le premier membre de l'équation (22^b). Le second membre indique la distribution des tangentes dont on a trouvè le nombre.

IV.

Sur la dégénération des cônes circonscrits pour des positions particulières des sommets.

9. Un de nos moyens principaux de trouver les propriétés des points singuliers, c'est l'étude des cônes circonscrits dont les sommets se trouvent en ces points eux-mêmes, ou sur les plans tangents ou sur les tangentes singulières en ces points; mais avant que nous allons à l'application de ce procédé aux points singuliers dont nous aurons à étudier de nouvelles propriétés, il sera utile de considérer quelques autres positions particulières du sommet.

En général, le cône circonscrit est de l'ordre a, de la classe n', doué de δ génératrices doubles, de $\varkappa$ génératrices cuspidales, de b' plans tangents doubles et de c' plans tangents stationnaires. Une partie des génératrices doubles et cuspidales sont confondues dans les droites joignant le sommet à certains points singuliers de la surface; nous aurons à discuter les *coïncidences ultérieures* de génératrices ou de plans tangents singuliers, et *les décompositions du cône regardé soit comme lieu de ses génératrices, soit comme enveloppe de ses plans tangents,* qui ont lieu pour des positions particulières du sommet.

Il est évident qu'au moyen du principe de dualité on peut déduire des résultats que nous allons trouver les propriétés des sections faites à la surface par des plans ayant des positions particulières, et qu'on peut appliquer à l'étude des propriétés des plans tangents singuliers une méthode analogue à celle qui nous fournira les propriétés des points singuliers.

10. *Le sommet se trouve sur la surface.* Si le sommet se trouve en un point, ordinaire ou singulier, de la surface, le cône circonscrit sera composé d'une partie qui contient les tangentes dont le contact a lieu au sommet, et d'une autre qui contient les autres tangentes de la surface qui passent par le même point. Nous appellerons cette dernière partie *le cône circonscrit résidu.* Nous désignerons partout les nombres plückériens de celui-ci par a_1, n_1', δ_1, $\varkappa_1$, b_1', c_1'. En général,

le cône résidu n'est pas composé; nous pourrons donc appliquer les équations plückériennes à ces nombres*).

Si le sommet est un point ordinaire S de la surface, le plan tangent pris deux fois fera partie du cône circonscrit, ce qu'on voit en considérant les sections planes passant par le point. On aura donc $a_1 = a - 2$. La section faite par le plan tangent, ayant un point double en S, est de la classe $a - 2 = a_1$. Ses génératrices d'intersection avec le cône circonscrit sont les a_1 tangentes à la section qui passent par S. Deux couples de celles-ci coïncidant, le plan devient un plan tangent double qui n'appartient pas aux b' plans tangents à la développable bitangente. On a donc $b_1' = b' + 1$, $c_1' = c'$. Les nombres plückériens du cône résidu — dont aussi δ_1 et n_1' sont faciles á trouver directement — seront par conséquent

$$a_1 = a - 2, \quad \delta_1 = \delta - 2(a-6) \quad , \quad \varkappa_1 = \varkappa - 2 \cdot 3$$
$$n_1' = n' \quad , \quad b_1' = b' + 1 \quad , \quad c_1' = c'.$$

On trouve les résultats suivants en appliquant le principe de dualité aux propriétés ponctuelles connues des sections faites par les plans tangents singuliers ordinaires**).

Le sommet est un point ordinaire de la courbe double:

$$a_1 = a - 4, \quad \delta_1 = \delta - 2 \cdot 2(a-8) - 4 \quad , \quad \varkappa_1 = \varkappa - 4 \cdot 3$$
$$n_1' = n', \quad b_1' = b' + 2 \quad , \quad c_1' = c'.$$

Le sommet est un des t points triples:

$$a_1 = a - 6, \quad \delta_1 = \delta - 3 \cdot 2(a-10) - 3 \cdot 4, \quad \varkappa_1 = \varkappa - 6 \cdot 3$$
$$n_1' = n' \quad , \quad b_1' = b' + 3 \quad , \quad c_1' = c'.$$

Le sommet est un point ordinaire de la courbe cuspidale:

$$a_1 = a - 3, \quad \delta_1 = \delta - 3(a-6) \quad , \quad \varkappa_1 = \varkappa - 8,$$
$$n_1' = n' \quad , \quad b_1' = b' \quad , \quad c_1' = c' + 1.$$

Le sommet est un des points γ (c'est à dire: un des points dont nous avons désigné le nombre par γ):

*) Quant à la formation d'une partie des cônes circonscrits dont les sommets ont des positions particulières comme des cas limites des cônes circonscrits ordinaires, je puis renvoyer à la première partie de mon mémoire cité sur les systèmes de courbes planes, où je discute la formation des courbes singulières d'un système comme des limites des courbes générales du système.

**) Les propriétés tangentielles, réciproques à celles-ci, des points singuliers ordinaires servent naturellement — dans une théorie des surfaces réciproques — de définitions de ces points qui appartiennent aux singularités ordinaires à une surface regardée comme enveloppe de ses plans tangents. On peut en déduire ensuite les propriétés ponctuelles au moyen de procédés analogues à ceux qui servent, dans les n^{os} suivants, à la déduction des propriétés tangentielles des plans tangents singuliers.

$a_1 = a - 5$, $\delta_1 = \delta - 2(a-9) - 3(a-8) - 6$, $\varkappa_1 = \varkappa - 6 - 8$,
$n_1' = n'$, $b_1' = b' + 1$, $c_1' = c' + 1$.

Si *le sommet est un des points* β, le cône résidu aura les mêmes nombres plückériens que dans le cas où il était un point ordinaire de la courbe double; mais les deux nouveaux plans tangents doubles coïncident, en même temps que deux des génératrices doubles, et deux nappes du cône deviennent ainsi tangentes entre elles.

11. *Le sommet S est un point de la développable enveloppe des plans tangents stationnaires.* Si le sommet est un point ordinaire de cette développable, le cône circonscrit ne subit aucune décomposition. Nous n'avons donc à discuter que la singularité de la génératrice du cône qui coïncide avec la génératrice de la développable où se trouve le sommet. Nous donnerons à cette discussion une étendue plus grande que nécessaire pour en obtenir les résultats, afin de *montrer, dès à présent, les procédés* que nous appliquerons ensuite à des recherches plus difficiles.

La génératrice dont il s'agit étant tangente stationnaire de la section faite à la surface donnée par un plan quelconque passant par elle, deux des tangentes à la section qui passent par le sommet S coïncident avec elle: elle est donc génératice double du cône. Seulement dans le cas où le plan est le plan tangent stationnaire qui passe par la génératrice, la section aura un point stationnaire, de façon que sa classe s'abaisse de trois unités, et, la génératrice étant tangente à la section en ce point singulier, encore une quatrième des a génératrices du cône circonscrit que contient le plan vient coïncider avec elle.

La génératrice double de ce cône n'a donc qu'un seul plan tangent, qui contient quatre génératrices coïncidentes. Alors les valeurs principales des équivalents plückériens*) du point et de la tangente d'une section plane du cône que déterminent la génératrice et le plan tangent dont nous nous occupons — ou disons: *les valeurs principales des équivalents de la génératrice et du plan tangent du cône* — sont $\binom{s,\,0}{s,\,0}$ ou $\binom{s,\,1}{s,\,1}$, suivant que les deux branches qui forment la singularité (de la section plane du cône) sont distinctes, ou qu'elles forment un point de rebroussement de seconde espèce. s est un nombre entier

*) Voir mon article précédent: *Note sur les singularités de courbes planes* (Math. Ann. X). La définition des valeurs principales des équivalents se trouve dans son n° 2., la signification des notations dont nous nous servirons est indiquée dans son n° 5.: une singularité $\binom{\delta,\,\varepsilon}{\delta',\,\varepsilon'}$ d'une courbe plane est formée par la réunion de δ points doubles et ε points stationnaires en un point à une seule tangente où δ' tangentes doubles et ε' tangentes stationnaires sont réunies.

> 1, et dans le premier cas les deux branches ont un contact de l'ordre $s-1$, dans le second, on pourrait dire qu'elles ont un contact de l'ordre $s+\frac{1}{2}$. On en déduit les *valeurs générales* des équivalents

$$\begin{pmatrix} s-3\alpha, & 2\alpha \\ s-3\alpha, & 2\alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} s-3\alpha, & 1+2\alpha \\ s-3\alpha, & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

où α est un nombre entier qui est $\leqq \frac{s}{3}$.

On a, dans le cas qui nous occupe, plusieurs moyens de compléter la détermination des équivalents: 1° le sommet S étant un point d'une génératrice de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, deux des c' plans tangents stationnaires du cône circonscrit coïncident avec le plan tangent singulier; 2° aucun des b' plans tangents doubles ne coïncide avec lui; 3° la génératrice singulière n'ayant qu'un contact triponctuel avec la surface, aucune des δ génératrices doubles, qui ont — à l'exception de celles qui joignent S aux points singuliers de la surface — deux contacts, ne coïncide avec elle. Les équivalents ont donc les valeurs de $\begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$, qui sont pour $s=3$, $\alpha=1$ les premières de celles que nous avons indiquées. On voit donc que la singularité du cône est formée de deux nappes ayant trois génératrices communes, ou bien ayant un contact du second ordre.

Si le sommet S se trouve sur l'arête de rebroussement de la développable, trois plans tangents stationnaires coïncident, et on trouve que les équivalents ont les valeurs de $\begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 0, & 3 \end{pmatrix}$, qui sont pour $s=3$, $\alpha=1$ les dernières de celles que nous avons indiquées. Une section plane du cône aura donc un point de rebroussement de seconde espèce formé de deux branches partielles qui ont un contact de l'ordre $\frac{7}{2}$.

Le point singulier de la section faite par un plan tangent ou osculateur à la courbe cuspidale qui se trouve au point de contact avec cette courbe, aura, respectivement, les uns ou les autres de ces mêmes équivalents.

12. *Le sommet S se trouve au point de contact d'un plan tangent stationnaire.* Dans un plan quelconque par ce point, deux tangentes de S à la section qu'il fait coïncident avec la droite où il rencontre le plan tangent de la surface. L'ordre a_1 du cône résidu est donc égal à $a-2$. Si le plan passe par la tangente principale en S, la section y aura un point d'inflexion, de façon qu'une troisième tangente ayant le même point de contact coïncide avec les deux autres. Une nappe simple du cône résidu passe donc par cette droite, qui sera la seule génératrice du cône résidu qui a S pour point de contact. On trouve le nombre des génératrices communes au cône résidu et au plan tan-

gent à la surface en S qui coïncident avec cette droite, en soustrayant de $a_1 = a - 2$ le nombre des droites qui passent par S et sont tangentes à la section faite par ce plan en des points différents de S. Or, comme S est un point stationnaire de cette section, ce dernier nombre est égal à $a - 3 - 3 = a_1 - 4$. Le plan contient donc 4 génératrices consécutives du cône, ou bien il a avec lui un contact du troisième ordre. Cette singularité s'exprime par les équivalents $\binom{0,\ 0}{1,\ 2}$. Les deux plans tangents stationnaires appartiennent aux c' plans stationnaires de la surface qui passent par S, pendant que le plan tangent double est nouveau. On a donc $b_1' = b' + 1$, $c_1' = c'$. Les nombres plückériens du cône résidu ne seront donc pas différents de ceux du cône circonscrit résidu qui a pour sommet un point ordinaire de la surface (voir le n° 10.). Cela résulte immédiatement de la circonstance qu'un cône résidu dont le sommet se meut sur la surface ne subit à aucune décomposition ultérieure si le sommet vient prendre la place que nous lui avons attribuée ici.

On trouve par le principe de dualité que la section faite par le plan tangent à la surface en un point de la courbe cuspidale a un point triple à une seule tangente et aux équivalents $\binom{1,\ 2}{0,\ 0}$.

13. En profitant de la circonstance que la section faite à la surface donnée par un des β' plans tangents stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, a un contact de deux branches, on trouve, par des procédés analogues à ceux dont nous venons de nous servir, les propriétés des cônes circonscrits dont les sommets se trouvent en ces plans. Nous indiquerons, sans démonstration complète*), les résultats, en partie connus, de ces recherches.

Le sommet est un point arbitraire d'un des plans β'. Le cône, qui ne se décompose pas, a un contact du troisième ordre avec le plan singulier $\binom{0,\ 0}{1,\ 2}$.

Le sommet est un point de la génératrice de contact de l'enveloppe des plans tangents stationnaires avec un plan β'. Le cône, qui ne se décompose pas, a la génératrice pour génératrice triple; le plan β', qui y est le seul plan tangent, a en commun avec le cône six génératrices coïncidentes. Les équivalents plückériens de la singularité auront les valeurs de $\binom{2,\ 3}{2,\ 3}$. Les valeurs principales qui y correspondent étant

*) On aura du reste lieu de voir dans ce qui suit comment on peut surmonter les mêmes difficultés qui se présentent ici (n° 45.).

$\binom{5,\ 1}{5,\ 1}$, la singularité d'une section plane du cône sera formée d'un point de rebroussement de seconde espèce, dont les deux branches partielles ont un contact d'ordre $\frac{3}{2}$, et d'une branche simple ayant avec les deux premières un contact du premier ordre.

Le sommet S est le point de contact d'un plan β'. Les nombres plückériens du cône résidu seront identiques à ceux d'un cône résidu qui a pour sommet un point ordinaire de la surface (voir le n° 10.). Les équivalents de la singularité de la tangente principale et du plan tangent auront les valeurs de $\binom{0,\ 2}{3,\ 4}$; les valeurs principales qui y correspondent sont $\binom{3,\ 0}{6,\ 2}$, de façon que deux nappes du cône résidu passent par la tangente principale, où elles ont, entre elles et avec le plan tangent de la surface, un contact du second ordre.

Application. Par le point de contact S d'un plan β' passent $\varkappa_1 - 2 = \varkappa - 8$ tangentes principales et $\delta_1 = \delta - 2a + 12$ tangentes doubles de la surface dont les points de contact sont différents de S.

On trouve par le principe de dualité*) les propriétés des sections planes qui passent en un point β. Une section quelconque a un point triple à une seule tangente $\binom{1,\ 2}{0,\ 0}$. La section faite par un plan passant par la tangente en ce point a un point de contact d'une branche simple et d'une branche faisant un rebroussement de seconde espèce. Celle que fait le plan tangent a le point β pour point stationnaire de deux branches tangente l'une à l'autre.

14. Ayant discuté ailleurs**) les propriétés des points doubles à un seul plan tangent (double) qui est le lieu des droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, nous pourrons, sans difficulté, indiquer les propriétés des cônes circonscrits et des sections dont les sommets et plans ont des positions particulières par rapport à ces points singuliers. En nommant les propriétés des sections, nous pourrons renvoyer pour celles des cônes au principe de dualité.

*) Un plan β' ayant la même génératrice de contact avec la développable bitangente qu'avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, il faut que la courbe double ait en un point β la même tangente que la courbe cuspidale. Il faut donc, dans l'exemple qui sert, dans la 3me éd. de Salmon: Geom. of three Dimensions n° 604. (p. 606 de l'édition de M. Fiedler), à illustrer les points β, substituer à la droite double une courbe ayant la même tangente que la parabole sémicubique. Sans cela on ne comprend pas que *trois* intersections de ces courbes se confondent en un point β [voir le terme $(bc - 3\beta -$ etc.) des formules (11) et (12) à l'endroit cité, ou de nos formules (17) et (18)].

**) Dans l'article sur une classe de points singuliers de surfaces.

Supposons que le point singulier soit un point φ-tuple de la courbe double, et un point ψ-tuple de la courbe cuspidale. Alors deux branches — totales ou partielles suivant que ψ est pair ou impair — de la section faite par un plan quelconque passant par le point, y auront un contact de l'ordre $\frac{2\varphi+3\psi-2}{2}$. — La section résidue du plan tangent aura les mêmes nombres plückériens que celle d'un plan tangent double quelconque (voir le n° 10.)

$$a_1 = a-4, \quad \delta_1' = \delta' - 2\cdot 2(a-8) - 4, \quad \varkappa_1' = \varkappa' - 4\cdot 3$$
$$n_1 = n \quad , \quad b_1 = b+2 \quad , \quad c_1 = c.$$

Si $\varphi=2$, $\psi=0$, quatre branches distinctes de cette section résidue, et, si φ et ψ ont d'autres valeurs, deux couples de branches ayant l'une avec l'autre un contact de l'ordre $\frac{2\varphi+3\psi-4}{2}$, passeront par le point singulier.

Il est indifférent à ces égards, si les branches des points multiples des deux courbes singulières sont distinctes, ou non.

V.

Points-pinces (j) et plans-pinces (j').

15. *Un point-pince est un point de la courbe double où les deux plans tangents coïncident*; mais pour compléter cette définition il est nécessaire de rappeler qu'elle est *ponctuelle*. Si l'on a attribué à une surface regardée comme lieu de points une courbe double on pourra en général*) déterminer des points de cette courbe où les plans tangents coïncident. Ces points sont, dans leur forme la plus générale, des points-pinces, qui sont par conséquent — nous l'avons indiqué dans l'énumération des singularités — des singularités „ordinaires à une surface à laquelle on a déjà attribué une courbe double". Tous les points d'une courbe double où les plans tangents coïncident, seront des cas particuliers de points-pinces — distincts ou confondus — à *la condition*, bien entendu, *qu'on regarde la surface comme lieu de points*. Mais dans ce travail, où nous prenons un point de départ double, soit de la génération de la surface en lieu de points, soit de sa génération en enveloppe de plans, nous aurons à développer des propriétés des points-pinces qu'on ne peut appliquer *immédiatement* à tous les points de la courbe double dont les plans tangents coïncident.

Il est évident, par exemple, que nous ne pouvons ici regarder les β points stationnaires de la courbe cuspidale, qui appartiennent aux singu-

*) On peut le démontrer, soit au moyen de la représentation analytique indiquée dans le n° 16., soit par des procédés analogues à ceux que nous appliquerons, au commencement du n° 22., aux points-clos.

larités ordinaires de la surface, comme cas particuliers des points-pinces qui ne sont pas des singularités ordinaires. Toutefois, si l'on regardait exclusivement la surface comme lieu de points, les points β ne se présenteraient que comme des cas très-particuliers des points-pinces; car la courbe double y passe, et les deux plans tangents coïncident.

On pourra faire des réflexions analogues quant aux autres singularités dont nous nous occuperons dans ce qui suit.

Nous devons donc supposer, dans l'étude des propriétés des points-pinces, que la coïncidence ait lieu de la manière qui est la plus simple ou générale si l'on regarde la surface comme lieu de points. Une section plane quelconque par un de ces points doit donc y avoir un point de la forme la plus simple d'un point double — d'une courbe regardée comme lieu de points — dont les deux tangentes coïncident, c'est à dire un point stationnaire. Ces points singuliers faisant, en général, des transitions de points doubles à branches réelles à des points doubles à branches imaginaires, on voit que les points-pinces séparent les parties de la courbe double à plans tangents réels de celles où les plans tangents sont imaginaires.

Si l'on regarde un point stationnaire d'une courbe plane comme cas particulier d'un point double, il faut regarder la droite qui le joint à un point quelconque du plan comme une des tangentes qu'on peut mener par ce point, ce qu'on exprime dans la théorie des systèmes de courbes de la manière suivante: à un point double qui s'est transformé en un point stationnaire se trouve un „*sommet* simple*)“. On voit donc que la *droite qui joint un point quelconque de l'espace P à un point-pince J* est tangente à la surface, ou *génératrice simple du cône circonscrit qui a P pour sommet* (ce qui explique le terme $-j$ des équations (16) et (17)). Par cette droite passe donc un seul plan tangent à la surface en J. Il y a donc une infinité de plans tangents à la surface en J, et l'enveloppe de tous ces plans est un cône de la classe 1, ou bien, ces plans forment un faisceau. Nous appellerons l'axe de ce faisceau *la tangente singulière au point pince.*

La section faite par un plan passant par la tangente singulière aura deux points doubles confondus en J, l'un parce que ce point est le point d'intersection avec la courbe double, l'autre parce qu'il est le point de contact du plan. Les deux points doubles forment un point de contact de deux branches. Il s'ensuit que la tangente singulière rencontre la surface en quatre points confondus en J.

---

*) Un „nouveau“ point double est en même temps un sommet double, et un „nouveau“ point stationnaire, un sommet triple. Voir mon mémoire déjà cité sur *les systèmes de courbes planes* le n° 5., et, pour les propriétés spéciales d'une courbe où un point double s'est transformé en point stationnaire, le n° 15.

Un plan quelconque par J contient une seule droite rencontrant la surface en 3 points confondus en J. Le lieu de ces droites est donc un plan qui doit passer par les deux droites qui ont 4 intersections confondues: la tangente singulière et la tangente à la courbe double, qui est la position limite d'une droite qui joint J à un autre point de la courbe double, et qui a, par conséquent, deux intersections doubles. Nous appellerons ce plan le *plan tangent singulier*. La section qu'il fait a en J un point triple où les deux droites que nous avons nommées sont les seules tangentes. Ce point doit être formé d'une branche simple et d'une branche formant un point stationnaire. Il est évident que cette dernière branche a pour tangente la tangente de la courbe double, parce que J sépare les points de cette courbe où les plans tangents sont réels de ceux où ils sont imaginaires.

La section faite par un plan quelconque par la tangente à la courbe double a un point de rebroussement de seconde espèce formé par la coïncidence d'un point stationnaire avec un point double. Les branches partielles qui forment ce point ont donc, en général, entre elles un contact de l'ordre $\frac{3}{2}$. La section faite par le plan osculateur à la courbe double a un point de rebroussement de seconde espèce dont les branches ont entre elles un contact d'ordre $\frac{5}{2}$.

En résumé, nous avons démontré les propriétés suivantes d'un point-pince: *une droite quelconque par le point-pince y a deux intersections confondues, les droites du plan tangent singulier, trois, et la tangente singulière et la tangente à la courbe double, quatre. Une section plane quelconque par le point-pince y a un point stationnaire*; *celle que fait un plan quelconque par la tangente singulière, un point de contact de deux branches*; *celle que fait un plan quelconque par la tangente à la courbe double, un point de rebroussement de seconde espèce*; *et celle que fait le plan tangent singulier, un point triple dont une branche simple est tangente à la tangente singulière, et une branche double, formant un point stationnaire, est tangente à la courbe double.* Nous démontrerons dans les deux n^{os} suivants, de manières indépendantes entre elles, que *deux des sections faites par les plans passant par la tangente singulière, ont des points de rebroussement de seconde espèce.*

16. *Représentation analytique d'un point-pince.* Les propriétés des points-pinces que nous avons exposées dans le n° précédent se déduisent sans difficulté de la représentation analytique de ces points singuliers. Il suffira, à cet égard, de considérer le cas où la courbe double est l'intersection complète de deux surfaces φ et ψ, et nous pourrons même supposer que, le long de toute la courbe double, les plans tangents de ces deux surfaces sont des conjugués harmoniques

par rapport à ceux de la surface donnée. En effet, il existe toujours des surfaces jouissant de cette propriété le long de la courbe double de la surface donnée, et alors celle-ci *fera du moins partie* d'une surface dont une courbe double, comprenant celle de la surface donnée, est l'intersection complète de φ et ψ, et qu'on peut représenter par une équation de la forme

$$\chi\varphi^2 - \omega\psi^2 = 0. \tag{I}$$

Les points-pinces sont les points d'intersection de la surface $\chi = 0$, ou de la surface $\omega = 0$, avec la courbe double $(\varphi\psi)$. Considérons un point d'intersection des surfaces φ, ψ et ω, et prenons pour plans coordonnés les plans tangents à ces trois surfaces, $z = 0$ à φ, $x = 0$ à ψ et $y = 0$ à ω. Alors un point de la surface, voisin de l'origine, se détermine par une série de la forme

$$z = Axy^{\frac{1}{2}} + \cdots, \tag{II}$$

les termes non écrits étant des fonctions rationnelles de x et $y^{\frac{1}{2}}$, entières par rapport à x, mais ayant pour dénominateurs des puissances de $y^{\frac{1}{2}}$, et d'un degré supérieur à $\frac{3}{2}$ par rapport à x et y.

A cause des dénominateurs, cette série n'est pas applicable aux cas où $\lim \frac{y}{x} = 0$. Il faut donc, pour représenter une section faite par un plan $y = \alpha z$ passant par la tangente singulière, avoir recours à une autre. Supposons que les termes du premier ordre de φ, ψ, ω aient pour coefficients 1, que le terme constant de χ soit égal à a, et les coëfficients des termes x^2 en φ et ω, à b et c; alors l'équation (I) aura la forme suivante:

$$(a+\cdot\cdot)(z+bx^2+\cdot\cdot)^2 - (y+cx^2+\cdot\cdot)(x+\cdot\cdot)^2 = 0,$$

d'où l'on déduit, pour $y = \alpha z$, deux séries, qui, ordonnées suivant des puissances entières et ascendantes de x, commencent par

$$z = \frac{-2ab+\alpha \pm \sqrt{(2ab-\alpha)^2 - 4(a^2b^2-ac)}}{2a}\, x^2 + \cdot\cdot, \tag{III}$$

à l'exception des cas où

$$(2ab-\alpha)^2 - (4a^2b^2-ac) = 0. \tag{IV}$$

Alors les deux séries seront remplacées par une série de la forme

$$z = \frac{-2ab+\alpha}{2a}\, x^2 + Bx^{\frac{5}{2}} + \cdot\cdot \tag{V}$$

où les exposants sont des multiples de $\frac{1}{2}$.

On voit ainsi que la section faite par un plan passant par la tangente singulière, est en général douée d'un point de contact de deux branches, et qu'il existe dans ce faisceau deux plans, déterminés par les valeurs de α qui satisfont à l'équation (IV), où ce point singulier est remplacé par un point de rebroussement de seconde espèce.

On peut aussi, sans difficulté, déduire de la représentation analytique les autres propriétés ponctuelles d'un point-pince que nous avons démontrées dans le n° 15.; mais nous croyons qu'il serait beaucoup plus difficile de démontrer par ce moyen les propriétés tangentielles que nous allons déduire autrement dans les n^{os} suivants. On verra aussi que notre déduction de ces propriétés est entièrement indépendante de la représentation analytique*).

17. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point-pince.* Une section plane par un point-pince est, à cause de la substitution d'un point stationnaire à un des points doubles des autres sections planes, de la classe $a - 1$, et trois des $a - 1$ tangentes qu'on peut mener à cette section par son point stationnaire coïncident avec la tangente en ce point. Les autres sont génératrices du cône circonscrit résidu qui devient ainsi de l'ordre $a_1 = h - 4$.

Une droite quelconque JP par un point-pince J est génératrice simple du cône circonscrit qui a pour sommet un point quelconque P placé sur elle. On voit donc que deux des n' plans tangents qui passent par cette droite coïncident avec le plan qui joint JP à la tangente singulière en J. Il en résulte que le cône circonscrit résidu qui a pour sommet J est de la classe $n_1' = n' - 2$.

Désignons par a_2, n_2', δ_2 etc. les nombres plückériens d'un cône résidu qui a pour sommet un point quelconque Q de la courbe double. Alors on a, selon le n° 10.,

$$a_1 = a_2, \quad n_1' = n_2' - 2.$$

On déduit ensuite de l'une des équations plückériennes que

$$2(\delta_1 - \delta_2) + 3(\varkappa_1 - \varkappa_2) = 2.$$

Aucun des termes du premier membre de cette équation ne peut être negatif. En effet, δ_2 et $\varkappa_2$ sont composés des nombres de certains points singuliers, et de ceux des droites par un point Q de la courbe double qui ont encore deux contacts ou un contact stationnaire avec la surface. Or, un point-pince J n'appartient pas à aucun de ces nombres-là de points singuliers, parce que la droite QJ n'est que génératrice simple du cône circonscrit qui a Q pour sommet; et, comme aucune droite par J n'a plus de quatre intersections confondues, et aucune des deux génératrices qui ont quatre intersections confondues n'a des contacts ultérieures avec la surface, il n'y a aucune des tangentes stationnaires ou doubles par Q, dont le point de contact, ou un des points de contact, aille coïncider avec les deux points d'intersection qui sont déjà en Q, si ce point vient se placer en J. Toutes les $\varkappa_2$ et δ_2 géné-

*) Dans l'étude des plans osculateurs nous appliquerons la représentation analytique aussi à la déduction des propriétés de cônes circonscrits.

ratrices singulières du cône circonscrit résidu qui a Q pour sommet seront dont conservées pour le cône résidu qui a pour sommet J.

La seule solution possible de notre équation est donc

$$\delta_1 = \delta_2 + 1, \quad \varkappa_1 = \varkappa_2.$$

Les autres nombres plückériens du cône résidu qui a le point-pince pour sommet se trouvent par les équations plückériens. On aura

$$a_1 (= a_2) = a - 4, \quad \delta_1 (= \delta_2 + 1) = \delta - 4a + 29, \quad \varkappa_1 (= \varkappa_2) = \varkappa - 12,$$
$$n_1' (= n_2' - 2) = n' - 2, \; b_1' (= b_2' - 2n' + 12) = b' - 2n' + 14, \; c_1' (= c_2' - 6) = c' - 6.$$

La nouvelle génératrice double sera évidemment la tangente singulière; car la section que fait un plan passant par elle est de la classe $a-2$, et quatre des tangentes qu'on peut y mener par J coïncident avec elle, de façon que le plan ne rencontre le cône résidu qu'en $a - 6 = a_1 - 2$ autres génératrices. Aux deux génératrices qui coïncident ainsi avec la tangente singulière doit s'ajouter une troisième dans chacun des deux plans tangents au cône le long de cette droite. On voit aussi que ces deux plans tangents sont des plans tangents stationnaires de la surface; car la formule $c_1' = c' - 2 \cdot 3$ montre que chacun d'eux compte pour trois des c' plans tangents stationnaires qui passent par le point J. Il s'ensuit que le point singulier de la section faite par un de ces plans est composé d'un point stationnaire (point de contact du plan stationnaire) et d'un point double (point d'intersection avec la courbe double): il est donc un point de rebroussement de seconde espèce, ce que nous avons avancé dans le n° 15., et ce qui explique que la troisième génératrice du cône résidu vient coïncider avec la tangente singulière.

La section que fait le plan tangent singulier est de la classe $a-3$; car il faut soustraire de l'effet de son point singulier, qui compte pour deux points doubles et un point stationnaire, celui de deux points doubles, parce que deux points d'intersection avec la courbe double qui ont déjà influé sur a, y coïncident. Deux des tangentes qu'on peut mener de J à cette section coïncident avec la tangente singulière en J, trois avec la tangente à la courbe double. Il reste $a-3-2-3 = a-8 = a_1 - 4$ tangentes dont les points de contact ne coïncident pas avec J. Deux des quatre autres génératrices où ce plan rencontre le cône résidu coïncident avec la tangente singulière, les deux qui restent coïncideront avec la tangente à la courbe double, ce qu'on voit en faisant usage des propriétés, démontrées dans le n° 15., d'une section quelconque passant par cette tangente et des sections passant par les autres droites du plan tangent singulier.

On voit donc que le plan tangent singulier est un des $n_1' - 4 = n' - 6$ plans tangents au cône résidu qui passent par la tangente singulière

sans avoir cette droite pour génératrice de contact. Il reste $n' - 7$ *plans passant par la tangente singulière au point-pince et tangents à la surface en d'autres de ses points.* Ces plans sont des plans tangents doubles de la surface, et leurs droites de contact avec la développable bitangente — qui sont les droites qui joignent les deux points de contact — passent par J. Chacun de ces $n' - 7$ plans compte donc pour deux des b' plans tangents doubles qui passent par J. Voilà pourquoi $b_1' = b' - 2(n' - 7)$.

18. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T de la tangente singulière en un point-pince J.* On voit immédiatement que $a_1 = a$, $n_1' = n' - 1$. — Une section plane passant par la tangente singulière est en général de la classe $a - 2$, et deux de ses branches sont tangentes à TJ en J: le nombre de tangentes à cette section qui passent par T sans coïncider avec TJ est donc égal à $a - 4$. On trouve le même nombre, si la section est celle que fait le plan tangent singulier. Seulement si la section est une des deux où il y a un point de rebroussement de seconde espèce, le nombre de ces tangentes se réduit à $a - 5$. On voit donc que TJ est génératrice quadruple du cône résidu, et que les seuls plans tangents le long d'elle sont les deux plans qui contiennent les sections dont nous venons de parler, et que chacun de ces plans contient cinq génératrices confondues. Comme les deux plans jouent le même rôle, il faut que le point singulier d'une section plane du cône soit composé de *deux branches doubles formant des points stationnaires*; en ce point se confondent alors, à côté des deux points stationnaires, quatre points doubles; aucune tangente double ou stationnaire ne coïncide avec ses tangentes.

Nous voyons ainsi que la génératrice singulière ne donne lieu à l'introduction d'aucun nouveau plan tangent double du cône résidu. Ses plans tangents doubles seront donc ceux des b' plans tangents doubles de la surface passant par T qui ne passent pas par TJ. Le nombre de ceux qui passent par TJ est, selon le n° précédent, égal à $n' - 7$. On aura donc

$$b_1' = b' - n' + 7.$$

Connaissant trois des nombres plückériens, on peut en trouver les autres. On aura

$$a_1 = a \quad , \quad \delta_1 = \delta + 2 \quad , \quad \varkappa_1 = \varkappa - 1,$$
$$n_1' = n' - 1, \quad b_1' = b' - n' + 7, \quad c_1' = c' - 4.$$

Nous voyons que quatre des c' plans tangents stationnaires de la surface qui passent par T, ne sont pas plans tangents stationnaires du cône résidu. T étant un point quelconque de la droite TJ, il faut que les quatre plans passent par cette droite; il en coïncident donc deux avec chacun des deux plans qui ont en J un contact stationnaire.

Nous avons vu que quatre génératrices doubles et deux génératrices stationnaires se confondent dans la génératrice singulière de notre cône résidu. Ces génératrices remplacent, selon les expressions des nombres plückériens du cône résidu, deux génératrices doubles et trois génératrices stationnaires d'un cône circonscrit ordinaire, auxquelles s'est jointe une génératrice de contact d'un plan tangent mené par chaque point de l'espace*). Cette formation de la nouvelle singularité du cône résidu n'est pas très-difficile à s'imaginer, si l'on ne demande pas que toutes les génératrices qui tendent à coïncider soient réelles. On peut la rendre visible par un modèle: en approchant l'oeil de la tangente singulière on verra la formation dont il s'agit.

19. *Cône circonscrit dont le sommet P se trouve sur un des deux plans qui ont au point-pince J un contact stationnaire.* Ce cône ne se décompose pas. Un plan quelconque par PJ contient une génératrice coïncidant avec PJ, et celui qui passe par la tangente singulière, trois, la section que fait ce plan ayant un point de rebroussement de seconde espèce au lieu du point double qui résulte de l'intersection avec la courbe double. On voit donc que ce plan est un des c' plans tangents stationnaires du cône, ou bien, un plan tangent stationnaire simple de la surface. Comptant, selon le n° 18., pour deux plans tangents stationnaires par un point quelconque de la tangente singulière JT, et, selon le n° 17., pour trois par le point J lui-même, il aura la droite JT pour génératrice de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, et le point J pour point d'osculation avec l'arête cuspidale de cette développable.

Eloignons ensuite le sommet P du cône circonscrit infiniment peu du plan tangent stationnaire en J. Alors le plan PJT sera un plan tangent ordinaire du cône, mais il fera un angle infiniment petit avec un de ses plans tangents stationnaires, dont nous appellerons le point de contact avec la surface S. En ce point coïncident deux points d'intersection du plan tangent stationnaire avec la courbe parabolique de la surface. J, qui est un troisième point de la même branche de cette courbe, se trouve à une distance du plan tangent stationnaire qui est infiniment petite du troisième ordre, la distance SJ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre. Il faut donc que la position limite de ce plan tangent stationnaire où S coïncide avec le point-pince J, soit osculateur à la branche de la courbe parabolique. Celle-ci aura donc en J un contact simple avec JT, sa courbure devant être

*) Si, au lieu des cônes, on en considérait des sections planes, on exprimerait cette dernière propriété en disant qu'un *sommet simple* s'est joint aux deux points doubles et aux trois points stationnaires pour former le point singulier composé de quatre points doubles et deux points stationnaires.

la même que celle de la section faite à la surface par le plan tangent stationnaire en J.

Désignons par K le point d'intersection de la tangente singulière JT avec le plan tangent stationnaire en S. Alors on voit en considérant une section plane du cône circonscrit — qui aura la projection de SK pour tangente d'inflexion et la projection de JK pour tangente simple — que*)

$$\lim \frac{KS}{JK} = \frac{2}{1}.$$

En projetant, du sommet P du cône circonscrit, l'arête cuspidale de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, on aura une autre courbe tangente en J à la projection de JK et ayant la projection de KS pour tangente d'inflexion. Le point d'inflexion U, qui est le point de l'arête cuspidale qui correspond au point S de la courbe parabolique, sera déterminé par l'équation

$$\lim \frac{KU}{JK} = \frac{2}{1}.$$

On voit donc que la distance SU n'est qu'infiniment petite du second ordre**), JS étant regardée comme infiniment petite du premier ordre. La coïncidence de S avec U compte donc pour deux dans le second membre de l'équation (19), et le coëfficient de j dans cette équation devient ainsi $4 = 2 \cdot 2$. (Voir le n° 7.)

La même circonstance nous montre que la branche de l'arête cuspidale a un contact du troisième ordre avec celle de la courbe parabolique***).

---

*) La courbe ayant une équation de la forme

$$y = ax^3 + \cdots,$$

l'abscisse du point d'intersection (K) de la tangente en (x, y) (ou J) avec l'axe $y = 0$ aura une expression de la forme $\frac{2}{3}x + \cdots$.

**) En toute rigueur, nous avons prouvé seulement que l'ordre de cette distance infiniment petite est *au moins* égal à deux; mais il faut se rappeler que nous ne cherchons que les propriétés les plus générales des singularités. Pour cette raison, nous attribuons toujours aux infiniment petites les ordres les plus bas qu'il soit *possible*, et nous regardons comme plus compliqués les cas où elles sont d'un ordre plus élevé. Ayant démontré qu'une quantité infiniment petite est, au moins, d'un certain ordre, nous avons donc besoin, seulement, de nous assurer de la *possibilité* de cet ordre, ce qu'on peut faire par un *seul* exemple. Nous nous sommes donc empressés de vérifier tous les coëfficients difficiles à déterminer de nos formules par des exemples, dont nous indiquerons quelques-uns dans la partie XIII. de ce mémoire. Du reste, à côté des déductions que nous exposons ici, nous nous sommes servis aussi, en beaucoup de cas, d'autres.

***) La courbe parabolique reste alors, avant et après le passage par J, sur la même des deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, jointes par l'arête de rebroussement.

A côté de l'influence des points-pinces à la formule (19), nous avons ici établi les résultats suivants:

La tangente singulière en un point-pince est génératrice de deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface; ses points de contact avec l'arête cuspidale de cette développable se trouvent au point-pince. Les deux branches correspondantes de la courbe parabolique ont, au point-pince, des contacts du troisième ordre avec les branches de l'arête cuspidale.

20. *Cône circonscrit dont le sommet P se trouve dans le plan tangent singulier d'un point-pince J. — D'autres propriétés des points-pinces.* — Le cône nommé ici a la droite PJ pour génératrice stationnaire, et le plan tangent singulier pour plan tangent le long d'elle. Trois des ab génératrices d'intersection de ce cône avec celui qui projette, du même sommet P, la courbe double coïncident donc avec PJ. Cette droite n'a que trois intersections confondues avec la surface. Par conséquent, si l'on applique les formules (16) et (17) à la recherche de droites passant par notre sommet P*), les trois génératrices d'intersection qui coïncident avec PJ appartiendront aux $2\varrho + j + \Sigma(xy)$ dont on soustrait le nombre de ab. L'une faisant partie du terme j, il faut que les deux autres fassent partie du terme 2ϱ, ou bien, que le plan tangent singulier au point-pince soit un plan tangent simple de la développable tangente à la surface le long de la courbe double, ce qui donne lieu au terme j de la formule (21) (voir le n° 8.).

De manière semblable, c'est à dire: en donnant, dans la démonstration indiquée dans le n° 6. des formules (13), (14), (16) et (17), au point P des positions particulières, on trouve que le même plan compte pour deux des ϱ plans tangents à cette développable qui passent par un point de la tangente en J à la courbe double, et pour quatre de ceux qui passent par J.

On voit ainsi qu'un *point-pince est un point stationnaire de l'arête cuspidale de la développable tangente à la surface le long de sa courbe double; la tangente à la courbe double est la génératrice, et le plan tangent singulier est le plan tangent à la développable en ce point.*

21. *Plans-pinces.* La définition et les propriétés d'un plan-pince se déduisent par le principe de dualité de celles d'un point-pince. Toutefois, nous ne croyons pas superflu de nommer expressément ces propriétés**), qui se présentent, en partie, d'une manière plus palpable que celles des points-pinces.

---

*) Voir la démonstration de ces formules dans le n° 6.

**) On trouve un bon exemple de plans-pinces à propriétés générales dans un mémoire de M. Bäcklund, qui, à cause de la richesse très variée d'intéressants résultats et de belles recherches qu'on y trouve, méritait d'être mieux connu

Un plan-pince est tangent à la surface le long d'une droite que nous appellerons *la droite singulière*. La section qu'il fait à la surface est composée de cette droite, prise deux fois, et d'une section résidue d'ordre $n-2$, qui a la droite singulière pour tangente double, et qui rencontre cette droite — à côté des points de contact — en un point simple de la surface, que nous appellerons le *point de contact singulier*, et en $n-7$ points de la courbe double. — Le plan-pince est tangent à la développable bitangente le long de la tangente à la section résidue au *point de contact singulier*. Cette tangente est en ce même point tangente au lieu des points de contact des plans tangents doubles, qui y a le plan-pince pour plan osculateur stationnaire. La section faite par un plan quelconque par ce point y a un point d'inflexion. — Le plan-pince est, en *chacun des deux points de contact de la section résidue avec la droite singulière*, osculateur à la courbe cuspidale, qui y est tangente à la droite singulière. L'arête cuspidale de la développable tangente à la surface le long de sa courbe cuspidale a, en ces deux points, la même tangente et le même plan osculateur*). La section faite à la surface par un plan quelconque qui passe par la droite singulière, est composée de cette droite et d'une section résidue d'ordre $n-1$, dont la même droite est deux fois tangente d'inflexion. Les points d'inflexion sont les points de contact de cette droite avec la courbe cuspidale.

On voit qu'aucun des points singuliers que contient un plan-pince ne donne lieu, ni à des génératrices singulières ni à des génératrices d'intersection, du cône circonscrit et des cônes projetant la courbe double et la courbe cuspidale qui ont pour sommet commun un point quelconque de l'espace, ni non plus à des génératrices rencontrant la surface en trois points coïncidents, ou deux fois en deux points coïncidents. Il en résulte qu'aucun des termes des équations (13)—(18) ne doit contenir le nombre j' des plans-pinces. — Le terme $-4j'$ du premier

---

qu'il n'est: *Om geometriska ytor* (Sur les surfaces géométriques. — Mémoires de l'Académie Royale Suèdoise des Sciences vol. 9, n° 9, 1871). Les plans-pinces se présentent, dans ce travail, comme singularités de l'enveloppe des plans harmoniques des points d'une surface donnée d'ordre m, par rapport à une autre surface donnée d'ordre $n+1$ (la dernière polaire de la première surface par rapport à la seconde). Leur nombre est égal à $2m(n-1)(2m+3n-5)$, et ils ont pour pôles les points où la première surface est tangente à un faisceau de premières polaires, prises par rapport à l'autre surface donnée. M. Bäcklund indique une partie essentielle des propriétés de ces plans singuliers, toutefois sans remarquer qu'ils sont identiques à ceux auxquels M. Cayley venait de donner le nom de plans-pinces, et que présente en général une surface regardée comme enveloppe qui est douée d'une développable bitangente.

*) Nous n'insisterons pas à la détermination difficile de l'ordre du contact de ces deux courbes.

membre de l'équation (19) correspond au terme $-4j$ de son second membre.

VI.

Points-clos (χ) et plans-clos (χ').

22. On pourrait dire que les points-pinces sont des points de la courbe double où les sections planes qui passent par eux ont des points stationnaires au lieu de points doubles. De même, une courbe cuspidale d'une surface regardée comme lieu de points contiendra en général des points qui sont, dans les sections planes qui passent par eux, des points de contact de deux branches au lieu de points stationnaires. En effet, cette substitution d'un point de contact de deux branches à un point stationnaire n'étant qu'une condition simple, un faisceau de plans contient en général des plans où elle a lieu*). Un point stationnaire qui a subi à l'altération indiquée étant en même temps un *„sommet"* simple (comparer au n° 15.), il faut regarder, dans chacun de ces plans, toute droite qui passe par un point singulier comme tangente à la surface. Il s'ensuit qu'aussi tout autre plan qui passe par le point singulier contient une droite tangente à la surface en ce même point. Celui-ci devient donc un point de contact de deux branches — au lieu d'un point stationnaire — aussi de la section faite par le nouveau plan.

Un point-clos est un point de la courbe cuspidale où les sections planes qui passent par lui ont des points du contact de deux branches. Nous avons prouvé ici que ces points, dont la définition est ponctuelle, appartiennent aux singularités ordinaires à une surface, regardée comme lieu de points, à laquelle on a attribué une courbe cuspidale. En même temps nous avons prouvé, que *la droite joignant un point quelconque de l'espace P à un point-clos K est génératrice du cône circonscrit qui a P pour sommet,* ce qui explique le terme $-\chi$ des équations (16) et (18).

Un point de contact de deux branches faisant la transition de points stationnaires dont la pointe est tournée de l'un côté, à ceux où elle est tournée de l'autre**), on voit qu'un point-clos réunit deux nappes de la surface qui ressemblent, dans le voisinage du point singulier, aux deux nappes d'un cône applati: de l'un côté chacune de ces nappes est fermée par la courbe cuspidale, de l'autre elle est arrondie.

On voit par les mêmes réflexions que nous avons appliquées aux points-pinces, que les plans tangents à la surface en un point-clos

*) Comparer au n° 16. de mon mémoire sur les systèmes de courbes planes. Les plans du faisceau dont nous parlons ne sont pas les plans tangents de la courbe cuspidale, où deux points stationnaires coïncident.

**) Voir les figures 10, 11, 12 du mémoire cité dans la note précédente.

forment un faisceau, dont nous appellerons l'axe la *tangente singulière*, et que le lieu des tangentes aux deux branches, tangentes entre elles, de toutes les sections planes par un point-clos est un plan, que nous appellerons le *plan tangent singulier*. Ce plan passe par la tangente singulière et par la tangente à la courbe cuspidale. — Les sections faites par les plans passant par la tangente singulière, et par les plans passant par la tangente à la courbe cuspidale, ont des points de rebroussement de seconde espèce, formés, les uns d'un point stationnaire et d'un point double, les autres d'un point de contact de deux branches et d'un point stationnaire: dans le premier cas les deux branches partielles ont, entre elles, un contact de l'ordre $\frac{3}{2}$, dans le second, un contact de l'ordre $\frac{5}{2}$. Dans la section faite par le plan osculateur à la courbe cuspidale, deux branches (totales) ont un contact du 4^{me} ordre.

Toute droite qui se trouve dans le plan tangent singulier et qui passe par le point-clos y a avec la surface quatre intersections confondues; ce point est donc un point quadruple de la section faite par ce plan. Les singularités des sections faites par les plans passant par la tangente singulière, et par la tangente à la courbe cuspidale, montrent qu'aucune de ces droites n'a, en général, plus de quatre intersections confondues. Elles ne sont donc pas tangentes aux branches du point quadruple. En général, ces branches sont distinctes*). Dans la section faite par un plan passant par la tangente à une de ces branches, l'une des deux branches tangentes entre elles fait, au point de contact, une inflexion.

En résumé, *une droite quelconque par un point-clos y a deux intersections confondues, les droites du plan tangent singulier, quatre, et quatre droites de ce plan, cinq. Les sections que font les plans passant par la tangente singulière, et par la tangente à la courbe cuspidale, ont des points de rebroussement de seconde espèce, dont les branches ont entre elles des contacts des ordres* $\frac{3}{2}$ *et* $\frac{5}{2}$, *respectivement. La section faite par le plan singulier a un point quadruple.* Nous verrons dans le n° 25., et par la représentation analytique indiquée dans le n° 23., qu'*un seul des plans par la tangente singulière fait une section dont deux branches (totales) ont entre elles un contact du second ordre.*

Note. On pourrait définir les points-clos par la propriété de la section faite par le plan tangent singulier, et dire qu'un point-clos est un point de la courbe cuspidale où la section faite par le plan tangent a un point quadruple, au lieu d'un point triple à une seule tangente.

*) Voir la seconde note du n° 19., et la représentation analytique des points-clos dans le n° suivant.

M. Cayley, dans le n° 33. de son mémoire sur *les surfaces réciproques*, fait usage de cette définition, mais — en regardant, sans doute, comme générale une propriété que présente les points-clos des surfaces de la troisième classe, à cause d'un plan biponctuel (B') qui se joint au point-clos*) — il ajoute que *le point quadruple de la section est formé d'une branche triple et d'une branche simple.* Toutefois la représentation analytique que M. Cayley indique ensuite dans le n° 34. conduit aux points-clos généraux, ce qui nous fait croire, qu'il ne veut pas restreindre l'usage de ce nom aux points très-particuliers qui sont caractérisés par sa première définition. Nous le croyons d'autant plus que ses formules sont aussi applicables au cas général, à l'exception d'une seule (remplacée par notre formule (18) ou (11)) dont le discord avec la nôtre ne peut être expliquée par la différence des définitions**).

On retrouve la définition trop étroite dans l'édition allemande***), due à M. Fiedler, de la „Geometry of three Dimensions" de M. Salmon.

23. *Représentation analytique.* Il suffira (comparer au n° 16.) de considérer le cas où la courbe cuspidale est l'intersection complète de deux surfaces φ et ψ dont la première est tangente à la surface donnée le long de la courbe cuspidale. Alors la surface donnée aura une équation de la forme

$$\chi\varphi^2 + 2\tau\psi^2\varphi + \omega\psi^3 = 0.$$

En multipliant cette équation par χ et substituant ω à $\chi\omega - \tau^2\psi$, φ à $\chi\varphi + \tau\psi^2$ on obtient une nouvelle équation

$$\varphi^2 + \omega\psi^3 = 0. \tag{I}$$

La surface fait donc partie d'une surface représentée par une équation de cette forme.

Les points-clos seront les points d'intersection de la courbe cuspidale ($\varphi\psi$) avec la surface $\omega = 0$. Prenons pour plans coordonnés les plans tangents en un de ces points: $z = 0$ à la surface $\varphi = 0$, $x = 0$ à $\psi = 0$ et $y = 0$ à $\omega = 0$. Alors un point de la surface voisin de

*) Voir la section VI. du mémoire de M. Cayley: *On cubic surfaces* (Phil. Trans. 1869), et en particulier le n° 101. Les surfaces discutées dans cette section sont les surfaces du troisième ordre à un point biplanaire et un point conic ($\mu = \nu = 2$), et les surfaces réciproques. — Dans le n° 69. du présent mémoire nous développerons les propriétés des premières de ces surfaces.

**) La définition particulière des points-clos amènerait même, en général, d'autres plans singuliers que ceux qu'amène la définition générale, et que M. Cayley introduit sous le nom de plans „de singularité inexpliquée", pendant que nous les regardons comme compagnons ordinaires des points-clos. (*Voir l'introduction du présent mémoire.*)

***) p. 606.

l'origine se détermine par une série commençant par des termes de la forme suivante:

$$(II) \qquad z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \pm dx\sqrt{xy} + \cdots,$$

les termes non écrits étant des fonctions rationnelles de $x^{\frac{1}{2}}$ et $y^{\frac{1}{2}}$ d'un degré supérieur au deuxième par rapport à x et y, et dont les dénominateurs sont des puissances de $x^{\frac{1}{2}}$ et $y^{\frac{1}{2}}$. La dernière circonstance nous montre que la série n'est pas applicable aux cas où $\frac{x}{y}$ ou $\frac{y}{x}$ est infiniment petit.

On déduit de l'équation (II), à côté d'autres résultats indiqués dans le n° précédent, que la section faite par le plan tangent singulier $z=0$ a un point quadruple, dont les tangentes sont déterminées par l'équation:

$$(III) \qquad (ax^2+2bxy+cy^2)^2 - d^2x^3y = 0.$$

Cette équation contient trois constants indépendants entre eux, ce qui nous montre qu'il existe une seule relation entre les positions des quatre tangentes au point quadruple, de la tangente singulière ($y=0$) et de la tangente à la courbe cuspidale ($x=0$); mais cette relation n'amène aucune coïncidence de deux de ces tangentes.

On peut faire usage de l'équation (II) pour trouver les équations des tangentes aux branches de la courbe parabolique qui passent par le point-clos sans coïncider avec la tangente singulière ou avec la tangente à la courbe cuspidale. On trouve, en égalant à zéro le premier terme de $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, l'équation suivante:

$$(IV) \quad 4(b^2-ac)+3bd\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ad\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}cd\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}d^2\frac{x}{y}=0,$$

qui est du quatrième degré par rapport à $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$, et qui détermine, par conséquent, quatre branches de la courbe parabolique. Les nappes correspondantes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, sont évidemment tangentes au plan tangent singulier le long de droites passant par le point-clos. Aucune de ces génératrices de contact ne coïncide avec la tangente singulière ou avec la tangente à la courbe double; car à des valeurs finies de $\frac{x}{y}$ correspondent, selon l'équation (II), des valeurs finies de $\frac{X}{Y}$, $X = -\frac{\partial z}{\partial x}$ et $Y = -\frac{\partial z}{\partial y}$ étant deux des coordonnées du plan tangent à la surface en (x, y, z).

Pour déterminer la section faite par un plan $y = \alpha z$ par la tangente singulière, il faut avoir recours à l'équation (I), où nous désignons par $-fd^2$ le coëfficient de x^2 en ω ($-d^2$ étant le coëfficient de y). Alors on trouve, en y substituant $y = \alpha z$, que

(V) $$z = ax^2 \pm d\sqrt{\alpha a + f}\, x^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

ou si $\alpha = -\frac{f}{a}$

(VI) $$z = ax^2 + Ax^3 + \cdots$$

où A, dépendant d'une équation du second degré, a deux valeurs. La section a donc en général un point de rebroussement de seconde espèce, et celle que fait le plan déterminé par $\alpha = -\frac{f}{a}$, un point de contact du second ordre de deux branches.

24. *Cône circonscrit dont le sommet P se trouve dans le plan tangent singulier d'un point-clos K.* Ce cône ne se décompose pas. La section faite à la surface par un plan passant par PK est de la classe $a-1$, et deux des tangentes passant par P coïncident avec PK. Cette droite est donc génératrice triple du cône circonscrit. La section faite par le plan tangent singulier est de la classe $a-6$, deux points stationnaires étant remplacés par un point quadruple. Ce plan contient donc six génératrices coïncidant avec PK. On voit ainsi que *trois nappes du cône circonscrit sont tangentes le long de PK au plan tangent singulier.*

Les valeurs principales des équivalents plückériens de cette singularité — ou de celle d'une section plane du cône — sont $\begin{pmatrix} 6, & 0 \\ 6, & 0 \end{pmatrix}$*). Les équivalents ont donc ces valeurs ou les valeurs de $\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 3, & 2 \end{pmatrix}$ ou de $\begin{pmatrix} 0, & 4 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}$. Ayant prouvé dans le n° précédent que le plan tangent singulier est plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, nous voyons que les équivalents ne peuvent avoir que les dernières de ces valeurs. On aurait pu trouver le même résultat par les réflexions suivantes qui sont indépendentes de la représentation analytique.

Si PK était une des δ génératrices doubles du cône, elle serait aussi une des δ' tangentes doubles de la section faite par un plan passant par elle. Celà n'a pas lieu. En effet, cette section, où un point stationnaire est remplacé par deux points doubles coincidents, est de l'ordre n, de la classe $a-1$, et douée de $b+2$ points doubles et de $c-1$ points stationnaires. Elle aura donc $\delta' - a + 7 = \delta' - (a-5) + 2$ tangentes doubles. Les $a-5$ tangentes doubles perdues étant les droites menées par le point singulier et tangentes à la courbe en d'autres points, on voit que les deux tangentes doubles coïncidantes dont les points de contact coïncident avec le point singulier sont nouvelles, et n'appartiennent pas au nombre δ'.

*) Comparer à la seconde note du n° 19.

Selon les valeurs trouvées des équivalents plückériens, le plan tangent singulier, qui est plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, n'est pas tangent à la développable bitangente.

Si le sommet P se trouve sur une des tangentes au point quadruple de la section faite par le plan tangent singulier, l'une des trois nappes tangentes entre elles deviendra double et aura PK pour génératrice stationnaire. — Si P se trouve sur une des quatre génératrices de contact du plan singulier avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, deux de ces nappes seront réunies et formeront une nappe double dont toute section plane aura un point de rebroussement de seconde espèce; les deux nappes réunies auront un contact d'ordre $\frac{5}{2}$.

25. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point-clos K.* On voit sans difficulté, au moyen des propriétés indiquées dans le n° 22., et en raisonnant de même que dans le n° 17., que le cône résidu est de l'ordre $a_1 = a - 5$, et de la classe $n_1' = n' - 2$.

La section faite par le plan tangent singulier étant de la classe $a - 6$, on peut y mener $a - 14 = a_1 - 9$ tangentes qui passent par le point quadruple sans y avoir leurs points de contact. Ces tangentes sont des génératrices d'intersection du plan avec le cône résidu; $4 \cdot 2$ autres coïncident avec les tangentes au point quadruple, qui seront des génératrices de contact avec le plan tangent singulier, parce qu'un autre plan par une de ces quatre tangentes n'a avec le cône résidu qu'une seule génératrice d'intersection coïncidant avec elle. Le plan tangent singulier a donc encore une génératrice d'intersection avec le cône; elle coïncide avec la tangente singulière, ce qu'on voit en cherchant les intersections d'un autre plan passant par cette droite avec le cône.

Le plan tangent singulier, étant plan tangent quadruple du cône résidu, compte pour six plans tangents doubles de ce cône. Selon le n° précédent, aucun de ces plans n'appartient aux b' plans tangents doubles de la surface qui passent par K. En même temps que le cône résidu a obtenu ces six nouveaux plans tangents doubles, il a perdu $2(n' - 8)$ des b' qui appartiennent à d'autres cônes circonscrits. En effet, par la tangente singulière, qui est génératrice simple du cône résidu, passent $n_1' - 2 = n' - 4$ plans tangents à lui le long d'autres génératrices; quatre de ces plans coïncident avec le plan singulier: chacun des autres $n' - 8$ plans est tangent à la surface en K et en un autre de ces points, et compte ainsi pour deux des b' plans tangents doubles de la surface qui passent par K. On voit ainsi que

$$b_1' = b' + 6 - 2(n' - 8) = b' - 2n' + 22.$$

Les autres nombres plückériens du cône résidu se trouvent par les équations plückériennes. On aura

$$a_1 = a - 5, \quad \delta_1 = \delta - 5a + 46, \quad \varkappa_1 = \varkappa - 20,$$
$$n_1' = n' - 2, \quad b_1' = b' - 2n' + 22, \quad c_1' = c' - 11.$$

On voit que 11 des c' plans tangents stationnaires de la surface qui passent par K ne sont pas plans tangents stationnaires du cône résidu. Le plan tangent singulier étant tangent à l'enveloppe des plans tangents stationnaires le long de quatre droites passant par K, il faut que $2 \cdot 4$ de ces plans tangents stationnaires perdus coïncident avec le plan tangent stationnaire. Les autres, qui doivent contenir trois génératrices consécutives du cône circonscrit total, coïncideront nécessairement avec le plan tangent à la nappe du cône résidu qui passe par la tangente singulière*). Il faut donc que la section du plan ait un point de contact du second ordre de deux branches — résultant de la réunion de deux points stationnaires — au lieu d'un point de rebroussement de seconde espèce. Cette propriété de la section — dont nous avons déjà parlé dans les nos 22. et 23. — explique que deux génératrices d'intersection de ce plan avec le cône circonscrit résidu coïncident avec la tangente singulière.

26. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T de la tangente singulière en un point-clos K.* On voit immédiatement que $a_1 = a$, $n_1' = n' - 1$. — Un plan quelconque par TK a quatre génératrices d'intersection avec le cône qui coïncident avec cette droite, le plan singulier en a six, et le plan dont la section a un contact du second ordre de deux branches — et que nous appellerons pour un moment le plan stationnaire — cinq.

Ces deux plans étant les seuls plans tangents du cône résidu, un des trois cas suivants doit avoir lieu: 1° une nappe simple a le plan tangent singulier pour plan tangent stationnaire, et une nappe triple est tangente au plan stationnaire; 2° *deux nappes simples sont tangentes au plan tangent singulier, une nappe double formant une génératrice stationnaire, au plan tangent stationnaire*; 3° une nappe double, formant une génératrice stationnaire, et une nappe simple sont tangentes au plan tangent singulier, une nappe simple, au plan stationnaire**). En appliquant à la première de ces suppositions les mêmes considérations

*) Une section plane du cône résidu ayant à la trace de la tangente singulière un sommet double, on pourrait déduire ce même résultat des propriétés des systèmes de courbes planes. (Voir notamment les nos 42. et 47. de mon mémoire sur les systèmes de courbes; comparer aussi au n° 17. du présent mémoire.)

**) Dans les deux derniers cas il serait encore possible que les deux nappes tangents au plan singulier se confondent. Alors la singularité se compliquerait par la substitution d'une génératrice stationnaire à une génératrice double etc. Nous n'aurons donc besoin d'y avoir égard, à moins que les suppositions plus simples ne se montrent impossibles. (Voir la seconde note du n° 19.)

que nous allons appliquer aux deux autres, on trouverait qu'elle est impossible. Les deux autres conduiront essentiellement aux mêmes résultats, et nous ne pourrons qu'après avoir déduit ces résultats nous décider définitivement pour la première (la deuxième des trois suppositions).

Dans tous les deux cas dont nous aurons à nous occuper, six génératrices doubles et une génératrice stationnaire du cône résidu coïncident avec sa génératrice singulière, et deux de ses plans tangents doubles coïncident avec le plan tangent singulier au point-clos. Ceux-ci n'appartiennent pas — selon les n^{os} précédents — aux b' plans tangents doubles de la surface qui passent par T. De l'autre côté $n'-8$ de ces b' plans ne sont pas plans tangents doubles du cône (mais seulement plans tangents simples qui passent par la génératrice singulière). On voit donc que $b_1' = b' + 2 - (n'-8) = b' - n' + 10$. Les autres nombres plückériens du cône résidu se trouvent ensuite au moyen des équations plückériennes:

$$a_1 = a, \qquad \delta_1 = \delta + 5, \qquad \varkappa_1 = \varkappa - 3,$$
$$n_1' = n' - 1, \quad b_1' = b' - n' + 10, \quad c_1' = c' - 6.$$

Quatre des plans tangents stationnaires perdus coïncident avec le plan tangent singulier; il faut que les deux autres coïncident avec le plan dont la section a un contact du second ordre de deux branches.

Les expressions de δ_1 et de $\varkappa_1$ nous montrent encore que les six génératrices doubles et la génératrice stationnaire qui coïncident avec la droite TK remplacent quatre génératrices stationnaires et une génératrice double d'un cône circonscrit à sommet quelconque. Nous avons vu (n° 24.) que, pour un sommet placé dans le plan tangent singulier du point-clos, quatre génératrices stationnaires confondues du cône circonscrit forment une singularité que pourraient former six génératrices doubles. La seule altération de ce cône qui a lieu dans le cas actuel, consiste donc à ce qu'une génératrice double, coïncidant avec les quatre génératrices stationnaires, s'est transformée en une génératrice stationnaire. On sait, de la théorie des systèmes de courbes*), qu'à cette transformation deux plans tangents stationnaires coïncident avec le plan tangent le long de la nouvelle génératrice stationnaire. Or les deux plans tangents stationnaires de la surface qui passent par TK sans coïncider avec le plan tangent singulier coïncident avec le plan dont la courbe d'intersection a un point de contact de second ordre de deux branches. Ce plan est donc tangent au cône résidu le long de sa nouvelle génératrice stationnaire, ce que nous avons avancé au commencement du présent n°.

*) Voir, par exemple, le n° 15. de mon mémoire sur les systèmes de courbes.

On comprendra peut-être mieux notre raisonnement, si nous attribuons — ce qui est permis — à un cône circonscrit dont le sommet se trouve seulement dans le plan singulier les nombres plückériens:

$$a_2 = a, \qquad \delta_2 = \delta + 6, \qquad \varkappa_2 = \varkappa - 4,$$
$$n_2' = n', \qquad b_2' = b' + 6, \qquad c_2' = c' - 4.$$

Alors le cône au sommet T qui nous occupe aura les nombres:

$$a_1 = a_2, \qquad \delta_1 = \delta_2 - 1, \qquad \varkappa_1 = \varkappa_2 + 1,$$
$$n_1' = n_2' - 1, \quad b_1' = b_2' - n + 4, \quad c_1' = c_2' - 2,$$

qui servent à exprimer la substitution d'une génératrice stationnaire à une génératrice double.

27. Résultats. En plaçant le sommet d'un cône circonscrit dans le plan dont la section présente un contact du second ordre de deux branches, on verra que ce plan est un plan tangent simple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Selon les deux n^{os} précédents la tangente singulière sera sa génératrice de contact avec cette développable, et le point-clos, le point correspondant de l'arête de rebroussement de la développable.

Au point-clos aura donc lieu une coïncidence des points de contact d'un plan tangent stationnaire avec la surface et avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces plans, et on voit par les mêmes procédés que dans le n° 19. que cette coïncidence compte *au moins* pour deux, et que, par conséquent, le coëfficient de χ dans l'équation (19) doit être égal à 2 ou à un nombre plus grand que 2. Nous avons trouvé par d'autres procédés (en égalant le genre de la surface à celui de la surface réciproque*), que le coëfficient doit être égal à 3; mais nous ne savons établir *directement* ce résultat, qui amène celui sur l'ordre de contact de l'arête de rebroussement avec la courbe parabolique que contient l'énoncé suivant:

Le plan par la tangente singulière dont la section présente un contact de second ordre de deux branches, est tangent à l'enveloppe des plans tangents stationnaires le long de la tangente singulière; *son point d'osculation avec l'arête de rebroussement de la même développable se trouve au point-clos. La branche correspondante de la courbe parabolique a, au point-clos, un contact du cinquième ordre avec l'arête de rebroussement.*

Dans les n^{os} précédents, nous avons encore prouvé les résultats suivants:

Le plan tangent singulier en un point-clos est tangent à quatre nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires le long de droites passant par le point-clos; *mais, en général, les points correspondants de*

*) Voir l'addition sur le genre qui se trouvera au n° 76. du présent mémoire.

l'arête cuspidale de cette développable ne se trouvent pas au point-clos. Les branches correspondantes de la courbe paraboliques passent par le point-clos et sont tangentes au plan tangent singulier. On voit donc que les points de l'arête cuspidale ne coïncident pas avec les points correspondants de la courbe parabolique, de façon que les plans tangents stationnaires qui coïncident avec le plan tangent singulier n'ont aucune influence à l'équation (19).

Le plan tangent singulier en un point-clos est plan tangent simple de la développable tangente à la surface le long de la courbe cuspidale.

28. *Plans-clos.* La définition d'un plan-clos est réciproque à celle d'un point-clos. Les plans-clos sont donc des singularités ordinaires à une surface, regardée comme enveloppe de plans, qui a déjà une courbe parabolique. Les propriétés de ces plans se déduisent par le principe de dualité de celles des points-clos. Nous en signalerons les suivantes:

Un plan-clos est tangent à la surface le long d'une droite que nous appellerons *la droite singulière.* La section qu'il fait à la surface est composée de cette droite, prise deux fois, et d'une section résidue d'ordre $n-2$, qui est tangente à la droite singulière, et qui a sur elle, en un point différent du point de contact, un point quadruple; nous appellerons ce point *le point singulier* du plan. — La section faite à la surface par un plan passant par la droite singulière est composée de cette droite et d'une section résidue d'ordre $n-1$, dont deux branches sont tangentes à la droite singulière au point singulier, et une branche, qui fait une inflexion, au point de contact de la même droite avec la section faite par le plan-clos. — La section faite par un plan passant par *le point singulier* y a un point de contact de trois branches, tangentes au plan-clos. Le plan-clos est, au même point, tangent — mais non pas osculateur — à quatre branches de la courbe cuspidale; il est aussi tangent, le long de quatre droites passant par le point singulier, à la développable tangente à la surface le long de sa courbe cuspidale. Une branche simple de la courbe parabolique est, au même point, tangente au plan-clos. — Le plan-clos est osculateur, au *point de contact de sa section résidue avec la droite singulière,* à la courbe cuspidale, qui y est tangente à la droite singulière. L'arête cuspidale de la développable tangente à la surface le long de sa courbe cuspidale a, en ce point, la même tangente et le même plan osculateur.

Nous voyons que la droite joignant un point P de l'espace au point singulier d'un plan-clos est génératrice quadruple du cône qui projette la courbe cuspidale; elle compte donc pour 6 des h génératrices doubles de ce cône. N'ayant avec la surface que trois intersections coïncidentes, elle n'appartient pas aux droites dont le nombre est indiqué par le

premier membre de l'équation (18)*). Il faut donc, dans le second membre de cette équation, soustraire $6\chi'$ du nombre h.

Désignons par T un point placé, à une distance infiniment petite du premier ordre du point singulier S d'un plan-clos, sur une des quatre branches de la courbe cuspidale. Alors la section faite par le plan PST a au point S un point de contact de trois branches, dont les deux tendent à former un point de rebroussement de seconde espèce, pendant que la courbure de la troisième branche diffère, en général, d'une quantité finie de celles des deux premières. Cette branche rencontre donc la droite PT en un point U dont la distance de T est infiniment petite du second ordre. Il s'ensuit que $2 \cdot 4$ des coïncidences indiquées par le premier membre de l'équation (15)**) ont lieu en S. Nous avons donc prouvé que le second membre de cette équation doit contenir un terme $8\chi'$.

On déduit aussi des propriétés du point singulier d'un plan-clos le coëfficient $3 \cdot 4 = 12$ du terme $12\chi'$ de l'équation (22^b) (voir le n° 8.). Le terme χ de la même équation résulte de la définition d'un point-clos.

VII.

Points biplanaires (B) et plans biponctuels (B').

29. *Un point biplanaire est un point double de la surface où le cône tangent s'est décomposé en deux plans.* Cette définition, qui est *ponctuelle*, s'applique, *en particulier*, à tous les points d'une courbe double; mais en attribuant expressément à notre surface une courbe double, nous n'aurons ici à nous occuper que des points dont les propriétés résultent, en *général*, de la définition si l'on regarde la surface comme lieu de points. Nous appellerons les deux plans dont se compose le cône tangent les *plans tangents singuliers*, et leur droite d'intersection *la tangente singulière*.

Une section plane par un point biplanaire B y a un point double, dont les branches sont tangentes aux droites d'intersection du plan avec les deux plans singuliers. Ces deux tangentes coïncideront, et le point singulier de la section deviendra stationnaire, si le plan passe par la tangente singulière.

Les droites par B qui se trouvent dans un plan tangent singulier rencontrent la surface en trois points coïncidents. B est donc un point triple de la section faite par ce plan.

En résumé, *une droite quelconque par un point biplanaire rencontre la surface en deux points coïncidents, les droites des plans tangents sin-*

*) Voir le n° 6.
**) Voir le n° 6.

guliers, en trois, et trois droites de chacun de ces plans, en quatre. La section faite par un plan quelconque par le point biplanaire y a un point double, celle que fait un plan par la tangente singulière, un point stationnaire, et celles que font les deux plans tangents stationnaires, des points triples. Les six droites qui rencontrent la surface en quatre points coïncidents s'appellent les *tangentes principales.*

Quant à la figure d'une surface dans le voisinage d'un point biplanaire nous renvoyons à la déscription qu'en fait M. Klein dans son mémoire sur les surfaces du troisième ordre*), et aux figures qu'il a fait suivre à ce travail. Les surfaces qui y sont représentées n'étant que du troisième ordre, les sections faites par les plans tangents singuliers sont composées de trois droites.

30. *Représentation analytique.* Si l'on prend un point biplanaire d'une surface pour origine des coordonnées, et les deux plans tangents singuliers pour plans $y = 0$, $z = 0$, l'équation de la surface aura la forme suivante

$$yz + \varphi = 0, \tag{I}$$

où tous les termes de φ sont d'un degré supérieur au deuxième.

Cette équation montre toutes les propriétés des points biplanaires que nous avons indiquées dans le n° précédent. Nous l'appliquerons à la détermination des tangentes aux branches de la courbe parabolique qui sont tangentes au plan singulier $z = 0$, sans être tangentes à la tangente singulière**).

On peut déduire de l'équation (I) une série servant à exprimer l'ordonnée z d'un point de la surface qui se trouve à une distance petite du point biplanaire sur une sécante par ce point qui fait un angle petit avec le plan $z = 0$. Cette série, développée suivant des termes de degré ascendant par rapport à x et y, commencera par

$$z = \frac{ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3}{y} + \cdots. \tag{II}$$

On en déduit

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{9(-ax^2+cy^2)^2 - 12(ax+by)(ax^3+dy^3)}{y^4}.$$

En y égalant le numérateur à zero, on aura l'équation de quatre droites tangentes à la courbe parabolique. Les quatre nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui correspondent à ces branches de la courbe parabolique sont tangentes au plan singulier $z = 0$. (Comparer au n° 23.)

---

*) Mathematische Annalen VI.

**) Nous verrons dans les n^{os} suivants que la tangente singulière n'est tangente à aucune branche de la courbe parabolique.

31. *Cône circonscrit quelconque.* La section faite par un plan passant par un point biplanaire B, ayant à ce point un point double, qui n'est pas un point d'intersection avec la courbe double, est de la classe $a-2$. On dit que le point B en est un „sommet double“*). De même, le point stationnaire de la section faite par un plan passant par la tangente singulière étant un sommet triple, cette section est de la classe $a-3$. On voit donc que deux génératrices d'intersection d'un cône circonscrit, dont nous appelons le sommet P, avec un plan passant par PB coïncident avec cette droite, trois si le plan passe aussi par la tangente singulière. *La droite PB est donc une génératrice stationnaire du cône circonscrit, et le plan tangent le long d'elle passe par la tangente singulière.*

La droite PB ne rencontrant la surface qu'en deux points coïncidants, ne rencontrera la première polaire de P qu'en un seul point coïncidant avec eux. Il en résulte que PB n'est pas tangente en B à la courbe de contact du cône circonscrit. Ce cône ayant PB pour génératrice stationnaire, il faut que B soit un point stationnaire de la courbe de contact.

PB est génératrice stationnaire du cône circonscrit sans appartenir au nombre indiqué par le premier membre de l'équation (13)**). Il faut donc, dans le second membre de cette équation, soustraire B du nombre total $\varkappa$ des génératrices stationnaires.

Il serait plus difficile de déterminer directement le coëfficient 4 du terme $4B$ du second membre de l'équation (20^b) dans le n° 8.; mais on peut faire l'usage inverse de cette équation déduite de celles du n° 3.: la valeur du coëfficient que nous venons de nommer nous montre, que le lieu des tangentes principales que contiennent les plans tangents passant par P a deux nappes ayant l'une avec l'autre un contact du premier ordre le long de la tangente singulière en B.

32. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point P d'un plan tangent singulier à un point biplanaire B.* On voit par les procédés ordinaires que ce cône, qui ne se décompose pas, a trois nappes tangentes, le long de PB, au plan tangent singulier. Les équivalents de cette singularité ont les valeurs de $\begin{pmatrix}6,&0\\6,&0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}3,&2\\3,&2\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0,&4\\0,&4\end{pmatrix}$. Selon le n° 30., seulement les dernières de ces valeurs sont possibles, ce qu'on peut aussi voir indépendemment de la représentation analytique, en remarquant que la droite PB qui ne rencontre la surface qu'en trois points coïncidents, ne peut appartenir aux δ génératrices doubles du cône circonscrit.

---

*) Voir la note du n° 15.

**) Voir la démonstration de cette formule dans le n° 6.

On voit donc que le plan tangent singulier n'est pas tangent à la développable bitangente.

Si le sommet P se trouve sur une des tangentes aux branches du point triple de la section faite par le plan tangent singulier, ou sur une de ses quatre génératrices de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, le cône subira aux mêmes altérations que nous avons indiquées pour les cas analogues dans le n° 24.

33. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point biplanaire B.* Quatre des tangentes qu'on peut mener de B à une section plane par ce point, qui est de la classe $a-2$, coïncident avec les tangentes en ce point. L'ordre du cône résidu est donc égal à $a-6$.

Trois des plans tangents qu'on peut mener à la surface par une droite quelconque passant par B, coïncident, selon le n° 31., avec le plan passant par la tangente singulière. La classe du cône résidu est donc égal à $n'-3$.

La section faite par un plan tangent singulier est de la classe $a-6=a_1$. Les génératrices d'intersection de ce plan avec le cône résidu sont les $a-6$ tangentes à la section qui passent par B. Avec chacune des trois tangentes aux branches du point triple coïncident deux de ces tangentes, mais seulement une des génératrices d'intersection du cône avec un autre plan passant par elle. On voit donc que *les plans tangents singuliers sont plans tangents triples du cône résidu.*

La tangente singulière n'est pas génératrice du cône résidu. Par elle passent, à côté des deux plans tangents triples, $n_1'-6=n'-9$ autres plans tangents au cône résidu. Nous avons vu que le plan joignant une droite quelconque par B à la tangente singulière compte pour trois plans tangents menés à la surface par la droite*). Il en résulte que chacun des $n'-9$ plans trouvés compte pour trois des b' plans tangents doubles qui passent par B. Si l'on place le sommet d'un cône circonscrit en un point quelconque d'un de ces plans, celui-ci sera tangent au cône le long d'une génératrice stationnaire PB, et le long d'une génératrice ordinaire, et ne comptera, par conséquent, que pour un seul plan tangent double. Si P se trouve sur la droite joignant B à l'autre point de contact, les deux génératrices de contact coïncideront, et le plan comptera par conséquent pour deux plans tangents doubles. Nous voyons ainsi que les $n'-9$ *plans passant par la tangente singulière et tangents à la surface en d'autres points sont des plans tangents simples de la développable bitangente, et que leurs points d'oscu-*

*) On dit, dans le langage de la théorie des systèmes de courbes, qu'une section plane du cône circonscrit total au sommet B, a, à la trace de la tangente singulière, un sommet triple. Avec chacune des tangentes par ce point à la section du cône résidu coïncident trois tangentes doubles de la section du cône total.

*lation avec l'arête cuspidale de cette développable se trouvent au point biplanaire**).

De même que les courbes de contact de cônes circonscrits (voir le n° 31.) les $n' - 9$ branches de la courbe de contact de la développable bitangente qui passent par B y auront des points stationnaires, ce qu'on prouve par des raisonnements semblables.

Ayant deux plans tangents triples, qui ne sont pas même plans tangents doubles de la surface, et ayant perdu $3(n'-9)$ plans tangents doubles, le cône résidu aura

$$b_1' = b' + 6 - 3(n'-9) = b' - 3n' + 33$$

plans tangents doubles.

Les nombres plückériens du cône résidu auront donc les valeurs de

$$a_1 = a - 6, \quad \delta_1 = \delta - 6a + 60, \quad \varkappa_1 = \varkappa - 25,$$
$$n_1' = n' - 3, \quad b_1' = b' - 3n' + 33, \quad c_1' = c' - 16.$$

Il résulte des n^{os} précédents qu'avec chacun des plans singuliers coïncident (au moins) 8 des plans tangents stationnaires qui passent par B. La valeur de c' montre, que ces plans sont les seuls plans tangents stationnaires qui passent par B. *Chacun des plans tangents singuliers en un point biplanaire est plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires*; *les génératrices de contact, mais non pas les branches correspondantes de l'arête de rebroussement de la développable, passent par le point biplanaire.*

34. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T de la tangente singulière en un point biplanaire B.* On voit immédiatement que $a_1 = a$, et l'on déduit du n° 31. que $n_1' = n' - 1$.

Un plan passant par la tangente singulière rencontre, en général, le cône en quatre génératrices coïncidentes, et les deux plans tangents singuliers le rencontrent en 6. Ces deux plans sont les seuls plans tangents le long de la génératrice singulière; ils jouent tous deux le même rôle: il faut donc que la singularité du cône soit formée de deux couples de nappes tangentes entre elles. Les plans tangents à ces nappes comptent pour quatre plans tangents doubles du cône résidu, pendant qu'aucun de ses plans tangents stationnaires n'a la droite TB pour génératrice de contact. Les valeurs de b_1' et c_1' se déduisent sans difficulté de ces faits et des résultats trouvés dans les n^{os} précédents. On trouve ainsi

$$a_1 = a, \qquad \delta_1 = \delta + 8, \qquad \varkappa_1 = \varkappa - 5,$$
$$n_1' = n' - 1, \quad b_1' = b' - n' + 13, \quad c_1' = c' - 8.$$

---

*) Les propriétés réciproques des points d'intersection de la droite singulière d'un plan biponctuel (voir le n° 35.) avec la courbe double se présentent peut-être mieux aux yeux.

Huit génératrices doubles du cône résidu étant réunies dans la génératrice singulière TK, nous voyons que cette droite est la position limite de cinq des $\varkappa$ génératrices cuspidales, et d'aucune des δ génératrices doubles d'un cône circonscrit dont le sommet s'approche de la droite BT. Le dernier de ces faits est évident *a priori*.

35. *Plans biponctuels.* — Un plan biponctuel est *un plan tangent à la surface le long d'une conique-limite composée de deux points* (sommets). Cette définition, étant *tangentielle*, exprime que deux des plans tangents qui passent par une droite quelconque du plan biponctuel, et trois de ceux qui passent par une droite appartenant à un de deux faisceaux qui se trouvent dans le même plan, coïncident avec lui. Nous appelons les centres de ces faisceaux les *points singuliers du plan biponctuel.*

Nous signalerons, parmi les propriétés de ces plans singuliers, les suivantes:

La section faite à la surface par un plan biponctuel est composée de la droite joignant les deux points singuliers, que nous appellerons *la droite singulière*, prise trois fois, et d'une section résidue d'ordre $n-3$, qui a les deux points singuliers pour points triples. — La section faite à la surface par un plan passant par la droite singulière est composée de cette droite et d'une section résidue d'ordre $n-1$, dont deux branches sont tangentes à la droite singulière en chacun des deux points singuliers. — La section faite par un plan passant par un point singulier y a un point de contact de trois branches, tangentes au plan biponctuel. Ce plan est, en chacun des points singuliers, tangent — mais non pas osculateur — à quatre branches de la courbe cuspidale; il est aussi tangent, le long de quatre droites passant par chacun de ces deux points, à la développable tangente à la surface le long de sa courbe cuspidale.

Les propriétés des deux points singuliers d'un plan biponctuel qui ont rapport à la courbe cuspidale étant identiques à celles du point singulier d'un plan-clos, il faut que les équations (15), (18) et (22^b) contiennent des termes où le nombre B' est multiplié du double du coëfficient de χ'.

VIII.

Points uniplanaires (U) et plans uniponctuels (U').

36. *Un point uniplanaire est un point double de la surface où le cône tangent est un plan double* (que nous appellerons *le plan tangent singulier*). Toutefois, ayant attribué expressément à la surface une courbe double et une courbe cuspidale, nous ne comprenons au nombre de ces points ni les points de la courbe cuspidale, ni ceux de la courbe

double qui satisfont à la définition, qui est ponctuelle [points-pinces*) ou les points dont nous avons parlé dans notre article sur une classe de points singuliers de surfaces].

La définition conduit d'une manière très-simple aux propriétés suivantes des points uniplanaires:

Une droite quelconque par un point uniplanaire rencontre la surface en deux points coïncidents, les droites du plan tangent singulier, en trois, et trois droites de ce plan — que nous appellerons *les tangentes singulières — en quatre. La section faite par un plan quelconque par le point uniplanaire y a un point stationnaire, celles que font les plans passant par les tangentes singulières, des points de contact de deux branches, et celle que fait le plan tangent singulier, un point triple.*

Nous verrons dans les n^{os} suivants que *par chacune des tangentes singulières passent deux plans dont les sections ont des points de rebroussement de seconde espèce.*

Les propriétés ponctuelles d'un point uniplanaire nous montrent que *la droite qui le joint au sommet d'un cône circonscrit est génératrice triple de ce cône*, ce qui explique les termes $-3U$ et $6U$ des équations (16) et (20^b).

Si les trois tangentes singulières sont réelles le point uniplanaire sera formé de trois nappes de la surface, qui ressemblent à trois semi-cônes aplatis qui ont le point singulier pour sommet. Si une seule tangente singulière est réelle, la singularité n'est formée que d'une seule nappe.

37. *Représentation analytique.* Si l'on prend un point uniplanaire pour origine, et le plan tangent singulier pour plan $z = 0$, l'équation de la surface aura la forme suivante

$$z^2 + \varphi = 0, \tag{I}$$

où tous les termes de φ sont d'un degré supérieur au deuxième.

On en déduit une série, servant à exprimer l'ordonnée z d'un point de la surface voisin du point uniplanaire, qui, ordonnée suivant des termes de degré ascendant par rapport à x et y, commencera par

$$z = \sqrt{ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3} + \cdots. \tag{II}$$

Les termes suivants ayant pour dénominateurs des puissances de cette racine carrée, la série n'est pas applicable aux cas où la droite joignant l'origine au point (x, y, z) fait un angle infiniment petit avec une des droites déterminées par l'équation

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0. \tag{III}$$

*) Toutefois les propriétés des points-pinces se présentent d'une manière très simple comme des cas particuliers de celles des points uniplanaires.

Ces droites sont évidemment les tangentes singulières. Pour déterminer les sections que font les plans passant par une de ces droites — que nous pourrons prendre pour axe $y=0$, $z=0$ — on peut se servir des mêmes procédés au moyen desquels nous avons déterminé, dans le n° 16., les sections faites par les plans passant par la tangente singulière en un point-pince. Les résultats qu'on trouve ici ne diffèrent pas de ceux que nous avons trouvés à l'endroit cité — ce que nous avons indiqué dans le n° précédent.

Nous pourrons appliquer la série (II) à la recherche des branches de la courbe parabolique qui sont tangentes au plan tangent singulier, sans être tangentes aux tangentes singulières. On trouve

$$\text{(IV)}\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{9\,[(b^2-ac)x^2+(bc-ad)xy+(c^2-bd)y^2]}{4\,(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)}+\cdots.$$

Les tangentes des branches cherchées seront donc déterminées par l'équation suivante

$$\text{(V)}\qquad (b^2-ac)x^2+(bc-ad)xy+(c^2-bd)y^2=0.$$

Il y a donc deux branches. Celles-ci sont doubles; car la série (IV) se décompose en deux, à cause du double signe de la racine carrée entrant aux termes non écrits. À ces deux signes correspondent des points de la surface placés de côtés différents du plan tangent singulier. Les deux branches partielles de chacune des deux branches doubles de la courbe parabolique se trouvent donc de côtés différents de ce plan. Les propriétés des sections planes nous montrent alors, que la distance des deux branches partielles — à une distance du point uniplanaire qui est infiniment petite du premier ordre — est infiniment petite de l'ordre $\frac{3}{2}$. Elles forment donc un point stationnaire.

Les deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui correspondent aux deux branches trouvées de la courbe parabolique sont évidemment tangentes au plan tangent singulier le long de droites passant par le point uniplanaire*).

Note. Nous verrons dans le n° suivant qu'on peut trouver indépendamment de la représentation analytique, que le plan tangent singulier est plan tangent double de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Alors on aura le moyen de trouver *sans calcul* l'équation (V) des tangentes des deux branches correspondantes de la courbe parabolique. En effet, son premier membre doit être un covariant de $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$, et il n'en existe qu'un seul qui soit du second degré.

*) On sait que les racines de l'équation (V) sont réelles, si une seule racine de (III) est réelle, imaginaires si toutes les racines de (III) sont réelles. On peut rendre ces résultats visibles par des modèles.

Le même raisonnement démontre, que la même équation représente les deux génératrices de contact du plan tangent singulier avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Il faut donc que l'un des deux cas suivants ait lieu: chacune des deux génératrices est tangente à la branche correspondante de la courbe parabolique, ou l'une est tangente à la branche qui correspond à l'autre. En cherchant les coordonnées du plan tangent en un point de l'une ou l'autre des deux branches*), on voit que c'est le dernier cas qui a lieu, ou bien, *que l'une des racines de l'équation* (V) *détermine la génératrice de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui correspond à la branche de la courbe parabolique dont la tangente se détermine par l'autre racine.*

38. *Cône circonscrit dont le sommet P se trouve dans le plan tangent singulier d'un point uniplanaire U.* Il résulte des propriétés exposées dans le n° 36., que la droite PU est génératrice quadruple, que el plan tangent singulier est le seul plan tangent au cône le long d'elle, et qu'il contient six génératrices coïncidentes. Nous avons prouvé, dans le n° 6. de notre article sur les *singularités des courbes planes*, que cette singularité, ou celle d'une section plane du cône, a les équivalents $\binom{5,\ 2}{2,\ 0}$ ou

$$\binom{3+q-3\alpha,\ 2+2\alpha}{q-3\alpha,\ 2\alpha},\quad q>2,\quad 0\leqq\alpha\leqq\frac{q}{3},$$

ou

$$\binom{q+2-3\beta,\ 3+2\beta}{q-1-3\beta,\ 1+2\beta},\quad q>2,\quad 0\leqq\beta\leqq\frac{q-1}{3}.$$

Les valeurs de q qui sont >3 correspondent aux cas où les nappes ont des contacts d'un ordre plus élevé que nécessaire pour former la singularité décrite. Nous essaierons donc, selon notre principe exposé dans la deuxième note du n° 19., de lui attribuer la valeur de 3. Alors les équivalents auront un des groupes suivants de valeurs**):

$$\binom{5,\ 2}{2,\ 0};\quad \binom{6,\ 2}{3,\ 0}\equiv\binom{3,\ 4}{0,\ 2};\quad \binom{5,\ 3}{2,\ 1}.$$

---

*) Comparer au n° 23. Grace aux considérations qui précèdent il suffit de considérer un cas particulier celui par exemple où $b=c=0$. Alors l'équation (V) se réduira à $xy=0$, et les coordonnées tangentielles X et Y sont déterminées par $2zX=-3ax^2+\cdots$, $2zY=-3dy^2+\cdots$. — On voit donc que $\lim\frac{x}{y}=0$ amène $\lim\frac{X}{Y}=0$.

**) Le quatrième groupe résulte d'une complication du deuxième; on n'aurait donc pas eu besoin d'avoir recours à celui-là que dans le cas actuel où le troisième, équivalent au deuxième, se montrera possible.

Nous pourrons déterminer directement le nombre de génératrices doubles du cône qui coïncident avec PU. En effet, ce nombre qui est égal, selon le n° 36., à trois pour une position quelconque du sommet P, ne s'augmente pas ici, où la droite PU, ne rencontrant la surface qu'en trois points coïncidents, ne peut être tangente double. Le seul des quatre groupes d'équivalents qui reste possible est donc $\binom{3,\ 4}{0,\ 2}$. On retrouve ainsi le résultat, trouvé dans le n° précédent par la représentation analytique, que le plan tangent singulier est plan tangent double de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. On voit en même temps qu'il n'est pas tangent à la développable bitangente.

[En faisant usage du résultat trouvé par la représentation analytique, on aurait pu éviter de faire aucune supposition sur la valeur de q dans les expressions générales des équivalents, du moins si l'on s'était assuré que le plan tangent singulier est seulement plan tangent simple de chacune des deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.]

Les valeurs trouvées des équivalents nous montrent*), que *deux nappes du cône circonscrit, tangentes au plan tangent singulier, ont la droite PU pour génératrice stationnaire.*

Si le sommet P se trouve sur une des deux génératrices de contact du plan tangent singulier avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, le cône circonscrit aura une singularité représentée par les équivalents $\binom{3,\ 5}{0,\ 3}$, qui sont compris dans les dernières expressions générales des équivalents pour $q = 4$, $\beta = 1$. Cette singularité est formée d'une seule nappe quadruple, dont une section plane a un point quadruple ressemblant à un point de rebroussement de seconde espèce.

39. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point uniplanaire U.* Le cône résidu est de l'ordre $a_1 = a - 6$ et de la classe $n_1' = n' - 6$, et il a *les trois tangentes singulières pour génératrices doubles***). Les plans tangents au cône le long d'elles font à la surface des sections douées de points de rebroussement de seconde espèce — ce que nous avons avancé dans le n° 36.

Par chacune des tangentes singulières passent $n_1' - 4 = n' - 10$ plans tangents au cône le long d'autres génératrices. Chacun de ces plans compte pour deux des b' plans tangents doubles qui passent par le point U, pendant que le plan tangent singulier n'est plan tangent

*) Voir le n° 6. de l'article sur *les singularités des courbes planes.*
**) Comparer au n° 17.

double ni à la surface (n° 38.), ni au cône résidu. On trouve ainsi le nombre b_1' et ensuite les autres nombres plückériens du cône résidu:

$$a_1 = a - 6, \quad \delta_1 = \delta - 6a + 60, \quad \varkappa_1 = \varkappa - 24,$$
$$n_1' = n' - 6, \quad b_1' = b' - 6n' + 60, \quad c_1' = c' - 24.$$

Les singularités des tangentes singulières n'étant pas différentes de celles de la tangente singulière en un point-pince, il faut que $3 \cdot 6 = 18$ des plans tangents stationnaires perdus coïncident avec les plans tangents le long des trois tangentes singulières. Les $2 \cdot 3$ autres doivent coïncider avec le plan tangent singulier, trois pour chacune des deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui sont tangentes à ce plan. On voit donc que toutes les huit branches de l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui correspondent aux huit nappes de cette développable qui passent par U, passent par ce même point. Ce résultat est, pour les deux nappes qui sont tangentes au plan tangent singulier, d'accord avec le fait, prouvé dans le n° 37., que les deux branches correspondantes de la courbe parabolique ont des points stationnaires en U.

40. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T d'une tangente singulière en un point uniplanaire U.* On voit immédiatement que $a_1 = a$, $n_1' = n' - 1$. La droite TU est génératrice 6-tuple, et les seuls plans tangents le long d'elle sont le plan tangent singulier et les deux autres plans tangents stationnaires qui passent par TU. Aucun de ces plans ne contient plus de sept génératrices coïncidentes. Il serait possible d'expliquer ce fait de deux manières différents; mais en ayant égard aux résultats trouvés pour un point-pince dans le n° 18., on se décidera pour l'explication suivante: la singularité du cône est formée de trois nappes doubles, formant des génératrices stationnaires. Aucun des trois plans tangents n'étant plan tangent double ni à la surface, ni au cône circonscrit, on trouve de la manière ordinaire la valeur de b_1', et ensuite celles des autres nombres plückériens du cône résidu:

$$a_1 = a \quad , \quad \delta_1 = \delta + 5 \quad , \quad \varkappa_1 = \varkappa - 3,$$
$$n_1' = n' - 1, \quad b_1' = b' - n' + 10, \quad c_1' = c' - 6.$$

Deux des six plans tangents stationnaires perdus coïncident avec le plan tangent singulier; chacun des deux autres plans tangents au cône le long de TU comptent pour deux plans tangents stationnaires, TU étant leur génératrice de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires.

La génératrice singulière du cône résidu représente douze génératrices doubles et trois génératrices stationnaires. Les expressions trouvées des nombres plückériens nous montrent qu'elle est la position limite

de sept génératrices doubles et de six génératrices stationnaires d'un cône circonscrit dont le sommet s'approche de la droite UT.

41. *Résultats.* En plaçant, comme dans le n° 19., le sommet d'un cône circonscrit sur un des plans tangents stationnaires qui ont la droite UT pour génératrice de contact avec l'enveloppe de ces plans, on aura le moyen d'étudier la branche de la courbe parabolique qui y correspond. On trouve ainsi les mêmes résultats qu'à l'endroit cité. En les ajoutant à ceux que nous avons trouvés dans les n^{os} précédents, nous pourrons énoncer que

Chacune des trois tangentes singulières en un point uniplanaire est génératrice de deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface; leurs points de contact avec l'arête cuspidale de cette développable se trouvent au point uniplanaire. Les six branches correspondantes de la courbe parabolique ont, au point uniplanaire, des contacts du troisième ordre avec l'arête cuspidale. — Le plan tangent singulier est tangent à deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Les branches correspondantes de l'arête cuspidale de cette développable passent par le point uniplanaire. Les branches correspondantes de la courbe parabolique ont, en ce points, des points stationnaires.

Nous voyons ainsi que huit coïncidences de points de la courbe parabolique avec les points correspondants de l'arête cuspidale de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, ont lieu en un point uniplanaire, et que six de ces coïncidences comptent chacune pour deux. Nous avons donc rendu compte du coëfficient $14 = 2 \cdot 6 + 2$ que nous avons attribué à U dans l'équation (19) (voir le n° 7.).

42. *Plans uniponctuels. Un plan uniponctuel est un plan tangent double d'une surface où les tangentes forment un faisceau.* La définition, étant *tangentielle*, exprime que deux des plans tangents qui passent par une droite quelconque du plan, et trois de celles qui passent par une droite du faisceau, coïncident avec ce même plan. Nous appelons le centre du faisceau *le point singulier* du plan uniponctuel.

La section faite à la surface par un plan uniponctuel est composée de trois droites passant par le point singulier, que nous appellerons les *droites singulières*, prises deux fois, et d'une section résidue ayant ces droites pour tangentes doubles. La surface a aux six points de contact de ces tangentes doubles les mêmes propriétés qu'aux points de contact de la droite singulière d'un plan-pince avec la section résidue de ce plan (voir le n° 21.). La section faite par un plan passant par une droite singulière est composée de cette droite et d'une section résidue qui a la droite pour tangente d'inflexion soit aux deux points de contact avec la section résidue du plan uniponctuel, soit au point singulier. — La section faite par un autre plan par *le point singulier* a, en ce point,

deux branches faisant des inflexions; les tangentes d'inflexion coïncident avec la droite d'intersection du plan avec le plan uniponctuel. — Deux branches de la courbe cuspidale de la surface ont, au point singulier, le plan uniponctuel pour plan osculateur. Chacune des nappes correspondantes de la développable tangente à la surface le long de la courbe cuspidale, a le plan uniponctuel pour plan tangent stationnaire.

Le point singulier d'un plan uniponctuel, qui est un point double de la courbe cuspidale, n'étant qu'un point double de la surface, il faut soustraire, dans le second membre de l'équation (18), le nombre U' du nombre total h des génératrices doubles d'un cône projetant la courbe cuspidale.

Les propriétés indiquées d'un plan uniponctuel nous montrent aussi que le second membre de l'équation (22^b) (voir le n° 8.) doit contenir U'; mais nous n'insisterons pas ici à la détermination directe de son coëfficient, qu'on peut déduire des autres équations.

IX.

Plans osculateurs (O) et points osculateurs (O').

43. Nous dirons qu'un *plan dont la section a, en un point simple de la surface, un point triple est osculateur à la surface*; nous appellerons le point triple de la section *le point d'osculation*, et les trois tangentes en ce point les *tangentes principales* du plan osculateur.

Il résulte de la définition que les droites du plan osculateur qui passent par le point d'osculateur rencontrent la surface en trois points coïncidents, les tangentes principales, en quatre; que le plan osculateur est osculateur aux courbes de la surface qui passent par le point d'osculation; qu'une section plane passant par ce point y a la droite d'intersection avec le plan osculateur par tangente d'inflexion; et que la section faite par un plan passant par une tangente principale a, au point d'osculation, un contact quatreponctuel avec cette droite. Toutes les courbes qui sont tangentes aux tangentes principales au point d'osculation auront un contact quatreponctuel avec le plan osculateur.

44. *Représentation analytique.* Si l'on prend le plan osculateur pour plan $z = 0$, et le point d'osculation pour origine, l'équation de la surface aura la forme suivante

$$z + \varphi = 0, \tag{I}$$

où tous les termes de φ sont d'un degré supérieur au deuxième.

On en déduit une série servant à exprimer l'ordonnée z d'un point de la surface voisin du point d'osculation, qui, ordonnée suivant des termes de degré ascendant par rapport à x et y, commencera par

$$z = (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + (ex^4 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot\cdot. \tag{II}$$

Les tangentes principales sont déterminées par l'équation

$$(III) \qquad ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0.$$

On trouve sans difficulté que deux branches de la courbe parabolique, dont les tangentes sont déterminées par l'équation:

$$(IV) \qquad (b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2 = 0,$$

passent par le point singulier. Elles sont réelles ou imaginaires suivant que le nombre de tangentes principales réelles est égal à un ou trois. — La génératrice de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui correspond à l'une des deux branches de la courbe parabolique est tangente à l'autre (voir la note du n° 37.).

45. *Cône circonscrit dont le sommet se trouve en un point P d'un plan osculateur.* Ce cône ne se décompose pas. La droite joignant P au point d'osculation O est génératrice double, et six droites d'intersection du cône avec le plan osculateur, qui est le seul plan tangent le long d'elle, coïncident avec elle.

Une section plane de ce cône aura un point double Q à une seule tangente Q qui rencontre la section en six points coïncidents. Alors il résulte du théorème 1 de mon article sur les *singularités de courbes planes*, que quatre des tangentes à la section qui passent par un point quelconque de la tangente (Q), et six de celles qui passent par le point Q, coïncident avec la droite (Q). On voit donc que la singularité est réciproque à celle que nous avons rencontrée dans le n° 38. Il faut donc essayer d'attribuer à ses équivalents plückériens un des groupes suivants de valeurs:

$$\binom{2,\ 0}{5,\ 2};\quad \binom{3,\ 0}{6,\ 2} \equiv \binom{0,\ 2}{3,\ 4};\quad \binom{2,\ 1}{5,\ 3}.$$

Or la droite PO, ne rencontrant la surface qu'en trois points coïncidents, ne peut être génératrice double du cône circonscrit. Le seul des quatre groupes d'équivalents qui reste possible est donc $\binom{0,\ 2}{3,\ 4}$. Il s'ensuit que *deux nappes du cône circonscrit, ayant des contacts du second ordre avec le plan osculateur, passent par PO.*

Nous voyons donc que trois des b' plans tangents doubles et quatre des c' plans tangents stationnaires de la surface qui passent par un point P du plan osculateur coïncident avec lui. N'ayant trouvé que deux branches correspondantes de la courbe parabolique, nous voyons que le plan osculateur est deux fois plan tangent stationnaire de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface.

Si le sommet se trouve sur une des génératrices de contact du plan osculateur avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, le cône

circonscrit aura une singularité représentée par les équivalents $\begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 3, & 5 \end{pmatrix}$. Elle est formée d'une seule nappe double, dont une section plane a un point de rebroussement de seconde espèce dont les deux branches partielles ont entre elles un contact de l'ordre $\frac{7}{2}$, et, avec le plan osculateur, un contact du second ordre.

46. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T d'une tangente principale en un plan osculateur.* Le cône ne se décompose pas. La tangente principale en est une génératrice triple, et sept génératrices d'intersection du cône avec le plan osculateur, qui est le seul plan tangent le long d'elle, coïncident avec elle.

Pour trouver les équivalents de cette singularité nous appliquerons la représentation analytique à l'étude des ordres des angles infiniment petits des génératrices d'intersection avec un plan par T dont la distance du point singulier O est infiniment petite du premier ordre. Prenant la tangente principale OT pour axe $y = 0$, $z = 0$, nous pourrons représenter ce plan par l'équation $y = k$, où k est un constant qui est infiniment petit du premier ordre; car les formes des équations ne s'altèrent pas si l'on suppose que les coordonnées soient, au lieu de cartésiennes, des coordonnées tétraëdriques, où T peut être le sommet $y = z = 0$, $x = \infty$.

Les points de contact, voisins de O, de tangentes à la section qui passent par T se déterminent, selon l'équation (II) du n° 44., où à présent $a = 0$, par

$$\text{(V)} \qquad \frac{dz}{dx} = 3(2bx + ck)k + (4ex^3 + \cdots) + \cdots = 0.$$

On en déduit une valeur de x qui est infiniment petite du premier ordre, et deux qui sont infiniment petites de l'ordre $\frac{1}{2}$. A la première correspond, selon l'équation (II), une valeur de z qui est infiniment petite du troisième ordre, et aux autres, deux valeurs de z qui sont infiniment petites du second ordre, et dont la différence est infiniment petite de l'ordre $\frac{5}{2}$. Les angles des tangentes par T avec le plan $z = 0$, et entre elles, étant des mêmes ordres que ces quantités infiniment petites, on voit que *la singularité du cône est formée d'une nappe simple rencontrée par le plan osculateur en trois génératrices coïncidentes, et d'une nappe double dont une section plane a un point de rebroussement de seconde espèce ordinaire.*

Les équivalents de cette singularité ont pour valeurs principales $\begin{pmatrix} 5, & 1 \\ 7, & 2 \end{pmatrix}$, qu'on peut remplacer par $\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 4 \end{pmatrix}$. Ce dernier groupe de valeurs est, selon les résultats trouvés dans le n° précédent, le seul pos-

sible. Quatre des plans tangents stationnaires, et quatre des plans tangents doubles qui passent par T coïncident avec le plan osculateur. La dernière circonstance nous montre, que les tangentes principales sont les génératrices de contact du plan osculateur avec la développable bitangente, ce qui résulte aussi du fait que ces droites sont les seules qui rencontrent la surface en quatre points coïncidant avec O.

Nous verrons dans le n° suivant que le point O n'est pas point de contact d'une tangente principale avec l'arête de rebroussement de la développable bitangente. Nous pourrons donc appliquer les recherches que nous venons de faire au cas où le sommet T se trouve en ce point de contact. Alors le plan $y = k$ passera par une génératrice de la développable bitangente qui est infiniment voisine d'une tangente principale, et les points de contact de cette génératrice seront ceux que déterminent les valeurs de x qui sont infiniment petites de l'ordre $\frac{1}{2}$. On voit ainsi que la tangente principale a un contact simple avec la courbe de contact de la développable bitangente. L'ordre des valeurs correspondantes de z montre, que le contact du plan osculateur avec la même courbe est du troisième ordre. La branche de la courbe de contact n'étant que simple, il faut que par le plan osculateur se fasse une transition de plans tangents doubles aux contacts réels à d'autres dont les points de contact sont imaginaires. — Pour la présente position de T les équivalents auront les valeurs de $\binom{3,\ 3}{5,\ 4}$.

47. *Cône circonscrit ayant pour sommet le point d'osculation O d'un plan osculateur.* On trouve sans difficulté que $a_1 = a - 3$, $n_1' = n'$. — $a - 12 = a_1 - 9$ des génératrices d'intersection du cône résidu avec le plan osculateur sont tangentes à la surface en des points différents de O. Les autres doivent coïncider avec les trois tangentes principales, trois avec chacune d'elles; car les propriétés des différentes sections planes par O nous montrent qu'aucune autre tangente en O ne devient génératrice du cône résidu.

Le *plan osculateur est donc* 12 *fois plan tangent double et* 3 *fois plan tangent stationnaire du cône résidu.* Si nous supposons qu'il compte pour X plans tangents à chacune des trois nappes de la développable bitangente qui y sont tangentes, et pour Y plans tangents à chacune des deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui ont avec lui un contact du second ordre, nous saurons que $X \geq 2$, $Y \geq 3$; car les génératrices de contact de ces nappes passent par O. Les nombres b_1' et c_1' des plans tangents singuliers du cône résidu auront les expressions suivantes

$$b_1' = b' + 12 - 3X, \quad c_1' = c' + 3 - 2Y.$$

On peut donc déduire de la deuxième équation plückérienne

$$n_1'(n_1'-1) = a_1 + 2b_1' + 3c_1',$$

que

$$6X + 6Y = 30,$$

dont la seule solution conforme aux conditions que nous venons de nommer est $X = 2$, $Y = 3$, ce qui montre qu'aucune des arêtes cuspidales des deux développables ne passe par O.

On trouve maintenant

$$a_1 = a - 3, \quad \delta_1 = \delta - 3a + 24, \quad \varkappa_1 = \varkappa - 12,$$
$$n_1' = n', \quad b_1' = b' + 6, \quad c_1' = c' - 3.$$

48. *Résultats. Le plan osculateur est deux fois plan tangent stationnaire à l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Les génératrices de contact passent par le point d'osculation; mais leurs points de contact avec l'arête cuspidale de la développable ne se trouvent pas au point d'osculation.* L'équation (19) ne contiendra donc pas O.

Le plan osculateur est tangent à la développable bitangente le long des trois tangentes principales, qui sont aussi tangentes aux branches correspondantes de la courbe de contact de cette développable. Leurs points de contact avec l'arête cuspidale de la développable ne se trouvent pas au point d'osculation.

49. *Points osculateurs.* Nous dirons que *le sommet d'un cône circonscrit qui a pour plan tangent triple un plan tangent simple de la surface, est un point osculateur de la surface*; nous appellerons le plan tangent triple du cône le *plan d'osculation* et les génératrices de contact les *axes principaux*.

Les propriétés tangentielles du point osculateur, dont la définition est tangentielle, se déduisent sans aucune difficulté, au moyen du principe de dualité, des propriétés ponctuelles, exposées dans le n° 43., des plans osculateurs. Nous nous bornerons à nommer quelques unes des propriétés ponctuelles des points osculateurs, qu'on trouve en appliquant le principe de dualité aux résultats trouvés dans les n^{os} 44—48.

Un point osculateur est un point quadruple de la surface. La section d'un plan quelconque passant par lui y a deux branches doubles, formant des points stationnaires, et tangentes au plan d'osculation. — La section faite par le plan d'osculation a au point osculateur trois branches, formant des points stationnaires, et tangentes aux trois axes principaux. — Le point osculateur est point stationnaire de deux branches de la courbe cuspidale. Les tangentes à ces branches — dont chacune est en même temps génératrice de contact du plan d'osculation avec la développable tangente à la surface le long de l'autre branche de la courbe cuspidale — sont deux droites distinctes du plan d'osculation. La section faite par un plan passant par une de ces droites

a une singularité $\binom{3,\ 5}{0,\ 3}$, formée d'une seule branche quadruple, et qu'on peut représenter par une équation de la forme*)

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^2 + cx^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Trois branches de la courbe double passent par le point osculateur où elles sont tangentes aux axes principaux. Ces mêmes droites sont génératrices de contact du plan d'osculation avec la développable tangente à la surface le long de sa courbe double. Le point osculateur est point stationnaire des trois branches correspondantes de l'arête de rebroussement de cette développable. La section faite par un plan passant par un des axes principaux a, au point osculateur, deux branches doubles tangentes à cet axe: l'une forme un point stationnaire, l'autre un point de rebroussement de seconde espèce. — Le plan d'osculation n'est osculateur à aucune des branches de la courbe double ou cuspidale.

On voit qu'avec la droite joignant un point P de l'espace à un point osculateur O' coïncident 3 génératrices doubles du cône, au sommet P, qui projette la courbe double, 4 génératrices doubles et 2 génératrices stationnaires du cône projetant la courbe cuspidale, et 12 génératrices d'intersection de ces deux cônes. Voilà l'explication des termes $2\,O'$ des équations (11) et (12), et des deux premiers termes contenant O' dans les équations (17) et (18) (dans leurs premières formes).

Les propriétés des sections planes passant par un point osculateur O' montrent, que la droite joignant P à un point Q de la courbe double dont la distance de O' est infiniment petite du premier ordre, rencontre encore la surface en deux points dont les distances de Q, de même que la distance de l'un à l'autre, sont infiniment petites de l'ordre $\frac{3}{2}$; et que la droite joignant P à un point R de la courbe cuspidale dont la distance de O' est infiniment petite du premier ordre, rencontre encore la surface en deux points dont les distances de Q sont infiniment petites de l'ordre $\frac{3}{2}$, pendant que la distance de l'un à l'autre est de l'ordre $\frac{9}{4}$. Ces indications contiennent les explications du coëfficient $9 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}$ des termes $9 \cdot O'$ dans les équations (14) et (17), du coëfficient $12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}$ du terme $12 \cdot O'$ de l'équation (15), et du coëfficient $18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{9}{4}$ du terme $18 \cdot O'$ de l'équation (18).

*) Voir le n° 6. de l'article sur *les singularités des courbes planes*. Comparer aussi au n° 38. du présent article.

Le terme $3 \cdot O'$ de l'équation (21) résulte de la coïncidence des plans tangents en chacun des trois points de la courbe double qui coïncident avec le point osculateur. On voit aussi sans difficulté que le second membre de l'équation (22^b) doit contenir O'; mais nous n'insisterons pas ici à la détermination directe de son coëfficient, qu'on peut déduire des autres équations.

Note. En considérant les formules du n° 3. on voit que les plans osculateurs n'ont sur les nombres de Salmon que l'influence suivante assez limitée: *si l'on attribue à une surface déjà connue O plans osculateurs, il faudra seulement substituer* $t' - O$, $r' - O$, $m' - 4O$, $h' + 2O$, $\beta' - 3O$ *à* t', r', m', h', β'. *L'influence des points osculateurs s'exprime de la manière analogue.*

X.

Points coniques.

50. Un point μ-tuple de la surface est un point où μ des points d'intersection d'une droite quelconque passant par lui coïncident. Les tangentes en ce point, c'est à dire les droites qui ont $\mu + 1$ intersections confondues forment un cône, qui doit être d'ordre μ, parce qu'un plan quelconque par le point singulier contient μ tangentes. Nous appelons ce cône le *cône tangent*, et s'il est un cône propre nous appelons le point singulier un *point conique*. Le cône tangent peut être composé de cônes d'ordre inférieur: toutefois nous supposerons qu'il n'y ait pas des plans au nombre de ces parties du cône tangent*).

$\mu(\mu+1)$ génératrices du cône tangent rencontrent la surface en $\mu + 2$ points coïncidents. On peut démontrer ce fait connu de la manière suivante**):

Si l'on prend le point conique C pour centre de projection, les projections des sections faites par un faisceau de plans sur un plan quelconque formeront un système de courbes d'ordre n, où la projection de la section du plan du faisceau qui passe par C est composée de la trace du cône tangent et d'une droite $(n-\mu)$-tuple, n étant l'ordre de la surface. Les $\mu \cdot n$ points d'intersection de la trace du cône avec la courbe consécutive du système sont: 1° les traces des μ génératrices du cône tangent qui rencontrent l'axe du faisceau, comptées $n - \mu - 1$ fois, parce que chacune de ces génératrices rencontre la surface en $n - \mu - 1$

*) Comparer à la note du n° 2.

**) On trouve dans le n° 20. des „*Preliminari di una teoria geometrica delle Superficie*“ de M. Cremona une autre démonstration géométrique du même fait, qui est plus simple, mais qui me semble moins commode pour l'étude de l'influence des branches de la courbe double et de la courbe cuspidale qui passent par le point conique.

points différents de C, et 2° les traces des droites cherchées. Le nombre de celles-ci devient donc égal à

$$\mu \cdot n - \mu(n-\mu-1) = \mu(\mu+1).$$

Les points d'intersection d'une courbe d'un système avec la courbe consécutive se distribuent de la manière suivante: il y en a *un* en chaque point de contact de la courbe avec l'enveloppe des courbes du système, *deux* en chaque point double qui appartient au lieu des points doubles des courbes du système (et qui n'est pas, par conséquent, un *nouveau* point double), et *trois* en chaque point stationnaire qui appartient au lieu des points stationnaires des courbes du système. On voit ainsi que $2y$ des droites par C que nous venons de trouver coïncident avec les tangentes aux y branches de la courbe double, et $3z$, avec les tangentes aux z branches de la courbe cuspidale qui passent par le point conique. Il reste donc

$$\mu(\mu+1) - 2y - 3z$$

génératrices simples du cône tangent dont $\mu+2$ points d'intersection avec la surface coïncident avec le point conique. Nous les appelons les *tangentes principales.* Ayant désigné (voir le n° 1.) la classe du cône tangent par ν, et les nombres de ses génératrices doubles et stationnaires qui ne sont pas tangentes à la courbe double et cuspidale, par η et ξ, et ayant posé (voir les formules (2) et (3) du n° 3.)

$$\nu + 2\eta + 3\xi = x,$$

nous aurons pour le nombre des tangentes principales l'expression plus simple:

$$2\mu + x.$$

Les η et les ξ génératrices singulières ne rencontrent en général la surface qu'en $m+1$ points coïncidents; car un *nouveau* point double ou stationnaire d'une courbe d'un système n'est pas en général point d'intersection de la courbe avec la courbe consécutive du système*).

51. *Sections planes.* Connaissant les nombres des intersections confondues des différentes droites passant par un point conique, on trouve sans difficulté les propriétés des différentes sections planes passant par lui:

Une section plane passant par un point conique (μ-tuple) y aura en général un point μ-tuple à branches distinctes. Si le plan de section est tangent au cône tangent, ou passe par une des η génératrices doubles, ou des ξ génératrices stationnaires, deux branches réunies formeront un point stationnaire. Si le plan satisfait à deux des conditions nommées la même réunion de deux branches aura lieu deux fois. *Si le plan de*

*) Comparer aux propriétés de la tangente singulière en un point biplanaire.

section est un des plans tangents stationnaires du cône tangent, ou un plan tangent à lui le long d'une des η ou des ζ génératrices singulières, trois branches réunies formeront un point triple à une seule tangente — ou bien, une singularité représentée par $\binom{1,\ 2}{0,\ 0}$. — *Si le plan de section passe par une des* $2\mu + x$ *tangentes principales, une des branches de la section fera une inflexion au point conique. Si le plan est tangent au cône le long d'une tangente principale, ou à une des y branches de la courbe double, deux des* μ *branches de la section seront tangentes l'une à l'autre sans se réunir.* Le contact sera, dans le dernier cas, du second ordre si le plan est osculateur à la courbe double. *Si le plan est tangent à une des z branches de la courbe cuspidale, deux branches réunies de la section formeront un point de rebroussement de second espèce.* S'il est osculateur à la courbe cuspidale, deux branches distinctes auront entre elles un contact du troisième ordre. *Si le plan de section est tangent au cône tangent le long d'une des y tangentes à la courbe double, trois des* μ *branches de la section, dont les deux se réunissent et forment un point stationnaire, auront la même tangente*; cette singularité a les équivalents $\binom{3,\ 1}{2,\ 0}$. *Si le plan est tangent au cône tangent le long d'une des z tangentes à la courbe cuspidale, trois branches de la section se réuniront et formeront une branche triple à une seule tangente qui a avec elle cinq intersections confondues*; cette branche qu'on peut représenter par une série de la forme $y = ax^{\frac{5}{3}} + \cdots$ a pour équivalents plückériens $\binom{2,\ 2}{1,\ 1}$.

52. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point quelconque P de l'espace.* Dans le point μ-tuple de la section d'un plan passant par le point conique C se confondent y des b points doubles et z des c points stationnaires de la section. Elle est donc de la classe

$$a - \mu(\mu - 1) + 2y + 3z.$$

Il en résulte que

$$\mu(\mu - 1) - 2y - 3z = x$$

des génératrices d'intersection du plan avec le cône circonscrit coïncident avec la droite PC, qui devient ainsi génératrice x-tuple du cône circonscrit.

Les plans tangents au cône le long de cette génératrice sont: 1° les ν plans tangents au cône tangent qui passent par CP, 2° les plans joignant CP aux η génératrices doubles, et 3° les plans joignant CP aux ζ génératrices cuspidales du cône tangent; car chacun de ces plans contient $x + 1$ génératrices coïncidantes du cône. x étant égal à $\nu + 2\eta + 3\zeta$, il faut que les trois classes de plans tangents soient

tangents respectivement à des nappes simples, doubles et triples du cône circonscrit.

La droite qui joint le point conique C au sommet d'un cône circonscrit est génératrice x-tuple de ce cône: les ν plans par cette droite qui sont tangents au cône tangent en C sont tangents à des nappes simples du cône circonscrit, les plans passant par les η génératrices doubles, à des nappes doubles formant des génératrices stationnaires, et les plans passant par les ζ génératrices stationnaires, à des nappes triples dont la singularité est représentée par les équivalents $\binom{1,\ 2}{0,\ 0}$.

On voit que

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2}+2\nu\eta+3\nu\zeta+4\,\frac{\eta(\eta-1)}{2}+6\eta\zeta+9\,\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}+\zeta$$

génératrices doubles et

$$\eta+2\zeta$$

génératrices stationnaires du cône circonscrit coïncident avec la droite PC.

C étant un point y-tuple de la courbe double et un point z-tuple de la courbe cuspidale, on voit que $\frac{y(y-1)}{2}$ et $\frac{z(z-1)}{2}$ génératrices doubles des cônes projetant ces courbes, et yz, xy et xz de leurs bc, ab et ac génératrices d'intersection, entre eux, et avec le cône circonscrit, coïncident avec la droite PC.

Remarquant encore qu'une génératrice de l'un de ces trois cônes qui fait avec PC un angle infiniment petit du premier ordre, a $\mu-2$ points d'intersection avec la surface qui se trouvent à des distances infiniment petites du premier ordre du point de contact avec la surface ou du point d'intersection avec la courbe singulière projetée, et qui ont entre eux des distances du même ordre, nous voyons que

$$x(\mu-2)\quad,\quad y(\mu-2)\quad,\quad z(\mu-2),$$
$$x(\mu-2)(\mu-3),\quad y(\mu-2)(\mu-3),\quad z(\mu-2)(\mu-3)$$

des coïncidences dont les nombres sont indiqués par les premiers membres des équations (13), (14), (15) et (16), (17), (18) du n° 3., ont lieu au point conique C. (Voir la démonstration de ces formules dans le n° 6.)

Ces différentes remarques démontrent complètement l'influence d'un point conique aux formules (13), (14), (15), (16), (17), (18). Le terme $\Sigma[z(\mu-3)]$ de l'équation (22^b) dans le n° 8. s'explique d'une manière analogue. On comprend aussi que l'équation (20^b) doit contenir ν, η et ζ; mais les coëfficients de η et ζ en $\Sigma(\nu+4\eta+7\zeta)$ sont plus difficiles à déterminer directement.

53. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point P du cône tangent en un point conique C.* Le cône ne se décompose pas. La droite

PC devient génératrice $(x+1)$-tuple. $x-2$ des plans tangents le long d'elle (les plans tangents aux η nappes doubles étant comptés pour deux, les plans tangents aux ζ nappes triples, pour trois) se déterminent comme dans le n° précédent: il faut donc que le plan tangent au cône tangent le long de CP soit tangent à une nappe triple du cône tangent. Ce plan contient $x+2$ génératrices coïncidentes du cône circonscrit, et, par conséquent, $x+2-(x-2)$ ou quatre génératrices de la nouvelle nappe triple. La singularité de celle-ci est donc représentée par $\begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 0\end{pmatrix}$.

Deux des ν plans tangents au cône tangent coïncidant avec le plan tangent à la nouvelle nappe triple, celle-ci remplace deux nappes simples d'un cône circonscrit à sommet quelconque. Nous voyons donc que dans le cas actuel $x-2$ génératrices doubles et deux génératrices stationnaires viennent se joindre à celles qui coïncident ordinairement avec la droite menée du sommet du cône circonscrit au point conique.

54. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point conique C.* La classe d'une section plane passant par C étant égale à $a-x$, on peut y mener $a-x-2\mu$ tangentes qui passent par le point μ-tuple C sans avoir ce point pour point de contact. On aura donc

$$a_1 = a - 2\mu - x.$$

Ce résultat s'explique aussi par la considération d'un cône circonscrit dont le sommet P, mobile sur une courbe quelconque passant par C, vient coïncider avec C. Ce cône se décompose, si l'on le regarde comme lieu de ses génératrices, en les parties suivantes: 1° le cône tangent d'ordre μ, pris deux fois; 2° les ν plans tangents au cône tangent qui passent par la position limite de CP; 3° les η plans qui joignent cette position limite aux η génératrices doubles, pris deux fois; 4° les ζ plans que la joignent aux ζ génératrices stationnaires, pris trois fois; et 5° le cône résidu d'ordre a_1. Ces différentes parties composent le *cône circonscrit total* au sommet C.

A l'exception des génératrices qui établissent pour un sommet P infiniment voisin de C, la connexion de ces différentes parties du cône circonscrit, leurs génératrices d'intersection appartiennent aux $\delta-\delta_1$ génératrices doubles du cône total qui ne sont pas génératrices doubles du cône résidu.

La connexion du cône tangent avec le cône résidu s'établit par les génératrices de celui-ci dont les points de contact coïncident avec le point conique C. Ces génératrices ont $\mu+2$ intersections confondues en C, sans que les deux intersections nouvelles appartiennent à la courbe double ou cuspidale: elles sont donc les $2\mu+x$ tangentes principales. La section faite à la surface par le plan tangent au cône

tangent le long d'une tangente principale, n'est, selon le n° 51., que de la classe $a-x-2$; il en résulte, que ce plan ne contient que $a-x-2\mu-2$ génératrices du cône résidu dont les points de contact sont différents de C. Les deux autres coïncident avec la tangente principale; *le cône résidu est donc tangent au cône tangent le long des* $2\mu+x$ *tangentes principales**). Il reste

$$\mu(a-2\mu-x)-2(2\mu+x)$$

génératrices d'intersection des deux cônes: avec chacune d'elles coïncident — à cause de la duplicité du cône tangent regardé comme partie du cône circonscrit total — *deux* des $\delta-\delta_1$ génératrices doubles du cône total qui n'appartiennent pas au cône résidu.

La connexion du cône tangent avec les ν plans simples, les η plans doubles et les ξ plans triples se fait évidemment par les ν génératrices de contact et par les η et ξ génératrices singulières du cône tangent. Chacun des plans rencontre le cône tangent en $\mu-2$ autres génératrices. Ayant égard aux degrés de multiplicité du cône tangent et des plans, on trouve ainsi $2(\mu-2)x$ génératrices doubles appartenant au nombre $\delta-\delta_1$.

Les plans dont nous venons de parler n'ont aucune connexion ni avec le cône résidu ni entre eux. Nous trouvons ainsi les termes suivants de la différence $\delta-\delta_1$:

$$x(a-2\mu-x)+\frac{\nu(\nu-1)}{2}+2\nu\eta+3\nu\xi+4\frac{\eta(\eta-1)}{2}+6\eta\xi+9\frac{\xi(\xi-1)}{2}.$$

On voit de même que quatre des $\delta-\delta_1$ génératrices doubles qui n'appartiennent pas au cône résidu coïncident avec chacune des y tangentes en C à la courbe double. On doit encore attendre d'en trouver qui coïncident avec les z tangentes à la courbe cuspidale. Nous verrons aussi que la différence $\delta-\delta_1$ contient le terme $3z$; nous commencerons par y introduire le terme

$$(3+Z)z,$$

où Z est un nombre entier encore inconnu.

Pour trouver si le nombre $\delta-\delta_1$ contient d'autres termes que ceux que nous avons déjà déterminés, nous remarquerons que toutes les droites dont $\delta-\delta_1$ indique le nombre, doivent appartenir à l'une ou l'autre des deux classes suivantes.

La *première* classe contient les positions limites des génératrices doubles d'un cône circonscrit au sommet P qui coïncident avec PC. Si le sommet P vient coïncider avec C, aucune de ces génératrices n'appartiendra en général, au cône résidu. Leur nombre (voir le n° 52.)

---

*) La même chose résulte aussi des considérations au moyen desquelles nous avons trouvé le nombre des tangentes principales (n° 50).

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2}+2\nu\eta+3\nu\zeta+4\frac{\eta(\eta-1)}{2}+6\eta\zeta+9\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}+\zeta$$

fait donc en entier partie de $\delta-\delta_1$. Nous avons déjà rendu compte de tous ces termes à l'exception de ζ, qu'il faut ajouter aux termes de $\delta-\delta_1$ déjà trouvés.

La seconde classe contient des positions limites de tangentes doubles passant par P. Il est évident qu'une droite d'un des ν, η ou ζ plans qui font partie du cône total n'appartient pas à ce nombre, à moins qu'elle ne soit en même temps génératrice d'une autre partie du cône circonscrit total. Ayant déjà rendu compte de toutes les intersections de ces plans entre eux et avec le cône résidu, nous n'aurons besoin de chercher que les tangentes doubles qui sont génératrices du cône tangent. Chacune de celles-ci sera tangente en C à une ou plusieurs des branches du point μ-tuple d'une section plane quelconque de la surface passant par elle. Si son autre contact a lieu en un point différent de C, ou s'il résulte d'un „sommet“ formé par les autres branches du point multiple, elle appartiendra à un des nombres $\mu(a-2\mu-x)-2(2\mu+x)$ ou $(\mu-2)x$, dont nous avons déjà rendu compte. Les seuls cas qui nous restent à discuter sont donc les deux suivants: 1° celui où une droite par C aurait un contact quatreponctuel avec une branche simple des sections planes passant par elle, et 2° celui où elle serait tangente à deux branches — distinctes ou formant un point de rebroussement de seconde espèce — de ces sections. Le premier de ces cas est en général impossible, parce qu'alors la droite aurait $\mu+3$ intersections confondues en C; l'autre aura lieu seulement si la droite est une des y et z tangentes à la courbe double et à la courbe cuspidale, dont nous avons déjà rendu compte. Cette seconde classe n'amène donc aucun terme du nombre $\delta-\delta_1$ dont nous n'avons pas rendu compte déjà.

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\delta_1 = \delta &- 2[\mu(a-2\mu-x)-2(2\mu+x)]-2(\mu-2)x\\ &- x(a-2\mu-x)-\frac{\nu(\nu-1)}{2}-2\nu\eta-3\nu\zeta-4\frac{\eta(\eta-1)}{2}-6\eta\zeta\\ &- 9\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}-\zeta-4y-(3+Z)z.\end{aligned}$$

On trouve la classe n_1' du cône résidu, qui est le nombre des plans passant par une droite par C et tangents à la surface en des points différents de C, en regardant un autre point P de cette droite comme sommet d'un cône circonscrit. Alors les théorèmes démontrés dans le n° 52. nous montrent que

$$n_1' = n' - 2\nu - 3\eta - 4\zeta.$$

Le cône circonscrit total, regardé comme enveloppe de ses plans tangents, s'est décomposé en les parties suivantes: 1° le cône tangent,

pris deux fois; 2° les η génératrices doubles, prises trois fois; 3° les ξ génératrices stationnaires, prises quatre fois; et 4° le cône résidu.

Connaissant des expressions des trois nombres plückériens a_1, δ_1 et n_1' du cône résidu, on peut en déduire des expressions des autres. En réduisant l'expression de b_1' au moyen des équations plückériennes appliquées au cône tangent et à un cône circonscrit à un sommet quelconque (formules (3), (4), (5) et (6'), (7'), (8') du n° 3.), on trouve

$$\begin{aligned} b_1' = b' &- 2[\nu(n'-2\nu-3\eta-4\xi)-2(2\mu+x)] \\ &- (3\eta+4\xi)(n'-2\nu-3\eta-4\xi)-6\eta(\nu-4)-8\xi(\nu-3) \\ &- 9\tfrac{\eta(\eta-1)}{2}-12\eta\xi-16\tfrac{\xi(\xi-1)}{2}-4u-3v-10\eta-9\xi-Zz. \end{aligned}$$

On déduit, sans difficulté, les termes du second membre de cette équation, à l'exception des quatre derniers, de la décomposition du cône circonscrit total regardé comme enveloppe: ils indiquent les nombres des plans tangents communes à deux parties de ce cône, qui n'établissent pas des connexions de ces parties, — et des plans tangents doubles du cône tangent — multipliés par les produits des nombres qui indiquent les degrés de multiplicité des parties respectives du cône*). On trouve aussi sans difficulté que la différence $b'-b_1'$ doit contenir des termes qui sont des multiples de v, η et ξ, et nous verrons même, dans ce qui suit, des explications de la signification de leurs coefficients. Mais le plan tangent au cône tangent le long d'une des z tangentes à la courbe cuspidale n'est qu'un plan tangent simple de la surface**), et il n'existe pas d'autres plans tangents doubles du cône total, perdus par le cône résidu, dont le nombre est toujours égal à z (ou à un polynome composé de z, v, η, ξ). On voit donc que le coefficient Z est égal à zéro.

Nous avons donc démontré que

$$\begin{aligned} a_1 &= a-2\mu-x, \\ n_1' &= n'-2\nu-3\eta-4\xi, \\ \delta_1 &= \delta-2[\mu(a-2\mu-x)-2(2\mu+x)]-2(\mu-2)x \\ &\quad -x(a-2\mu-x)-\tfrac{\nu(\nu-1)}{2}-2\nu\eta-3\nu\xi-4\tfrac{\eta(\eta-1)}{2}-6\eta\xi \\ &\quad -9\tfrac{\xi(\xi-1)}{2}-\xi-4y-3z, \end{aligned}$$

---

*) Comparer au n° 62.

**) En effet, la section qu'il fait, ayant deux points doubles et deux points stationnaires au lieu de trois points doubles et un point stationnaire d'une autre section par C, est de la classe $a-x-1$ de même que les sections faites par les autres plans tangents au cône tangent. Il est donc plan tangent simple d'un cône circonscrit ayant pour sommet un quelconque de ses points.

$$b_1' = b' - [(2\nu+3\eta+4\xi)(n'-2\nu-3\eta-4\xi) - 4(2\mu+x)]$$
$$- 6\eta(\nu-4) - 8\xi(\nu-3) - 9\frac{\eta(\eta-1)}{2} - 12\eta\xi - 16\frac{\xi(\xi-1)}{2}$$
$$- 4u - 3v - 10\eta - 9\xi.$$
$$\varkappa_1 = \varkappa - 2z - 3(2\mu+x) - 3\nu - 7\eta - 11\xi,$$
$$c_1' = c' - 2v - 3(2\mu+x) - 10\eta - 12\xi.$$

Nous verrons dans ce qui suit les explications des différents termes de c_1' *).

XI.

Points coniques (Suite).

55. *Propriétés ayant rapport aux* $2\mu+x$ *tangentes principales.* La section faite à la surface par le plan tangent au cône tangent en un point conique C le long d'une tangente principale, a, selon le n° 51., un nouveau point double coïncidant avec le point conique: elle n'est donc que de la classe $a-x-2$. Il en résulte que $x+2$ des droites d'intersection de ce plan avec un cône circonscrit dont le sommet P se trouve sur lui coïncident avec la génératrice x-tuple PC de ce cône. N'étant tangent qu'à une seule des x nappes de ce cône, il la rencontre en trois génératrices coïncidentes, ou bien, il en est un plan tangent stationnaire. Il sera donc un plan tangent simple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, mais non pas tangent à la développable bitangente.

On voit donc pourquoi, dans les formules trouvées dans le n° précédent, $c'-c_1'$, mais non pas $b'-b_1'$, contient un terme $2\mu+x$. Le coëfficient trois de ce terme dans l'expression de $c'-c_1'$, nous montre que le point d'osculation du plan qui nous occupe, avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, se trouve en C. Sa génératrice de contact avec cette enveloppe doit être la tangente principale, parceque celle-ci est tangente d'inflexion de toute section plane passant par elle. On le voit aussi en considérant le cône circonscrit qui a pour sommet un point T de cette droite. On prouve, par les mêmes procédés que nous avons employés dans le n° 53., que ce cône a la droite TC pour génératrice $(x+2)$-tuple: deux des ν nappes simples d'un cône circonscrit ordinaire qui passent par C sont remplacées par un assemblage quadruple de nappes**) tangentes entre

*) Dans le tome 78 p. 339 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* j'ai appliqué l'expression, prouvée ici, de $\varkappa_1$ à la déduction du nombre des points stationnaires de l'enveloppe des courbes d'un système donné. La démonstration actuelle complète celle des résultats que j'ai indiqués à l'endroit cité.

**) Nous désignons par cette expression un groupe de 1—4 branches dont les degrés de multiplicité font la somme quatre.

elles, qui rencontrent leur plan tangent en six génératrices coïncidantes. Cet assemblage a pour équivalents $\binom{3,\ 4}{0,\ 2}$; car, le plan tangent étant plan tangent stationnaire, mais non pas double, de la surface, ce groupe d'équivalents est le seul de ceux que nous avons nommés dans le n° 38., qui reste possible. — On voit que $2x-2$ génératrices doubles et quatre génératrices stationnaires se sont jointes à celles qui coïncident ordinairement avec la droite projetant le point conique C.

Pour chaque tangente principale, une coïncidence d'un point de la courbe parabolique avec le point correspondant de l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, a lieu au point conique. En considérant un cône circonscrit dont le sommet est infiniment voisin du plan tangent au cône tangent le long d'une tangente principale, on voit que cette coïncidence compte seulement pour une dans la formule (19). (Comparer au n° 19.) *Voilà pourquoi le second membre de l'équation* (19) *contient le nombre* $(2\mu+x)$. On prouve au moyen du même cône circonscrit que la courbe parabolique a un contact du premier ordre avec toute tangente principale en C, et que le plan tangent au cône tangent le long de cette droite y est osculateur.

Le plan tangent au cône tangent en un point conique le long d'une tangente principale, est tangent, le long de la même droite, à l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Le point correspondant de l'arête de rebroussement de cette développable se trouve au point conique. La branche correspondante de la courbe parabolique est, au même point, tangente à la tangente principale, et a le plan tangent au cône tangent pour plan osculateur.

56. *Propriétés ayant rapport aux ν plans tangents stationnaires du cône tangent.* Nous désignerons par les noms de *„plan ν“* et de *„droite ν“ un plan tangent stationnaire du cône tangent et sa génératrice de contact.* De même nous désignerons, dans ce qui suit, par les notations de *„droite η“* et de *„plan η“ une des η génératrices doubles du cône tangent* qui ne sont pas tangentes à la courbe double, et *un des deux plans tangents au cône tangent le long d'elle*, et par les notations de *„droite ξ“* et *„plan ξ“, une des ξ génératrices stationnaires du cône tangent* qui ne sont pas tangentes à la courbe stationnaire, et *le plan tangent au cône tangent le long d'elle.* —

Si l'on prend pour sommet d'un cône circonscrit un point P d'un plan v, deux des ν nappes simples de ce cône qui passent par PC coïncident et sont tangentes au plan v. Dans la section faite par celui-ci, deux des $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ point doubles confondus en C sont remplacés, selon le n° 51., par des points stationnaires: elle est donc de la

classe $a-x-2$. Le plan v rencontre donc les deux nappes auxquelles il est tangent en quatre génératrices coïncidentes.

Celà prouvé, la supposition la plus simple serait que ces nappes fussent distinctes, et que chacune rencontrât le plan v en deux génératrices coïncidentes. Alors toutes les deux génératrices d'intersection des deux nappes appartiendraient aux δ génératrices doubles du cône circonscrit, et le nombre de génératrices doubles coïncidant avec PC dépasserait d'une unité le nombre ordinaire, trouvé dans le n° 52., ce qui est impossible; car la droite PC, qui rencontre une des nappes du cône tangent en trois points coïncidents et les autres en un seul point, ne peut être position limite d'une tangente double de la surface. Il faut donc qu'une de ces deux génératrices du cône circonscrit soit, au lieu de double, une génératrice stationnaire*). Alors les deux nappes forment une nappe double dont les sections planes ont des points de rebroussement de seconde espèce, et un plan tangent double et un plan tangent stationnaire du cône circonscrit coïncident avec le plan v.

Un plan v est donc *premièrement tangent à la développable bitangente* de la surface. La génératrice de contact, devant rencontrer une nappe de la surface en quatre points coïncidents, coïncide avec la tangente à la branche triple de la section faite par le plan v, ou bien avec la droite v. On peut aussi prouver d'une autre manière que cette droite est génératrice de contact avec la développable bitangente, en prenant un de ses points T pour sommet d'un cône circonscrit. Ce cône a la droite TC pour génératrice $(x+1)$-tuple: trois des ν nappes simples d'un cône circonscrit ordinaire qui passent par C sont remplacées par un assemblage quadruple de nappes tangentes au plan v, qui les rencontre en six génératrices coïncidantes. Le seul des quatre groupes d'équivalents indiqués dans le n° 38. qui reste possible pour cet assemblage est $\binom{5,\ 3}{2,\ 1}$, de façon que deux des b' plans tangents doubles du cône circonscrit coïncident avec le plan v. Nous voyons en même temps que $x-1$ génératrices doubles et trois génératrices stationnaires se sont jointes à celles qui coïncident ordinairement avec la droite projetant le point conique C. — Le coëfficient 3 du terme v de l'expression de $b'-b_1'$ trouvée dans le n° 54., nous montre que le point d'osculation d'un plan v avec l'arête de rebroussement de la développable bitangente, se trouve au point conique C. — La droite v est

*) Comparer à la seconde note du n° 19. — Dans le cas actuel les coëfficients des termes v dans les expressions de b_1' et c_1' trouvées dans le n° 54. nous montrent que les deux nappes partielles n'ont pas un contact supérieur à $\frac{3}{2}$, ou bien qu'*une seule* génératrice stationnaire s'est jointe à celles qui coïncident ordinairement avec PC.

tangente à la courbe de contact de la développable bitangente. En considérant un cône dont le sommet est infiniment voisin du plan v, on peut démontrer que les deux points de contact de la génératrice de la développable bitangente qui fait avec la droite v un angle infiniment petit du premier ordre ont entre eux, et du point conique C, des distances d'ordre $\frac{3}{2}$ *). Il en résulte que la branche de la courbe de contact qui est tangente à la droite v est triple: un plan quelconque par cette droite la rencontre en quatre points coïncidants, le plan v, en six; un point double et deux points stationnaires sont réunis en C. Ces propriétés de la courbe de contact de la développable bitangente expliquent le coëfficient 3 du terme $3v'$ de l'équation (21) dans le n° 4. — qu'on déduit des équations du n° 3. — ou plutôt le même coëfficient du terme $3v$ de l'équation réciproque à (21).

Un plan v est aussi *tangent à l'enveloppe des plans stationnaires de la surface.* Les propriétés trouvées du cône circonscrit ayant pour sommet un point T de la droite v, nous montrent que cette droite n'est pas génératrice de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires. On sait aussi que cette dernière génératrice de contact n'a besoin de rencontrer une nappe de la surface qu'en trois points coïncidants. Si l'on prend un point de cette dernière droite pour sommet, deux nappes du cône circonscrit auront entre elles un contact du troisième ordre, deux génératrices stationnaires s'étant jointes à celles qui passent ordinairement par C. — Le coëfficient 2 de v dans l'expression de $c' - c_1'$ trouvée dans le n° 54. nous montre que le point d'osculation du plan v avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires ne se trouve pas en C. On voit la même chose en observant que la branche correspondante de la courbe parabolique, devant rester sur la surface, a pour tangente la droite v, qui est différente de la génératrice de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Les propriétés d'un cône ayant pour sommet un point quelconque du plan v montrent, que ce plan n'est pas osculateur à la branche de la courbe parabolique dont nous venons de parler.

Un plan tangent stationnaire du cône tangent en un point conique (un plan v), est plan tangent simple de la développable bitangente et de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface. Sa génératrice de contact avec le cône tangent (la droite v), est aussi génératrice de contact avec la développable bitangente (mais non pas avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires), et le point conique se trouve sur la branche correspondante de l'arête de rebroussement de la développable bi-

*) Comparer à la p. 39 (323) de mon mémoire déjà cité sur *les systèmes de courbes planes.*

tangente (mais non pas sur celle de l'arête de rebroussement de l'autre développable). La branche correspondante de la courbe de contact de la développable bitangente est triple et tangente à la droite v: un plan quelconque par cette droite la rencontre en quatre points coïncidants, le plan v, en six; elle a un point double et deux points stationnaires réunis au point conique. La branche correspondante de la courbe parabolique est aussi tangente à la droite v, mais elle n'a pas le plan v pour plan osculateur.

57. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point P d'un „plan η"**). Le cône ne se décompose pas, et le degré de multiplicité de sa génératrice singulière PC reste égal à x. Mais une des ν nappes simples passant par cette droite coïncide avec une des η nappes doubles. Le plan η a avec le cône $x+2$ intersections confondues en PC; cinq d'entre elles doivent appartenir à l'assemblage triple que nous venons de trouver. Cet assemblage ne peut être décomposable de nouveau en une nappe simple et une nappe double, formant une génératrice stationnaire; car alors ses équivalents auraient les valeurs de $\binom{3,\ 1}{2,\ 0}$, et le plan η ne serait pas plan tangent stationnaire de la surface, contrairement à l'expression de c_1' dans le n° 54., où le coëfficient -10 de η exprime que $10\,\eta$ des c' plans tangents stationnaires qui passent par le point conique C coïncident avec les plans η, cinq avec chacun. Il faut donc que l'assemblage soit formé d'une seule nappe triple, dont une section plane est représentée par une série de la forme $y = ax^{\frac{3}{2}} + \cdots$, et dont les équivalents ont, par conséquent, les valeurs de $\binom{2,\ 2}{1,\ 1}$. Nous voyons donc que le *plan η est plan tangent simple, soit de la développable bitangente, soit de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.* On voit en même temps qu'une nouvelle génératrice stationnaire du cône circonscrit est venue se joindre aux $(\eta+2\zeta)$ qui coïncident ordinairement avec PC; car la nappe double et simple qui se sont confondues forment ordinairement deux génératrices doubles et une génératrice simple**).

58. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T d'une droite η.* On voit sans difficulté par des considérations infinitésimales qu'une

---

*) Sur la signification de cette notation, voir au commencement du n° précédent.

**) L'impossibilité des équivalents $\binom{3,\ 1}{2,\ 0}$ résulte aussi de la réflexion que la droite PC, qui rencontre une nappe du cône tangent en trois points, les autres en un seul, ne peut être position limite d'une tangente double. Il est donc impossible qu'une nouvelle génératrice double du cône circonscrit se soit jointe à celles qui coïncident ordinairement avec PC.

droite η est génératrice de contact de chacun des deux plans η qui passent par elle, non seulement avec la développable bitangente, mais aussi avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires; mais le moyen le plus commode d'étudier les propriétés de cette génératrice est de discuter un cône circonscrit ayant un de ses points T pour sommet.

L'ordre $a_1 = a$, et la classe $n_1' = n' - 1$, du cône résidu se trouvent par les procédés ordinaires.

On déduit des propriétés, trouvées dans le n° 51., des sections planes passant par le point conique C, qu'un plan quelconque passant par TC a $x+2$ intersections avec le cône circonscrit réunies en TC, et chacun des deux plans η passant par elle, $x+3$. Aux assemblages de nappes tangentes à ces deux plans appartiennent 4 des ν nappes simples et une des η nappes doubles d'un cône circonscrit ordinaire. On voit donc que le degré de multiplicité de chacun est égal à

$$\tfrac{1}{2}\,[x+2-(x-4-2)] = 4.$$

Ne rencontrant son plan tangent qu'en cinq génératrices coïncidentes, chacun de ces assemblages quadruples est formé d'une seule nappe quadruple ayant pour équivalents $\binom{3,\ 3}{0,\ 0}$.

On voit donc qu'aucun des plans tangents doubles ou stationnaires de la surface qui passent par la droite η, n'est plan tangent double ou stationnaire du cône résidu.

Les plans tangents doubles de la surface qui passent par la droite η sont 1° les*)

$$n' - 1 - 2\cdot 5 - 2(\nu - 4) - 3(\eta - 1) - 4\xi = n' - 2\nu - 3\eta - 4\xi$$

plans passant par la droite η et tangents à la surface en des points différents de C; 2°

$$2(\nu - 4) + 3(\eta - 1) + 4\xi$$

plans tangents, le long de TC, à d'autres nappes du cône circonscrit (voir le n° 52.); 3° un nombre inconnu $2X$ de plans coïncidant avec les deux plans η. Les propriétés du cône circonscrit au sommet C (n° 54.), ou celles des sections planes par la droite η, montrent qu'il n'en existe pas d'autres. — On voit de même qu'un plan tangent stationnaire qui passe par la droite η doit coïncider avec l'un ou l'autre des deux plans η. Nous désignerons par $2Y$ le nombre de plans tangents stationnaires à la surface passant par T qui coïncident avec l'un ou l'autre de ces deux plans. On trouve ainsi

*) La première expression résulte immédiatement des discussions faites dans le n° présent, la seconde, des propriétés, trouvées dans le n° 54., du cône circonscrit au sommet C.

$$b_1' = b' - (n' - 2\nu - 3\eta - 4\xi) - 2(\nu - 4) - 3(\eta - 1) - 4\xi - 2X,$$
$$c_1' = c' - 2Y,$$

où X et Y sont des nombres entiers et positifs.

En appliquant la deuxième relation plückérienne à ces expressions et aux valeurs déjà trouvées de a_1 et n_1', on trouve

$$2X + 3Y = 10,$$

d'où $X = Y = 2$. On voit ainsi qu'une *droite η est génératrice simple de chacune des deux nappes de la développable bitangente, et de chacune des deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, qui passent par elle.*

Les nombres plückériens du cône résidu auront les valeurs suivantes:

$$a_1 = a, \qquad \delta_1 = \delta + 2, \qquad \varkappa_1 = \varkappa - 1,$$
$$n_1' = n' - 1, \quad b_1' = b' - n' + 7, \quad c_1' = c' - 4.$$

On trouve sans difficulté que $2(x-3)$ génératrices doubles et 6 génératrices stationnaires — dont l'une s'est transformée en deux génératrices doubles — sont venues se joindre à celles qui coïncident ordinairement avec la droite projetant le point conique. —

Avec chacun des plans η coïncident, selon le n° 54., cinq des b' plans tangents doubles, et cinq des c' plans tangents stationnaires, qui passent par le point conique C. Il en résulte que *C est point triple, à une seule tangente, des branches des arêtes de rebroussement de la développable bitangente, et de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, qui ont les plans η pour plans osculateurs.*

Au lieu de discuter ici les branches de la courbe de contact de la développable bitangente, et de la courbe parabolique qui sont tangentes aux droites η, et de déduire ici les coëfficients du terme η dans les équations (19) et (21') [réciproque à (21)], nous ferons dans les n^{os} 64.—66. la discussion et les déductions réciproques, qui nous semblent plus commodes*).

59. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point P d'un plan ξ.* Le cône ne se décompose pas, et le degré de multiplicité de sa génératrice PC reste égal à x. Mais une des ν nappes simples passant par cette droite coïncide avec une des ξ nappes triples. Le plan ξ a avec le cône $x+2$ intersections confondues en PC; six d'entre elles doivent appartenir à l'assemblage quadruple que nous venons de trouver. L'assemblage ne peut être représenté par aucune des quatre

*) Les opérations qui se correspondent par le principe de dualité reposent, en réalité, sur les mêmes raisonnements; mais à cause du développement du langage géométrique et de l'habitude, l'une peut être plus commode que l'autre.

groupes d'équivalents qu'on a obtenus dans le n° 38. par la substitution de $q = 3$ dans les expressions générales des équivalents; car 1° les expressions de b_1' et de c_1' dans le n° 54. nous montrent que le plan ζ est à la fois plan tangent double et plan tangent stationnaire de la surface, et 2°, la droite PC n'étant pas position limite d'une tangente double de la surface, le nombre de génératrices doubles formées par les nappes confondues, doit avoir sa valeur ordinaire; il est donc égal à quatre. Il faut donc essayer d'obtenir cette valeur du premier équivalent, en attribuant, dans les expressions générales des équivalents*)

$$\begin{pmatrix} 3+q-3\alpha, & 2+2\alpha \\ q-3\alpha, & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad q>2, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \frac{q}{3},$$

ou

$$\begin{pmatrix} q+2-3\beta, & 3+2\beta \\ q-1-3\beta, & 1+2\beta \end{pmatrix}, \quad q>2, \quad 0 \leqq \beta \leqq \frac{q-1}{3},$$

à q la valeur de 4. On l'obtient pour $q=4$, $\alpha=1$. Alors les équivalents auront les valeurs de $\begin{pmatrix} 4, & 4 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$, ce qui montre *qu'un plan ζ est plan tangent simple de la développable bitangente et plan tangent double de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.*

On voit en même temps que deux nouvelles génératrices stationnaires du cône circonscrit sont venues se joindre aux $\eta + 2\zeta$, qui coïncident ordinairement avec PC.

Les valeurs trouvées des équivalents montrent que l'assemblage est formé de deux nappes doubles formant des génératrices stationnaires, et se rencontrant, l'une l'autre, en 7 génératrices coïncidantes.

Il est évident que le contact du plan ζ avec la développable bitangente doit avoir lieu le long de la droite ζ qui est la seule droite qui rencontre la branche singulière de la section faite par le plan ζ en quatre points coïncidants; mais il reste possible — et nous verrons (n° 60.) que cela a lieu en réalité — qu'une génératrice de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires est différente de la droite ζ. Si le sommet P du cône circonscrit se trouve sur une génératrice de contact différente de la droite ζ, l'assemblage quadruple de nappes aura pour équivalents $\begin{pmatrix} 4, & 5 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}$. Ces valeurs sont, pour $q=5$, $\beta=1$, comprises au second des groupes d'expressions générales que nous venons de citer. L'assemblage est alors formé d'une seule nappe quadruple, dont une section plane est représentée par une série de la forme

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^2 + cx^{\frac{5}{2}} + dx^{\frac{7}{2}} + \cdots.$$

*) Voir le n° 6. de mon article *sur les singularités des courbes planes.*

Soit dans ce cas particulier, soit pour une position quelconque du sommet P dans le plan ξ au dehors de la droite ξ, le plan tangent au cône circonscrit qui fait avec le plan ξ un angle infiniment petit du premier ordre, fera avec la droite PC un angle infiniment petit du troisième ordre*), ou bien, il se trouvera à une distance infiniment petite du troisième ordre du point conique C. Appliquons cette remarque au cas où le sommet se trouve sur la droite d'intersection du plan ξ avec un plan tangent à l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui fait avec le plan ξ un angle infiniment petit du premier ordre, et qui appartient à la nappe de cette enveloppe dont la génératrice de contact avec le plan ξ est différente de la droite ξ. Alors on voit que ce nouveau plan tangent stationnaire se trouve à une distance infiniment petite du troisième ordre du point conique C. Le point C est donc un point simple de l'arête de rebroussement de la nappe de l'enveloppe qui nous occupe.

Le plan ξ compte pour trois plans tangents à cette nappe qui passent par C. Or nous avons vu dans le n° 54. qu'un plan ξ compte pour 12 plans tangents stationnaires passant par C. Il faut donc qu'au moins une des deux génératrices de contact coïncide avec le plan ξ.

60. *Cône circonscrit ayant pour sommet un point T d'une droite ξ.* On trouve par les procédés ordinaires $a_1 = a$, $n_1' = n' - 1$. Un plan quelconque passant par la droite TC qui joint le sommet au point conique a $x+2$ intersections confondues, le plan ξ en a $x+3$. A l'assemblage de nappes tangentes à ce plan appartiennent trois des ν nappes simples et une des ξ nappes triples d'un cône circonscrit ordinaire. On voit donc que son degré de multiplicité est égal à

$$x + 2 - (x - 3 - 3) = 8$$

Ne rencontrant son plan tangent qu'en neuf génératrices coïncidentes, il est formé d'une seule nappe 8-tuple ayant pour équivalents $\binom{21,\ 7}{0,\ 0}$. On voit donc qu'aucun des plans tangents doubles ou stationnaires de la surface qui passent par la droite ξ, n'est plan tangent double ou stationnaire du cône résidu.

Si nous désignons par X et Y les nombres des plans tangents doubles et stationnaires de la surface qui passent par T et coïncident avec le plan ξ, nous trouverons — de la même manière que dans le n° 58. — les expressions suivantes des nombres b_1' et c_1' appartenant au cône résidu:

---

*) Voir le n° 6. de l'article cité.

$$b_1' = b' - (n' - 2\nu - 3\eta - 4\xi) - 2(\nu - 3) - 3\eta - 4(\xi - 1) - X,$$
$$c_1' = c' - Y.$$

Le sommet T se trouvant (selon le n° précédent) sur la génératrice de contact du plan ξ avec la développable bitangente, et, au moins, sur une de ses génératrices de contact avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, il faut que $X \geqq 2$, $Y \geqq 3$. La seule solution possible de l'équation

$$2X + 3Y = 18,$$

qui résulte de l'application de la première équation plückérienne au cône résidu, est donc $X = 3$, $Y = 4$.

Le dernier de ces résultats admet deux explications différentes: 1° la droite ξ est génératrice simple de toutes les deux nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires qui sont tangentes au plan ξ, ou 2° la droite ξ est génératrice stationnaire de l'une de ces deux nappes. (Le cas où elle était génératrice d'une nappe double dont une section plane avait un point de rebroussement de seconde espèce serait un cas particulier, compris à chacune de ces deux explications.) Or si l'on prend la première des deux explications pour base de recherches ultérieures et opère de la même manière que nous allons faire en prenant la seconde pour base, on obtiendra des formules dont l'application à des surfaces particulières (celles dont nous nous occuperons dans le n° 75.) conduit à des résultats qui se montrent injustes par nos moyens de vérification*). Il faut donc rester à la seconde explication, qui sera aussi rendue plus claire (dans le n° 65.) par la représentation analytique de la singularité qui correspond par le principe de dualité à la singularité ξ.

Avec cette explication, neuf des plans tangents stationnaires de la surface qui passent par le point C appartiendront, selon le n° précédent, à la nappe qui a la droite ξ pour génératrice stationnaire. Il résulte des formules trouvées dans le n° 54. qu'aussi neuf plans tangents à la développable bitangente qui passent par C coïncident avec le plan ξ. Ces propriétés des droites et plans ξ sont exprimées dans l'énoncé suivant:

Une droite ξ est génératrice stationnaire de la développable bitangente et de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; le plan ξ est tangent à ces deux développables le long de cette génératrice; les points correspondants des arêtes de rebroussement des deux développables sont

*) On pourrait peut-être aussi déduire d'une figure que le nombre des plans, tangents à une nappe de l'enveloppe des plans tangents stationnaires tangente au plan ξ le long de la droite ξ, qui passent par un point de la droite ξ, est impair. Alors la première explication se montrerait impossible dès à présent.

*sixtuples**) (*à une seule branche*) *et se trouvent au point conique. — Le plan* ξ *est encore tangent à l'enveloppe des plans tangents stationnaires le long d'une autre droite; le point de contact de celle-ci avec l'arête de rebroussement est un point simple de cette courbe qui se trouve au point conique.*

En substituant les valeurs trouvées de X et Y dans les expressions de b_1' et de c_1', on trouve que les nombres plückériens du cône résidu ont les mêmes valeurs que dans le cas où le sommet se trouvait sur une droite η (voir le n° 58.). Les expressions $\delta_1 = \delta + 2$ et $\varkappa_1 = \varkappa - 1$ qu'on trouve, et les équivalents $\binom{21,\ 7}{0,\ 0}$, déjà trouvés, de la nappe 8-tuple, qui remplace trois nappes simples et une nappe triple, nous montrent que $2(x-3)$ génératrices doubles et 6 génératrices stationnaires — dont l'une s'est transformée en deux génératrices doubles — sont venues se joindre à celles qui coïncident ordinairement avec la droite projetant le point conique, de même que dans le cas où le sommet se trouvait sur une droite η.

Quant aux propriétés ultérieures des droites et plans ξ, nous renvoyons aux n^{os} 64.—67., où nous nous occuperons des propriétés des figures réciproques.

XII.

Plans tangents le long d'une courbe.

61. Un plan tangent μ'-tuple de la surface est un plan où μ' des plans tangents passant par une droite quelconque qui s'y trouve coïncident. Si nous supposons que cette définition soit tangentielle, le plan contiendra une courbe de la classe μ', *la courbe de contact*, dont les tangentes ont la propriété que $\mu'+1$ des plans tangents passant par elles coïncident. Cette courbe, dont nous désignerons l'ordre par ν', et à laquelle nous attribuerons y' et z' tangentes doubles et stationnaires qui sont génératrices de la développable bitangente et de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, η' et ζ' autres tangentes doubles et stationnaires, u' et v' points doubles et stationnaires, peut être composée de courbes de classes inférieures; toutefois nous supposerons qu'il n'y ait pas au nombre de ses parties des points (sommets).

Les propriétés que nous avons attribuées à notre plan correspondent

---

*) Un point d'intersection de n plans tangents consécutifs d'une surface développable est en général point $(n-2)$-tuple de son arête de rebroussement; mais si m des plans consécutifs passent par une seule droite, cette génératrice $(m-1)$-tuple fera $m-2$ fois partie de l'arête de rebroussement „totale". Le point sera donc seulement point $(n-m)$-tuple de *l'arête de rebroussement propre*. On a dans le cas actuel $n=9$, $m=3$.

selon le principe de dualité à celles qui servaient à définir un point conique, dont la définition est ponctuelle (voir le n° 50.), pendant que celle d'un plan tangent le long d'une courbe est tangentielle. On peut donc déduire, par le principe de dualité, les autres propriétés des plans tangents le long d'une courbe de celles des points coniques.

On voit, par exemple, qu'il existe $2\mu' + x'$ tangentes à la courbe de contact ($x' = \nu' + 2\eta' + 3\zeta'$) qui ont la propriété que $\mu' + 2$ des plans tangents passant par elles coïncident (n° 50.). Nous appellerons ces droites les *axes principaux*.

Regardée comme lieu de points, la section faite par le plan tangent le long d'une courbe est composée de celle-ci prise deux fois, de ses η' tangentes doubles prises trois fois, de ses ζ' tangentes stationnaires prises quatre fois, et d'une section résidue d'ordre $n - 2\nu' - 3\eta' - 4\zeta'$. Celle-ci est tangente à la courbe de contact aux $2\mu' + x'$ points de contact avec les axes principaux (n° 54.).

62. *Points de contact avec la courbe double.* L'expression de $b' - b_1'$ dans le n° 54. conduit immédiatement à la détermination complète des contacts du plan tangent le long d'une courbe avec la courbe double; mais pour une partie de ces contacts les propriétés des branches de la courbe double dans le voisinage se présentent d'une manière plus palpable que les propriétés réciproques de nappes de la développable bitangente. Cela a lieu notamment dans les cas où les branches de la courbe double sont formées par l'intersection de deux nappes différentes. Supposons que le plan singulier a en commun avec l'une de ces nappes une ligne α-tuple (A), avec l'autre une ligne β-tuple (B), α étant $\geq \beta$: alors un plan dont la distance d'un point d'intersection de (A) et (B) est infiniment petite du premier ordre, et qui fait des angles finis avec le plan singulier et avec les tangentes aux deux lignes (A) et (B), rencontrera la courbe double en β points, dont les distances de la courbe (A) sont infiniment petites du premier ordre, et les distances de la courbe (B), infiniment petites de l'ordre $\frac{\alpha}{\beta}$, et les distances du plan singulier, infiniment petites de l'ordre α. Les ordres de contact des branches de la courbe double, soit avec la ligne (B), soit avec le plan singulier, en résultent immédiatement. Il nous sera utile, dans ce qui suit*), de remarquer aussi que, dans la section plane, l'une des tangentes en un des β points doubles que nous venons de trouver fait avec le plan singulier un angle infiniment petit de l'ordre $\alpha - 1$, l'autre, un angle infiniment petit de l'ordre $\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}$: les angles

*) On en fait usage dans la démonstration de la formule (21); voir le n° 66.

que font les plans tangents à la surface aux mêmes points avec le plan singulier seront des mêmes ordres.

Pour le moment nous nous contenterons d'indiquer les propriétés suivantes de la courbe double elle même, qui résultent soit des considérations que nous venons de faire, soit des propriétés des figures réciproques que nous avons trouvées par l'étude précédente des points coniques:

Par chacun des $\nu'(n-2\nu'-3\eta'-4\zeta')-2(2\mu'+x')$ points d'intersection de la courbe de contact avec la courbe résidue, passe une seule branche de la courbe double, qui a un contact simple avec le plan singulier et avec la courbe résidue.

Par chacun des $\eta'(n-2\nu'-3\eta'-4\zeta')$ points d'intersection des η' tangentes doubles avec la courbe résidue, passe une seule branche de la courbe double qui a un contact du second ordre avec le plan singulier et avec la courbe résidue.

Par chacun des $\zeta'(n-2\nu'-3\eta'-4\zeta')$ points d'intersection des ζ' tangentes stationnaires avec la courbe résidue passe une seule branche de la courbe double qui a un contact du troisième ordre avec le plan singulier et avec la courbe résidue.

Par chacun des $\eta'(\nu'-4)$ points d'intersection des η' tangentes doubles avec la courbe de contact, passe une branche double de la courbe double; elle forme un point stationnaire, est tangente à la courbe de contact et a un contact six-ponctuel avec le plan singulier.

Par chacun des $\zeta'(\nu'-3)$ points d'intersection des ζ' tangentes stationnaires avec la courbe de contact, passent deux branches de la courbe double; elles sont tangentes à la courbe de contact et ont des contacts quatrepontuels avec le plan singulier.

Par chacun des $\frac{\eta'(\eta'-1)}{2}$ points d'intersection des η' tangentes doubles entre elles, passent trois branches de la courbe double; elles ont des contacts triponctuels avec le plan singulier. Si les deux droites η' sont réelles une seule des trois branches sera réelle; si les deux droites η' sont des imaginaires conjuguées, toutes les trois branches de la courbe double seront réelles.

Par chacun des $\eta'\zeta'$ points d'intersection des η' tangentes doubles avec les ζ' tangentes stationnaires, passe une branche triple de la courbe double; elle a un contact quatreponctuel avec la tangente double — ses équivalents seront donc $\binom{1,\ 2}{0,\ 0}$ — et un contact 12-ponctuel avec le plan singulier.

Par chacun des $\frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2}$ points d'intersection des ζ' tangentes stationnaires, passent quatre branches de la courbe double; elles ont des contacts quatreponctuels avec le plan singulier. (Si les deux droites ζ'

sont réelles, le nombre des branches réelles sera égal à deux ou à zéro; si les deux droites ξ' sont des imaginaires conjuguées toutes les quatre branches de la courbe double seront réelles.)

Par chacun des u' points doubles de la courbe de contact passent deux branches de la courbe double, ayant des contacts simples avec le plan singulier. (Les branches de la courbe double pourront être réelles ou imaginaires, si les branches de la courbe de contact sont réelles; elles seront toujours réelles si le point est un point isolé de la courbe de contact.)

Par chacun des v' points stationnaires de la courbe de contact passe une seule branche de la courbe double, tangente à la courbe de contact et ayant un contact triponctuel avec le plan singulier (n° 56.).

Par chacun des $2\eta'$ points de contact de la courbe de contact avec les η' tangentes doubles passe une branche de la courbe double, tangente à la courbe de contact et ayant un contact 5-ponctuel avec le plan singulier (n° 58.).

Par chacun des ξ' points d'inflexion, passe une branche de la courbe double ayant, elle aussi, un contact triponctuel avec la tangente d'inflexion de la courbe de contact, et ayant un contact 9-ponctuel avec le plan singulier (n° 60.).

63. *Points de contact avec la courbe cuspidale.* L'expression de $c' - c_1'$ dans le n° 54. indique quels sont ces points. On trouve leurs propriétés en appliquant le principe de dualité aux résultats trouvés dans les n^{os} 55. — 60.

Par chacun des $2\mu' + x'$ points de contact des axes principaux avec la courbe de contact, passe une branche de la courbe cuspidale, tangente à la courbe de contact, et ayant un contact triponctuel avec le plan singulier (n° 55.).

Par chacun des v' points stationnaires de la courbe de contact, passe une branche de la courbe cuspidale, tangente au plan singulier (n° 56.).

Par chacun des $2\eta'$ points de contact de la courbe de contact avec les η' tangentes doubles, passe une branche de la courbe cuspidale, tangente à la courbe de contact et ayant un contact 5-ponctuel avec le plan singulier (n° 58.).

Par chacun des ξ' points d'inflexion passent deux branches de la courbe cuspidale: l'une a elle aussi un contact triponctuel avec la tangente d'inflexion de la courbe de contact, et un contact 9-ponctuel avec le plan singulier; l'autre, qui n'est pas tangente à la courbe de contact, a un contact triponctuel avec le plan singulier.

On trouve au moyen des résultats exposés ici et dans le n° précédent, *les points doubles et stationnaires et les points d'intersection de la courbe double et de la courbe cuspidale* qui se trouvent dans le plan

tangent à la surface le long d'une courbe. Leurs nombres sont indiqués dans le n° 2. Il résulte des propriétés réciproques d'un point conique — en particulier des propriétés des cônes circonscrits dont les sommets se trouvent dans les plans qui correspondent à ces points — que tous les points indiqués sont seulement des points doubles de la surface. Un plan tangent le long d'une courbe n'influera donc aux formules (13)—(18) que par les diminutions des termes contenant k, h et bc, qui sont indiquées dans le n° 3. On a en même temps l'explication du terme $\Sigma'[\eta'(\nu'-4)+2\eta'\zeta']$ des formules (9) et (10). Les termes $\Sigma'(\zeta')$ des équations (10) et (12) sont dûs à la circonstance que les droites ζ' sont aussi tangentes d'inflexion de la courbe double et de la courbe cuspidale.

64. *Représentation analytique des points η'* (points de contact des η' tangentes doubles). Prenons pour origine un point η', pour plan $z=0$, le plan singulier, et pour axe $y=0$, $z=0$ la tangente double η'. Alors il résulte du n° 57. que la section faite par un plan passant par l'origine est en général, dans le voisinage de ce point, représentée par une série de la forme $z=ay^{\frac{5}{2}}+\cdots$, et il résulte du n° 58. que la section faite par un plan ($y=0$) passant par la droite η' est en général, dans le voisinage de l'origine, composée de cette droite et d'une branche représentée par une série de la forme $z=ax^5+\cdots$. Sachant encore que la section faite par le plan $z=0$ est composée de la droite $y=0$ prise trois fois et d'une courbe tangente à celle prise deux fois, et que la surface passe par des points dont les coordonnées x, y, z sont infiniment petites des ordres 1, 2 et 5, respectivement*), on trouve que l'équation de la surface aura la forme suivante

$$(I)\qquad z^2+2x(b_0y^2+2b_1x^2y+b_2x^4)z+y^3(c_0y+c_1x^2)^2+\cdots=0,$$

les termes non écrits étant, pour des valeurs de y et z proportionnelles, respectivement, à x^2 et à x^5, d'un degré supérieur à 10 par rapport à x.

L'équation

$$(II)\qquad x^2(b_0y^2+2b_1x^2y+b_2x^4)^2-y^3(c_0y+c_1x^2)^2=0$$

doit représenter des points des projections de la courbe double et de la courbe cuspidale infiniment voisins de l'origine. Il faut donc encore que les coëfficients b et c satisfassent aux conditions exprimant que cette équation a une racine double et une racine triple.

---

*) Celà a lieu pour des points de la courbe double ou cuspidale (voir le n° 58.). C'est par ce dernier moyen qu'on voit que l'équation ne contient aucun terme x^2yz. La nécessité de l'absence de ce terme se montrerait aussi par les considérations suivantes.

On déduit de l'équation (I) que, pour les valeurs de y et z, proportionnelles, respectivement, à x^2 et x^5, qui satisfont à cette équation, $\frac{\partial z}{\partial y}$ est proportionnel à x^3, le premier terme de la série servant à exprimer $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant déterminé par l'équation

$$(\text{III}) \quad [z+x(b_0y^2+2b_1x^2y+b_2x^4)]\frac{\partial z}{\partial y}+2x(b_0y+b_1x^2)z + \frac{3}{2}y^2(c_0y+c_1x^2)^2+c_0y^3(c_0y+c_1x^2)=0.$$

On en conclut qu'en des points de la surface déterminés par des valeurs de x et y infiniment petites du premier ordre et du second ordre, respectivement, les plans tangents font avec le plan $z=0$ des angles infiniment petits du troisième ordre, $\frac{\partial z}{\partial x}$ étant infiniment petit d'ordre supérieur. Seulement si le point (xyz) se trouve sur une des deux courbes singulières déterminées par (II), l'équation (III) devient identique; mais en regardant ces cas comme des cas limites, ou en y appliquant les procédés ordinaires du calcul différentiel, on voit qu'aussi les plans tangents à la surface aux points de ces courbes ont la propriété énoncée. Aussi l'angle que font les deux plans tangents en un point de la courbe double, l'un avec l'autre, est infiniment petit du troisième ordre.

Les branches de la courbe double et de la courbe cuspidale qui passent par l'origine, ayant des contacts simples avec la droite $y=0$, $z=0$ et des contacts 5-ponctuels avec le plan $z=0$, seront représentées par des équations des formes

$$y=ax^2+\cdots, \quad z=bx^5+\cdots.$$

On en déduit que leurs plans osculateurs en des points déterminés par des valeurs de x infiniment petites du premier ordre, font avec le plan $z=0$, et avec les plans tangents de la surface aux mêmes points, des angles infiniment petits du troisième ordre.

65. *Représentation des points* ξ' (points de contact des ξ' tangentes stationnaires). Nous prenons pour origine le point ξ', pour axe $y=0$, $z=0$ la tangente ξ', et pour plan $z=0$ le plan singulier. Alors on déduit des propriétés d'une figure réciproque trouvées dans les n^{os} 59.—60., que l'équation de la surface aura la forme suivante*):

*) On trouve au moyen du n° 6. de mon article sur les singularités planes que les sections faites par les plans $y=\alpha x$ ont deux branches représentées par des séries des formes suivantes

$$z=ax^3+bx^4+\cdots \text{ et } z=ax^3+b'x^4+\cdots.$$

$$(I) \qquad z^2 + 2\varphi(x,y)\cdot z + y^4[\psi(x,y)]^2 + \cdots = 0,$$

où

$$(II) \qquad \begin{aligned}\varphi(x,y) = {} & b_0y^3 + b_1x^3y^2 + b_2x^6y + b_3x^9 \\ & + c_0y^4 + c_1xy^3 \\ & + d_0y^5 + d_1xy^4 + d_2x^2y^3 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

$$(III) \qquad \begin{aligned}\psi(x,y) = {} & b_0y + e_1x^3 \\ & + c_0y^2 + c_1xy \\ & + f_0y^3 + f_1xy^2 + f_2x^2y \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

les termes non écrits étant, pour toutes les valeurs infiniment petites des coordonnées, d'un degré supérieur à celui d'un ou de plusieurs des termes écrits. Le discriminant $\varphi^2 - y^4\psi^2$ aura la forme suivante:

$$(IV) \qquad \begin{aligned}Ay^8 + Bxy^7 + Cx^2y^6 + Dx^3y^5 + Ex^6y^4 + Fx^9y^3 + Gx^{12}y^2 \\ + Hx^{15}y + Jx^{18} + \cdots.\end{aligned}$$

En égalant cette quantité à zéro, on trouve, selon la règle de Newton et Cramer*), trois valeurs de y proportionnelles à x, et cinq valeurs proportionnelles à x^3. L'équation que nous venons de former déterminant les branches de la courbe double et cuspidale qui passent par l'origine, il faut que les trois premières racines soient égales, et que les cinq autres composent une racine double et une racine triple, ce qui impose des conditions aux coëfficients des termes de φ et ψ. On retrouve ainsi les propriétés déjà indiquées des branches des courbes singulières qui passent par le point qui nous occupe.

On trouve encore, par des procédés analogues à ceux dont nous avons fait usage dans le n° précédent, que les plans tangents à la surface aux points des branches des courbes singulières ayant la droite ξ' pour tangente d'inflexion, qui se trouvent en des distances infiniment petites du premier ordre du point ξ', font avec le plan singulier des angles infiniment petits du sixième ordre, et que les plans osculateurs**) des courbes singulières en ces mêmes points font avec le plan singulier, et avec les plans tangents de la surface, des angles du même ordre; que le plan tangent à la surface en un point de l'autre branche de la courbe cuspidale dont la distance du point ξ' est infiniment petite du premier ordre, fait avec le plan singulier un angle infiniment petit du second ordre, pendant que le plan osculateur de la courbe

*) Voir par exemple Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Lindemann, p. 331.

**) Comparer à la dernière note du n° 60.

singulière en ce même point fait avec le plan singulier un angle du premier ordre.

En appliquant le principe de dualité aux résultats trouvés ici et dans le n° précédent, on trouve les propriétés des branches de la courbe de contact de la développable bitangente, et de la courbe parabolique, qui sont tangentes, en un point conique, aux droites η et ξ.

66. *Formules* (19) *et* (21). Nous avons déjà démontré complètement toutes les formules indépendentes entre elles du n° 3. à l'exception de la formule (19)*), où nous avons encore à rendre compte, soit des coefficients de η' et de ξ' dans le premier membre, soit des coefficients de η et ξ dans le second membre. Les résultats trouvés dans les n^{os} précédents, nous fournit le moyen de la première de ces déterminations, dont la seconde résulte par le principe de dualité.

Il résulte du n° 64. que le plan singulier compte pour trois plans osculateurs à la branche de la courbe cuspidale qui passe par un des $2\eta'$ points η'. Un plan osculateur qui fait un angle infiniment petit avec le plan singulier faisant un angle infiniment petit du même ordre avec le plan tangent au même point, le coefficient de η' devient égal à $2 \cdot 3 = 6$.

On voit de la même manière, au moyen du n° 65., que six coïncidences des mêmes deux plans sont dues à la branche de la courbe cuspidale qui a une droite ξ' pour tangente d'inflexion. Un seul plan osculateur à l'autre branche de la courbe cuspidale qui passe par le même point coïncide avec le plan singulier, et le plan osculateur qui fait avec ce plan un angle infiniment petit du premier ordre fait avec le plan tangent — dont l'angle avec le plan singulier est du second ordre — un angle du premier ordre. Le coefficient de ξ' devient donc égal à $6 + 1 = 7$.

On trouve par les mêmes procédés que les coefficients de η' et de ξ' dans l'équation (21) — dont les deux membres indiquent le nombre des coïncidences des deux plans tangents en un point de la courbe double (voir le n° 8.) — sont égaux, respectivement, à $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ et à $2 \cdot 6 = 12$. On peut déterminer les coefficients des termes u', $\eta'(\nu' - 4)$, $\xi'(\nu' - 3)$, $\frac{\eta'(\eta' - 1)}{2}$, $\eta'\xi'$, $\frac{\xi'(\xi' - 1)}{2}$ de la même équation au moyen du n° 62. En faisant le même usage des notations α et β qu'en ce n°, on trouve, au moyen de la règle ordinaire servant à déterminer les degrés de multiplicité des résultats obtenus par le principe de correspondance, que ces coefficients auront l'expression suivante

*) Les significations des deux membres de cette équation sont indiquées dans le n° 7.

$$(\alpha-1)\beta \cdot \frac{\left(\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}\right)}{\alpha-1} + (\beta-1)\cdot\alpha = 2\alpha(\beta-1).$$

Nous avons déjà (dans le n° 56.) rendu compte du coefficient 3 du terme ν' de la même équation — qu'il n'est pas du reste nécessaire de démontrer directement.

67. *Note sur les propriétés de situation des surfaces ayant des „plans tangents le long de courbes".* Nous dirons que la surface *change de position* par rapport à la courbe de contact d'un plan ayant avec elle un contact *d'ordre impair*, aux points où la nappe tangente au plan passe de l'un côté du plan à l'autre (ou est remplacée par une nappe qui se trouve de l'autre côté du plan). Si le contact est *d'ordre pair* le changement de position aura lieu aux points où la partie de la nappe qui se trouve à droite de la courbe de contact passe de l'un côté du plan à l'autre. Les représentations analytiques des nappes de la surface qui passent par les points η' et ζ' (n^{os} 64. et 65.) nous montrent, que la surface change de position en ces points, soit par rapport à la courbe de contact simple, soit par rapport aux droites η' et ξ'. Il n'est pas difficile de discuter de même les $2\mu' + x'$ points de contact de la courbe de contact avec la section résidue, et ses ν' points stationnaires.

On obtient ainsi les résultats suivants:

La surface change de position par rapport à la courbe de contact 1° *aux* $2\mu' + x'$ *points de contact avec la section résidue,* 2° *aux* $2\eta'$ *points de contact avec les* η' *tangentes doubles,* 3° *aux* ξ' *points de contact avec les* ξ' *tangentes stationnaires.*

La surface change de position par rapport aux η' *et* ζ' *tangentes doubles et stationnaires à leurs points de contact avec la courbe de contact.*

Il est évident que les passages par la droite à l'infini ont pour les courbes de contact d'ordre impair, mais non pas pour les courbes de contact d'ordre pair, le même effet qu'un changement de position. Ces changements à l'infini compris le nombre de changements par rapport à une seule courbe de contact doit être pair, ce qui nous fournit une espèce de vérification des résultats que nous venons de trouver*). On trouve de même que la somme des nombres des points de contact *d'une branche complète* de la courbe de contact avec la section résidue et avec les η' et ξ' tangentes singulières est pair ou impair,

*) En effet

$$\nu' + 2\mu' + x' + 2\eta' + \zeta' = 2\mu' + 2\nu' + 4\eta' + 4\zeta'$$

est un nombre pair.

suivant que la branche est d'ordre pair ou impair. On aura par le principe de dualité une propriété analogue des nappes du cône tangent en un point conique.

XIII.

Applications.

68. En appliquant les formules du n° 3. à plusieurs cas particuliers, nous n'avons pas pour seul but de déduire des résultats qui peuvent être utiles pour d'autres recherches. Nous montrerons aussi, par quelques-uns de nos exemples, comment on peut appliquer les formules à des surfaces dont les singularités n'ont pas toute la généralité supposée à la déduction des formules (voir le n° 2.). En même temps nous cherchons un moyen de vérifier les résultats de recherches difficiles à plusieurs égards (voir la seconde note du n° 19. et le n° 60.). Certes la déduction directe des formules (20)—(22), qui dépendent des équations (1)—(18) du n° 3., nous fournit — où elle n'est pas trop difficile — un bon moyen de vérification; mais cette vérification ne s'étend pas à l'équation (19)*).

Pour tirer ce dernier avantage de l'application des formules à des cas particuliers, il faut avoir, dans ces cas, les moyens de déterminer, sans les formules à vérifier, un ou plusieurs des nombres des singularités qu'on trouve ordinairement par ces formules. Nous nommerons ici quelques moyens de vérification qui sont applicables à des surfaces du quatrième ou du troisième ordre.

La courbe commune à une surface donnée d'ordre n et à sa développable bitangente d'ordre q' est de l'ordre nq'. Cette courbe est en général composée de la courbe de contact d'ordre ϱ', prise deux fois, et d'une courbe d'intersection. Celle-ci se réduit *pour* $n=4$ aux droites de la surface s'il y en a; car une génératrice de la développable qui a, à côté de ses deux points de contact, un point d'intersection avec la surface s'y trouve en entier. Si la surface ne contient aucune droite, ce qui est le cas général, on aura la formule

$$2q' = \varrho'.$$

Si une surface du quatrième ordre est douée d'un point conique triple, les $2\mu + x$ tangentes principales, qui doivent rencontrer la surface en 5 points coïncidents, se trouveront en entier sur elle. Un plan passant par une de ces droites fera une section composée de la droite et d'une section résidue du troisième ordre ayant un point double

*) On trouvera, du reste, dans l'addition sur le genre (n° 76.) le moyen d'une nouvelle déduction générale de la plupart des termes de cette équation.

au point conique. Celle-ci rencontre encore la droite en un point simple, qui devient un point de contact du plan avec la surface. Le plan sera donc plan tangent double et la tangente principale sera génératrice de contact de la nappe correspondante de la développable bitangente, si le plan est tangent au cône tangent du point conique, ou s'il passe par une génératrice singulière η ou ξ de ce cône. Cette nappe est simple, double ou triple*), respectivement, de façon que la droite devient génératrice $(x-2)$-tuple de la développable. On aura donc

$$4q' = 2\varrho' + (2\mu + x)(x-2),$$

μ étant $= 3$.

Dans les cas où une surface du *quatrième ordre* ne contient aucune droite, chacun des $4s'$ points d'intersection de l'arête de rebroussement de la développable bitangente avec la surface se trouvera en un point de contact du plan tangent double qui y correspond avec la surface, et *en général* au point de contact simple d'un des plans γ', qui ont avec la surface un contact simple et un contact stationnaire. En chacun de ces γ' points de contact coïncident deux des $4s'$ points d'intersection, de façon que**)

$$2s' = \gamma'.$$

La déduction de cette formule montre qu'elle subira des modifications si la surface contient des droites, des points biplanaires ou des points coniques dont l'ordre μ est > 2. (Voir les n^{os} 72., 74. et 75.)

La courbe commune à une surface cubique et à l'enveloppe de ses plans tangents stationnaires, est composée de la courbe parabolique prise trois fois, et de ses droites prises autant de fois qu'elles sont génératrices de l'enveloppe, ou bien, en général, deux fois. On trouve pour une *cubique générale*

$$3r' = 3\sigma' + \beta';$$

si la surface présente des singularités, il faudra y avoir égard.

Nous remarquerons encore que dans les cas où la courbe double ou cuspidale, s'est décomposée en plusieurs parties indépendentes entre elles, on peut déduire plusieurs formules, en appliquant aux parties respectives les procédés qui ont conduit aux formules (14) et (17), ou (15) et (18).

---

*) Comparer aux n^{os} 74. et 75.

**) Le nombre γ' d'une surface générale d'ordre n est égal à

$$4n(n-2)(n-3)(n^3+3n-16),$$

et pour $n = 4$ à 1920. Nous faisons ici cette observation à cause d'une erreur typographique à la p. 218 du mémoire de M. Cayley „On Reciprocal Surfaces", qui s'est conservée à la p. 616 de l'édition de M. Fiedler de la „Geom. of three Dimensions."

69. *Surfaces du troisième ordre.* La développable bitangente se réduit ici à des faisceaux de plans, de façon que $q' = 0$, et l'équation (10′) devient inapplicable (n° 5.). Une partie des autres équations deviennent identiques.

Si la surface est *douée d'une droite double*, elle sera *reglée*, ce qui amène des modifications aux points singuliers. Étant „une surface regardée comme lieu de points à laquelle on a attribué une courbe (droite) double", elle doit avoir des points-pinces; mais ceux-ci diffèrent beaucoup du type général des points-pinces dont nous nous sommes occupés dans les n^{os} 15.—20. Le cône résidu qui a un de ces points pour sommet est de l'ordre $a_1 = 0$ et de la classe $n_1' = 1$; il ne peut donc avoir aucune génératrice double; au lieu des deux branches de la courbe parabolique — qui n'existe pas —, la droite singulière d'un plan-pince, également déformé, passe par le point. Le point-pince manque donc les propriétés auxquelles il doit son introduction dans la formule (19); mais la surface n'ayant ni courbe cuspidale, ni plans tangents stationnaires, on n'a pas besoin de cette formule. Les autres formules à l'exception de l'équation (10′) déjà nommée et de l'équation (10), restent en vigueur. On trouve les résultats numériques suivants*): $n = n' = 3$, $a = a' = 4$, $\varkappa = \varkappa' = 3$, $b = b' = 1$, $\varrho = \varrho' = 1$, $j = j' = 2$.

Si la surface ne contient aucune courbe double, mais *un point conique* aux nombres plückériens $\mu = \nu = 2$, $y = \eta =$ etc. $= 0$, les six tangentes principales en ce point se trouveront en entier sur la surface, et le cône circonscrit résidu qui a le point conique pour sommet sera composé de ces droites. Alors les expressions des nombres δ_1 et $\varkappa_1$, trouvées dans le n° 54., des génératrices singulières de ce cône résidu ne sont pas applicables, pendant que les expressions de a_1, n_1', b_1' et c_1' restent en vigueur, ce qui résulte de leur déduction. On aurait pu se servir de cette circonstance pour la déduction des nombres a, n', b' et c' de la surface. Toutes les équations du n° 3. — à l'exception de (10′) — sont applicables à ce cas. Les résultats numériques sont indiqués dans une table à la fin du présent n°.

Si la surface a *deux points coniques* ($\mu = \nu = 2$), deux tangentes principales de chacun de ces points coïncideront avec la droite qui les joint**), et formeront un élément développable. Le plan tangent le long de cet élément présente les mêmes propriétés que les plans-

*) Voir la table à la page 235 du mémoire de M. Cayley: *On Cubic Surfaces*, Phil. Trans. 1869.

**) Les droites d'une cubique qui passent par un point double (les tangentes principales en ce point) seront les droites d'intersection du cône tangent avec le cône projetant une section plane de la surface. Il est commode ici, et dans l'exemple suivant, de prendre une section passant par l'autre point double.

pinces déformés d'une cubique gauche. Il faut donc substituer $j' = 1$ dans toutes les formules du n° 3. à l'exception de (19), où il faut substituer $j' = 0$. — Les expressions, trouvées dans le n° 54., des nombres a_1 et n_1' appartenant au cône circonscrit résidu qui a pour sommet un des points coniques restent applicables à ce cas; dans les expressions de b_1' et c_1' il faut substituer 4 à $2\mu + x$, parce que le cône tangent ne contient que 4 tangentes principales propres, et il faut encore ajouter le terme -1 à l'expression de b_1', parce que le plan-pince, qui est un plan tangent double de la surface, ne passe par aucune des quatre droites qui composent le cône résidu. Il faut aussi dans la formule (19) du n° 3. substituer $2 \cdot 4$ à $\Sigma(2\mu + x)$. Les autres formules du n° 3. — à l'exception de (10′) — restent immédiatement applicables.

Afin d'avoir encore un exemple des modifications que subissent les formules générales si la surface est du troisième ordre, nous discuterons encore le cas où la surface a *un point conique* ($\mu = \nu = 2$) et *un point biplanaire*. Alors trois tangentes principales du point conique, et deux tangentes principales du point biplanaire coïncideront avec la droite qui joint ces deux points. Cette droite sera un élément développable de la surface. La section faite par le plan tangent le long d'elle, est composée de cette droite prise deux fois et d'une autre droite (tangente principale) passant par le point biplanaire B. Un cône circonscrit dont le sommet P se trouve en ce plan singulier sera composé de ce plan et d'un cône résidu dont deux nappes sont tangentes au plan le long de PB. Une courbe correspondant selon le principe de dualité à ce cône, aurait, au point correspondant au plan singulier, un point de contact de deux branches, qui serait en même temps un „sommet“ simple: sa singularité serait formée de ce sommet joint à un point singulier qui ne pourrait être qu'un point stationnaire. La courbe aurait donc la propriété d'une section plane d'une surface passant par un point-clos qui servait, dans le n° 22., à définir ces points. Il en résulte que le plan singulier est un plan-clos*). Pour cette raison il faut substituer $\chi' = 1$ dans les formules (16′) et (18′). Mais le plan-clos que nous rencontrons ici diffère beaucoup du type général de ces plans dont nous avons parlé dans le n° 28., ce que montrent les propriétés déjà indiquées de la section qu'il fait, et ce qui résulte aussi de la circonstance que la surface n'a aucune courbe cuspidale. A cause de cette dernière circonstance il faut substituer $\chi' = 0$ dans

*) Les contours apparants d'une modèle de la surface qui nous occupe présenteraient donc un bon exemple de la transition γ_0' décrite dans le n° 16. de mon mémoire déjà cité sur les *systèmes de courbes*, et représentée par les figures 13, 14, 15 du même mémoire.

les formules (15) et (18), dont les deux membres deviennent par celà égaux à zéro, et dans la formule (19). — A cause de la déformation du point conique il faut remplacer dans la formule (19) le terme $\Sigma(2\mu+x)$ par le nombre 3 des tangentes principales propres en ce point. — L'un des deux plans tangents singuliers du point biplanaire B est le plan-clos, pendant que l'autre est doué des propriétés ordinaires aux plans tangents singuliers d'un point biplanaire. Ayant eu égard déjà à l'influence du plan-clos, nous devons remplacer dans les formules (15′) et (18′) les termes $16\,B$ et $-6\cdot 12\,B$, qui résultent des contacts des *deux* plans singuliers avec l'enveloppe des plans tangents stationnaires, par $8\,B$ et $-6\cdot 6\,B$. — Les modifications des expressions, indiquées dans les n^{os} 54. et 33., des nombres plückériens des cônes circonscrits résidus dont les sommets se trouvent au point conique, ou au point biplanaire, sont faciles à trouver*).

La table suivante contient les résultats de ces recherches et des recherches analogues. C représentant le nombre des points coniques ($\mu=\nu=2$), les trois premières séries, après celle qui contient les n^{os} des espèces des surfaces**), indiquent les nombres des points singuliers qu'on leur a attribués. Tous les nombres qu'on ne peut substituer immédiatement dans toutes les formules du n° 3. — à l'exception de (10′) — sont marqués, soit par un suffixe, soit par un astérique. Le suffixe d'un nombre C indique le nombre des tangentes principales propres de chaque point conique; ce nombre doit remplacer $2\mu+x$ dans la formule (19). Le suffixe d'un nombre B indique le nombre des plans tangents singuliers propres de chaque point biplanaire; si ce nombre est égal à 1 ou 0 — au lieu de 2 — il faut remplacer B par $\frac{B}{2}$ ou 0 dans les formules (15′) et (18′). Les tangentes singulières d'un point uniplanaire d'une surface cubique étant des droites de contact de plans-pinces, il faut, pour appliquer la formule (19) à des surfaces douées d'un point uniplanaire, remplacer le coëfficient 14 de U par 2, ce qui résulte de la déduction de ce coëfficient dans le n° 41. Les plans-pinces, les plans-clos et les plans biponctuels sont déformés de manière qu'il faille substituer $j'=0$, $\chi'=0$ et $B'=0$ dans les formules (15), (18) et (19).

---

*) Le cône circonscrit *total* qui a pour sommet le point biplanaire est composée de la tangente singulière en ce point prise trois fois et des quatre $(1+3)$ tangentes principales propres. On voit donc que la section correspondante de la surface réciproque a les propriétés indiquées dans la note du n° 22.

**) D'après MM. Schläfli et Cayley.

Surfaces non gauches du 3me ordre.

Valeurs communes à toutes les espèces:

$n = 3,\ a = 6,\ \delta' = 0,\ \varkappa' = 9,\ q' = 0,\ \gamma' = 0,\ b = c = \text{etc.} = 0.$

	I	II	IV	VIII	XVI	III	VI	XIII	IX	XVII	XXI	XII
C	0	1	2_4	3_2	4_0	0	1_3	2_1	0	1_0	0	0
B	0	0	0	0	0	1	1_1	1_0	2_1	2_0	3_0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1*
n'	12	10	8	6	4	9	7	5	6	4	3	6
δ	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1	0	3
$\varkappa$	6	6	6	6	6	7	7	7	8	8	9	6
b'	27	15	7	3	3	9	3	1	0	0	0	3
k'	351	105	21	3	3	36	3	0	0	0	0	3
t'	45	15	3	1	1	6	0	0	0	0	0	1
q'	27	15	7	3	3	9	3	1	0	0	0	3
c'	24	18	12	6	0	16	10	4	8	2	0	6
r'	30	24	17	9	0	18	12	5	8	2	0	7
m'	72	48	28	12	0	24	12	4	0	0	0	6
h'	180	96	38	6	0	84	30	2	24	0	0	7
β'	54	30	13	3	0	18	6	1	0	0	0	3
σ'	12	12	10	6	0	12	9	4	8	2	0	6
j'	0	0	1*	3*	6*	0	0	1*	0	0	0	3*
χ'	0	0	0	0	0	0	1*	2*	0	2*	0	0
B'	0	0	0	0	0	0	0	0	1_0	1_0	3_0	0

Presque tous ces nombres, et plusieurs autres qui ont rapport à des surfaces présentant des points singuliers de formes encore plus particulières, sont indiqués par M. Cayley dans la table déjà citée*). Seulement plusieurs des valeurs de r' et h' trouvées par ce savant, diffèrent de celles que nous venons de trouver, ce qui est un effet du manque des termes dépendant de B — ou des „plans de singularité inexpliquée“ qui accompagnent ces points — dans sa formule correspondant à notre formule (18′), et de sa supposition sur l'équivalence de U à $3C$. — La différence des valeurs de k' dans la table de M. Cayley et dans la nôtre n'est qu'apparente: elle résulte de la signification différente de la notation k'. (Voir les notes du n° 1.)

La valeur 0 de m' dans les cas IX et XVII montre que l'enveloppe des plans tangents stationnaires est composée de cônes; en considérant les valeurs correspondantes de c', r' et h', on voit que ces

*) *On Cubic Surfaces* p. 235.

cônes sont du second ordre et qu'il y en a 4 dans le premier de ces cas, un seul dans le second*).

Si, à côté des autres singularités, on attribue à une des surfaces des plans osculateurs, on trouvera sans aucune difficulté les modifications de t', r', m', h' et β' qui en résultent, au moyen de la note ajoutée au n° 49.

70. *Surfaces du quatrième ordre à une conique double.* On a ici

$$n=4,\ b=q=2,\ s=k=t=\gamma=c=r=m=h=\beta=\sigma=\chi=0,$$

et si l'on n'attribue à la surface aucune des singularités extraordinaires

$$j'=\chi'=B=B'=\cdots=0,$$

pendant que j, qui n'est plus extraordinaire parce que nous avons attribué une courbe double à une surface regardée comme lieu de points, appartient aux nombres à déterminer. On trouve au moyen des équations du n° 3.

$$n'=12,\ a=8,\ \delta=4,\ \delta'=8,\ \varkappa=12,\ \varkappa'=12,\ \varrho=4,\ j=4,$$
$$b'=26,\ q'=10,\ k'=320,\ t'=40,\ \gamma'=0,\ \varrho'=36,\ c'=24,\ r'=36,$$
$$m'=88,\ h'=180,\ \beta'=52,\ \sigma'=16.$$

L'équation (10′), qui donnerait $s'=-48$, nous montre que la surface contient des droites qui sont des axes de faisceaux de plans tangents doubles. La développable bitangente est composée de ces faisceaux et d'une surface d'ordre $q'=10$. L'ordre $[\varrho']$ de la courbe de contact de celle-ci se détermine par un procédé indiqué dans le n° 68.; on trouve $[\varrho']=2q'=20$. *Le nombre des droites de la surface sera donc égal à* $\varrho'-[\varrho']=16$. Désignant par $[b']$, $[q']$, $[k']$, $[s']$ les nombres qui appartiennent à l'enveloppe des plans tangents doubles qui ne font pas partie des 16 faisceaux, on aura

$$[b']=[q']=10,\quad [k']=320-\frac{16\cdot 15}{2}-16\cdot[b']=40,\quad [s']=0.$$

Une section plane de cette enveloppe est donc composée de 5 coniques, ou bien, *l'enveloppe est composée de* 5 *cônes du second ordre.* —

La section faite par un plan tangent triple est composée d'une section conique et de deux droites: le plan appartient donc à deux des 16 faisceaux, et il est tangent à un des 5 cônes. La valeur $40=5\cdot\frac{16}{2}$ de t' nous montre que toutes les droites de la surface sont tangentes à chacun des cônes, et qu'elles sont distribués par couples à huit plans tangents à lui. Chaque droite rencontre cinq autres.

---

*) M. Cayley a déduit ces propriétés des équations des surfaces, *On Cubic Surfaces* p. 295 et 316. Dans le premier cas elles discordent avec les nombres r' et h' qu'il attribue à la surface.

Les 52 plans tangents stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires se distribuent de la manière suivante: chacun des faisceaux en contient deux, et chacun des cônes est tangent à quatre. En effet, $X = 2$, $Y = 4$ est la seule solution possible de l'équation indéterminée $16\,X + 5\,Y = 52$.

Nous voyons donc que les propriétés intéressantes et connues*) de la surface qui nous occupe ici sont exprimées par les valeurs des nombres qui servent à la caractériser. Réciproquement, l'équation de la surface, à laquelle on peut donner la forme suivante**)

$$\varphi_2{}^2 - \omega_2 \psi_1{}^2 = 0,$$

les suffixes indiquant les ordres des fonctions φ, ψ et ω, peut servir à la détermination de plusieurs des nombres. Les points-pinces, par exemple, seront les quatre points d'intersection de la surface $\omega_2 = 0$ avec la courbe double $\varphi_2 = 0$, $\psi_1 = 0$.

71. *Surfaces du quatrième ordre à une conique cuspidale.* On a

$$n=4,\quad c=r=2,\quad m=h=\beta=b=q=s=k=t=\gamma=\varrho=j=0,$$

On en déduit successivement, au moyen des équations du n° 3.,

$$a=6,\ \varkappa'=8,\ \delta'=1,\ \sigma=2,\ \chi=2,\ \varkappa=8,\ \delta=0,\ n'=6,\ c'=8,\ b'=0.$$

En introduisant ces valeurs aux équations (13′) et (16′), et en supposant que les nombres de singularités extraordinaires soient égaux à zéro, on trouverait ensuite $\sigma' = 10$, $\varrho' = -4$, ce qui nous montre que notre supposition est impossible. Or, b' étant égal à zéro, il faut qu'aussi ϱ' ait cette valeur. Les deux équations y conduiront si l'on attribue à la surface un plan tangent le long d'une conique***) ($\mu' = \nu' = 2$). On voit aussi directement que la surface doit présenter en général cette singularité. En effet, nous avons trouvé qu'elle a deux points-clos ($\chi = 2$). La section faite par un plan passant par ces deux points a deux points de contact de deux branches (n° 22.). Étant du quatrième ordre elle doit être composée de deux coniques. Ces deux coniques coïncideront, si le plan passe par la tangente singulière en un des points-clos, ce qui montre qu'il passe alors aussi par celle de l'autre. La conique devient une courbe de contact du plan avec la surface. Elle remplace, en chacun des points-clos, la branche de la courbe parabolique qui est tangente à la tangente singulière d'un point-clos ordinaire. Le terme 2χ de l'équation (19) étant dû à cette branche

*) Voir les mémoires sur ces surfaces des MM. Kummer et Clebsch dans les t. LXIV et LXIX du Journal de Borchardt.

**) Il est facile, en effet, de transformer $\varphi_2{}^2 + \chi_1 \varphi_2 \psi_1 + \omega_2 \psi_1{}^2$ en une expression de la forme $\varphi_2{}'^2 - \omega_2{}' \psi_1{}^2$. Comparer au n° 16.

***) La même circonstance explique le fait que $\delta' = 1$ pendant que $\delta = 0$.

(voir le n° 27.), il faut substituer dans cette équation $\chi = 0$, pendant que dans les autres χ a la valeur déjà trouvée de 2. La surface étant regardée comme lieu de points, le plan tangent le long d'une conique n'a pas ici les propriétés ordinaires à un plan tangent le long d'une courbe. Notamment il manque les axes principaux.

Il faut donc substituer dans l'équation (19)*) $2\mu' + \varkappa' = 0$ dans les autres $\Sigma'(\mu') = \Sigma'(\nu') = 2$. Les autres applications des formules sont immédiates.

On trouve ainsi que les enveloppes des plans tangents doubles et stationnaires sont déterminées par les nombres suivants

$$b' = q' = s' = k' = t' = \gamma' = \varrho' = \beta' = j' = 0,$$
$$c' = 8, \quad r' = 8, \quad m' = 0, \quad h' = 24, \quad \sigma' = 8.$$

Ces dernières valeurs nous montrent que *l'enveloppe des plans tangents stationnaires est composée de quatre cônes du second ordre*, et que *la courbe parabolique est composée de quatre coniques planes.*

La surface peut être représentée par une équation de la forme**)

$$\varphi_2^2 + \omega_1 \psi_1^3 = 0.$$

Le plan $\omega_1 = 0$ est le plan tangent le long d'une courbe, ses points d'intersection avec la conique cuspidale ($\psi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$), les points-clos.

72. *Surfaces du quatrième ordre à un point biplanaire.* On a

$$n = 4, \quad B = 1,$$
$$b = q = s = k = t = \gamma = \varrho = j = c = r = m = h = \beta = \sigma = \chi = 0;$$
$$U = j' = \text{etc.} = 0.$$

L'application des formules est immédiate. On trouve

$a = 12$, $\varkappa' = 24$, $\delta' = 28$, $\varkappa = 25$, $\delta = 12$, $n' = 33$,
$b' = 390$, $2q' = \varrho' = \beta' = 284$, $s' = 768$, $k' = 73516$, $t' = 2234$, $\gamma' = 1512$,
$c' = 88$, $r' = 116$, $m' = 768$, $h' = 3344$, $\sigma' = 32$.

On a ici $4s' = 2\gamma' + 2(n' - 9)$. (Voir le n° 68.)

73. *Surfaces du quatrième ordre à un point uniplanaire.* On a $n = 4$, $U = 1$, $b = c = \text{etc.} = 0$. On trouve par une application immédiate des formules:

---

*) On peut du reste, dans le cas actuel, se passer de cette équation (dont la déduction ordinaire cesse d'être immédiatement applicable parce que $m = 0$ et $m' = 0$); car $\beta' = 0$ est une conséquence nécessaire de $b' = 0$.

**) Voir le n° précédent et le n° 23.; la fonction χ est constante dans le cas actuel.

$a=12$, $\varkappa'=24$, $\delta'=28$, $\varkappa=24$, $\delta=15$, $n'=30$,
$b'=312$, $2q'=\varrho'=\beta'=248$, $2s'=\gamma'=1128$, $k'=46762$, $t'=1536$,
$c'=78$, $r'=108$, $m'=338$, $h'=2577$, $\sigma'=32$.

74. *Surfaces du quatrième ordre sans courbes multiples mais à un point conique triple dont le cône tangent est doué d'une génératrice double.* La génératrice double doit être, en général, une droite η, parce que la surface n'a aucune courbe double.

Le cône tangent a donc les nombres plückériens suivants:

$$\mu=3,\quad \nu=4,\quad \eta=1,\quad y=z=\xi=u=0,\quad v=3.$$

On a encore $n=4$, $b=c=\text{etc.}=0$. On trouve par une application immédiate des formules:

$a=12$, $\varkappa'=24$, $\delta'=28$, $\varkappa=19$, $\delta=26$, $n'=23$,
$b'=169$, $q'=94$, $k'=13321$, $t'=497$, $\gamma'=552$, $\varrho'=164$,
$c'=52$, $r'=71$, $m'=176$, $h'=1112$, $\beta'=119$, $\sigma'=32$.

La formule (10′) nous donnerait encore $s'=327$. Ce nombre est celui des points stationnaires d'une section plane de la développable bitangente. Dans le cas actuel, cette développable a les 12 tangentes principales du point conique — dont chacune est aussi deux fois génératrice simple — pour génératrices stationnaires, les plans tangents le long d'elles à la développable passant par la génératrice double η du cône tangent*). On voit donc que l'arête de rebroussement propre de la développable n'est que de l'ordre $327-12=315$. On aura, en désignant ce dernier nombre par s' (comparer au n° 68.)

$$4s'=2\gamma'+3(2\mu+x)(\nu-2)+4(2\mu+x)\cdot\eta+4\nu+2\cdot12\cdot\eta.$$

75. *Surfaces du quatrième ordre — sans courbes multiples — à un point conique triple dont le cône tangent est doué d'une génératrice stationnaire.* Le cône tangent a les nombres plückériens suivants:

$$\mu=\nu=3,\quad \xi=v=1,\quad \eta=u=y=z=0.$$

On trouve par une application immédiate des formules:

$a=12$, $\varkappa'=24$, $\delta'=28$, $\varkappa=20$, $\delta=25$, $n'=22$,
$b'=150$, $q'=88$, $k'=10405$, $t'=390$, $\gamma'=484$, $\varrho'=152$,
$c'=50$, $r'=69$, $m'=169$, $h'=1021$, $\beta'=113$, $\sigma'=32$.

La nappe de la développable bitangente qui est tangente à un plan joignant la génératrice stationnaire du cône tangent à une tangente principale, a deux génératrices stationnaires et une génératrice double

*) Il est plus commode, peut-être, de voir la propriété correspondante d'une figure réciproque (n° 62.).

coïncidant avec la tangente principale. Il faut donc substituer à la valeur 297 de s', que donne immédiatement la formule (10'), la valeur de $297 - 2 \cdot 12 = 273$. Celle-ci sera l'ordre de l'arête de rebroussement propre de la développable bitangente. On aura en la désignant par s' (n° 68.):

$$4s' = 2\gamma' + 3(2\mu + x)(\nu - 2) + 5(2\mu + x)\xi + 4v + 24\zeta.$$

Les surfaces des deux derniers exemples sont des cas particuliers d'une surface d'ordre n à un point conique d'ordre $n-1$. Nous avons indiqué ailleurs*) quelques-unes des propriétés générales de ces surfaces et déterminé une partie de leurs nombres caractéristiques. On peut en trouver les autres au moyen des formules du n° 3., modifiées un peu à cause des y *droites* doubles et des z *droites* cuspidales.

XIV.

Addition sur le genre.

76. Dans un autre mémoire**) j'ai trouvé que le genre p d'une surface s'exprime de la manière suivante:

$$(I) \quad 24(p+1) = c' - 12a + 24n + \beta + 3r - 15c + 2\sigma + 6\chi + \Sigma(3\nu + 3z + 8\eta + 13\xi).$$

Toutefois les termes dépendant de j', χ', η', ζ'***), B, B', U, U', O, O', d, g, e — s'il y en a —, ne sont pas introduits expressément; mais indirectement l'équation (I) en contient la plupart. En effet, à la déduction de cette expression j'ai regardé la surface comme *lieu de points*, et nous pourrons donc regarder comme points simples de la surface, comme points simples de la courbe cuspidale et comme points coniques tous les points qui appartiennent, en cas particuliers, à ces classes de points pour la dite conception de la surface. (Pour les points de la courbe double il s'agit seulement des propriétés de chacune des deux nappes.)

Aux deux premières de ces classes de points appartiennent les O points d'osculation des plans osculateurs, les d points stationnaires de la courbe double, les j' points singuliers des plans-pinces et les points η'. L'expression de $24(p+1)$ ne contiendra donc aucun terme dépendant de O, d, j', η'.

Les B points biplanaires†) sont, pour la conception actuelle de la surface, des points coniques aux nombres $\nu = z = \zeta = 0$, $\eta = 1$.

---

*) „*Mathematische Annalen*" t. IV, p. 44.

**) „*Mathematische Annalen*" t. IV, p. 41—42.

***) „*Mathematische Annalen*" t. IV, p. 635.

†) Aussi dans le mémoire cité, les points biplanaires sont regardés, expressément, comme des points coniques particuliers.

Les χ' points singuliers des plans-clos et les $2B'$ points singuliers des plans biponctuels sont des points coniques aux nombres $z=4$, $\nu=\eta=\xi=0$.

Les U' points singuliers des plans uniponctuels, les points ξ' et les g points doubles de la courbe cuspidale*) sont des points coniques aux nombres $z=2$, $\nu=\eta=\xi=0$.

Il reste les U points uniplanaires — qui diffèrent essentiellement, par la distribution des nappes, de points coniques au nombre $\nu=3$ —, les O' points osculateurs, et les e points stationnaires de la courbe cuspidale. On trouve, au moyen de l'équation que nous allons déduire des équations dans le n° 3., que U et O' auront dans l'expression cherchée pour coëfficients 18 et 6. Quant aux points e, la connexion des nappes de la surface qui les forment est la même que celle des nappes formant un point biplanaire. Ils auront donc — si nous ne nous trompons pas — la même influence au genre que les points biplanaires, en même temps qu'il faut remplacer, dans l'expression cherchée, β, qui est introduit par la formule (12), par $\beta+e$**).

On trouve ainsi qu'avec les notations du présent mémoire, où les notations de $\Sigma(\mu,\nu\cdots)$ n'ont égard qu'aux points coniques propres, le genre s'exprime de la manière suivante:

$$\begin{aligned}(\mathrm{II})\quad 24(p+1) = {} & c'-12a+24n+\beta+3r-15c+2\sigma+6\chi+12\chi' \\ & +8B+24B'+18U+6U'+6O'+\Sigma(3\nu+3z+8\eta+13\xi) \\ & +\Sigma'(6\xi')+6g+9e.\end{aligned}$$

La déduction de cette extension de la formule (I) est faite d'une manière trop légère pour exciter une entière confiance***). Il est donc bon que nous possédons un moyen de vérifier une partie des nouveaux coefficients, le même auquel nous devons les coefficients de U et de O'. Ce moyen consiste en une déduction, par les équations du n° 3., de l'équation qui exprime que le genre d'une surface donnée est égal à celui de la surface réciproque.

On déduit en effet des équations (20) et (8), (22) et (23) des n^{os} 3. et 4. que les expressions

---

*) Nous supposons ici que les g et e points singuliers de la courbe cuspidale soient distincts entre eux.

**) Ou bien par $\beta+2O'+e$, mais cet effet du nombre $2O'$ est compris au coefficient 6 déjà nommé.

***) Nous rappelons notamment qu'à la démonstration de la formule (I) dans le 4^{me} vol. des „Math. Ann." nous avons fait certaines restrictions sur la forme de la correspondance des deux surfaces qui nous occupaient alors. Il faudrait donc, pour appliquer immédiatement les résultats trouvés à une surface douée d'autres singularités, s'assurer que sa correspondance avec une surface qui n'a pas les mêmes singularités peut avoir lieu sans violer ces restrictions.

$$-4n+c+\sigma+2j+3\chi+4B+6U+\Sigma(\nu+4\eta+7\xi),$$
$$c+3r-5\sigma-\beta-3\chi-8B-6U-\Sigma(\varepsilon+2\nu+8\eta+14\xi),$$
$$-3c+2r+\sigma+4j+3\chi+14U-2O+\Sigma(2\mu+\nu+8\eta+11\xi)$$

sont égales aux expressions réciproques, c'est à dire aux expressions qui en sont formées par la substitution de lettres accentuées à celles qui n'ont pas d'accent. En multipliant ces expressions respectivement par -6, -1 et $+3$, on voit par une addition qu'aussi l'expression

$$24n-16c+3r+2\sigma+\beta-6\chi-16B+12U-6O+\Sigma(3\nu+3\varepsilon+8\eta+7\xi)$$

est égale à l'expression réciproque, ce qui est précisément l'équation qui exprime l'égalité des deux genres.

Cette vérification est complète pour l'absence, dans l'expression (II), de termes j' et η' et pour le coefficient de ξ', et, comme le coefficient de B et l'absence d'un terme O n'ont pas besoin de vérification, aussi pour les coefficients de B' et O'. Pour le coefficient de χ' on n'obtient aucune vérification, parce que, réciproquement, *l'égalité des genres qui nous occupe ici nous a fourni les coefficients de χ et χ' dans l'équation* (19) ou (23) (voir le n° 27.); mais ce coefficient de l'équation (II), qui obtient ainsi une importance double, doit être en tout cas — à cause de l'analogie des points singuliers des plans-clos et des plans biponctuels — égal à la moitié du coefficient vérifié du terme B'.

Nous remarquerons encore qu'en donnant, au moyen des équations du n° 3., à notre expression (II) du genre la même forme qu'a indiquée M. Cayley*), on *ne trouve pas les mêmes coefficients* de χ' et B' qui résulteraient de la substitution de $\vartheta = 8\chi' + 16B'$ dans l'expression indiquée par ce savant. (Comparer à l'introduction du présent mémoire.)

Copenhague, 27 avril 1876.

---

*) On Reciprocal Surfaces p. 227. — Geom. of three Dimens. p. 565; édition de M. Fiedler p. 610.

Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

Von

P. Gordan und M. Nöther.

Die Bedeutung des identischen Verschwindens der Hesse'schen Determinante einer algebraischen Form ist von Hesse, zunächst im 42. Bande, dann im 56. Bande des Crelle'schen Journals, dahin ausgesprochen worden: dass die Beziehungen, welche zwischen den partiellen Differentialquotienten, den Polaren, der Form herrschen müssen, *lineare* seien, oder, was dasselbe ist, dass sich die homogene Form von r Variabeln durch *lineare* Transformation auf eine solche von weniger als r Variabeln zurückführen lasse. Aber auch der zweite Beweis, welcher ein System linearer Gleichungen in unvollständiger Weise auflöst, ist seit lange als unzulässig erkannt worden*).

Trotz der sehr verschiedenartigen Methoden, welche sich zur Behandlung des Problems darbieten, hat bisher die Frage nach der Richtigkeit des Hesse'schen Satzes nicht entschieden werden können. Nur für die den binären und den quadratischen Formen, bei welchen der Satz selbstverständlich richtig ist, nächststehenden beiden Fälle, den der *ternären cubischen* und den der *quaternären cubischen* Formen, ist durch H. Pasch auf dem Wege von Determinantenrelationen ein Beweis des Satzes erbracht worden**). Und ferner hat der eine von

*) Wie dem einen von uns (N.) vor längerer Zeit von H. Christoffel mitgetheilt wurde, sind die Mängel des Beweises gleich nach Erscheinen des zweiten Hesse'schen Aufsatzes bemerkt worden, und wurde von H. Weierstrass ein Zweifel an der Richtigkeit des Satzes geäussert. Von den unten folgenden Resultaten hat H. Christoffel die eindeutige Umkehrbarkeit der Formeln (10) des § 2. bei jener Gelegenheit angegeben. Die falschen Beweise sind übrigens in die meisten Lehrbücher übergegangen, so in Brioschi's Determinanti, in Salmon-Fiedler's Algebra der linearen Transformationen, etc.

**) S. Crelle-Borch. 80, p. 169.

uns, durch Betrachtung des Verhaltens der Determinante einer reducibeln Form in Bezug auf deren Factoren und der zwischen den Polaren bestehenden Relation, die *ternären* Formen überhaupt erledigt*). Endlich ist hier zu bemerken, dass früher auch H. Sylvester den Fall von linearen Relationen zwischen den Polaren behandelt hat**), indem er dieselben in die entsprechenden Coefficientenrelationen aufgelöst hat; wobei er indess nicht auf die Bedeutung der in der Hesse'schen Determinante enthaltenen Coefficientenaggregate eingeht.

Bei der Wichtigkeit, welche die Hesse'sche Covariante einer Form für diese hat, haben wir die Untersuchung wieder aufgenommen, indem wir die Frage nach denjenigen Formen gestellt haben, deren Determinante identisch verschwindet. Dabei hat sich nun der Hesse'sche Satz als im Allgemeinen *unrichtig* erwiesen, vielmehr ist unser Resultat:

Der Hesse'sche Satz gilt, wie selbstverständlich für die binären, so auch für alle ternären und quaternären Formen, dagegen nicht mehr für die Formen von mehr als vier Variabeln und von höherer als der zweiten Ordnung. Für diese höhern Fälle lassen sich ganze Classen von Formen aufstellen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden.

Der Weg, auf welchem wir die Untersuchung***) führen werden, ist zunächst die Betrachtung einer linearen partiellen Differentialgleichung, welcher die Form f und deren Polaren Genüge leisten. Die Coefficienten dieser Gleichung sind nicht direct gegeben, sondern selbst wieder Functionen, die durch ein System partieller Differentialgleichungen definirt werden. Eine der wesentlichen Aufgaben war, aus der Zahl der Lösungen dieses Systems diejenigen auszuscheiden, welche *ganze* Functionen der Variabeln sind. Und dies geschieht hier, wenn auch nicht für den allgemeinsten Fall, durch Betrachtung einer an sich interessanten Art von *rationalen Transformationen* der Variabeln, zu welchen die Functionen unseres Systems Veranlassung geben, nämlich solcher, bei welchen die Transformationsdeterminante und eine Reihe ihrer Unterdeterminanten *identisch* verschwinden. Insbesondere werden auf diesem Wege in § 8. die quinären Formen vollständig erledigt.

---

*) Gordan „Ueber einen Satz von Hesse", Sitzungsber. der phys.-med. Soc. Erlangen, v. 13. Dec. 1875.

**) Philos. Magazine, Ser. IV, vol. 5 (1853).

***) Ein Auszug aus derselben ist schon in den Sitzungsber. der phys.-med. Soc. Erlangen, v. 10. Jan. 1876, mitgetheilt worden.

§ 1.

Problemstellung. Definition der Functionen $h^{(i)}$.

Die ganze algebraische homogene Form der r Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_r,$$

welche wir der Untersuchung zu Grunde legen, bezeichnen wir mit

$$f(x_1, x_2, \cdots x_r). \tag{1}$$

Von dieser Form setzen wir voraus, dass die Determinante ihrer zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\Delta_f = \Sigma \pm f_{11} f_{22} \cdots f_{rr} \tag{2}$$

und die Unterdeterminanten derselben bis zu irgend einer bestimmten Ordnung hin identisch, für alle Werthsysteme der x, verschwinden.

Da die Determinante Δ_f gleichzeitig Functionaldeterminante der ersten partiellen Differentialquotienten

$$f_1, f_2, \cdots f_r$$

von f ist, so sagt das Verschwinden von Δ_f aus, dass zwischen diesen Grössen f_i wenigstens *eine*, für alle Werthsysteme der x identische Relation besteht. Dieselbe muss algebraisch und homogen sein, da sie durch Elimination aus homogenen algebraischen Gleichungen erhalten werden kann. Eine solche irreducible Relation von möglichst niedriger Dimension in den f_i sei bezeichnet mit

$$\pi(f_1, f_2, \cdots f_r) = 0, \tag{3}$$

und wir setzen

$$\frac{\partial \pi}{\partial f_i} = \pi_i. \tag{4}$$

Sei ferner ϱ der grösste gemeinsame Factor aller π_i. Dann setzen wir weiter

$$\pi_i = \varrho \xi_i = \varrho h^{(i)}(x), \tag{5}$$

wo nun die ξ_i *ganze* Functionen $h^{(i)}(x)$ der x *ohne gemeinschaftlichen Factor* sind.

Man kann hier bemerken, dass, im Falle die ersten Unterdeterminanten Δ_{ik} von Δ_f nicht Null sind, diese sich wie die Quadrate und Producte von r Grössen verhalten, die mit den eben definirten Grössen $h^{(i)}$ übereinstimmen. Wenn die $h^{(i)}$ Constanten gleich werden, so hat man den Satz Hesse's. Wir haben daher nur die Möglichkeit des andern Falles, dass die $h^{(i)}$ Functionen der x werden, zu untersuchen.

§ 2.

Differentialgleichungen der $h^{(i)}$. Definition der Functionen Φ.

Wir werden nun eine Classe von Functionen, die in unserem Probleme eine wichtige Rolle spielen, durch eine lineare partielle Differentialgleichung definiren.

Unter der im Folgenden durchgängig festgehaltenen Bezeichnung

$$\sum_j \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} y_j = F_y$$

betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Phi_\xi = 0. \tag{6}$$

Die derselben genügenden homogenen *ganzen Functionen der x* nennen wir *Functionen* Φ.

Wir werden zunächst eine Reihe von Lösungen und Eigenschaften, dann ein vollständiges System von Lösungen dieser Gleichung aufstellen. Da sich (3) in die Form

$$f_\pi = 0 \text{ oder } f_\xi = 0 \tag{3'}$$

setzen lässt, so folgt, dass f selbst eine der Functionen Φ ist.

Ferner ergiebt sich durch Differentiation von (3) die wiederum in allen x identische Gleichung

$$0 = \Sigma \pi_i f_{iy} \equiv \varrho f_{y\xi} \quad \text{(für jedes } y\text{)}; \tag{7}$$

d. h. auch alle *Polaren* f_y von f sind Functionen Φ. Dieselben würden sogar, im Falle nur *eine* Relation zwischen den f_y existirte, ein vollständiges System von Lösungen der Gleichung (6) bilden. Weitere Lösungen sind die Functionen π_i, als Functionen der f_y:

$$\pi_{i\xi} = 0.$$

Jetzt können wir aber die Functionen Φ noch anders auffassen:

Die Functionen $\Phi(x)$, gebildet für die Argumente $x + \lambda\xi$, sind unabhängig von λ:

$$\Phi(x+\lambda\xi) = \Phi(x). \tag{8}$$

Denn man hat, wenn Φ von der Ordnung ν,

$$\Phi(x+\lambda\xi) = \Phi + \frac{\lambda^1}{1\cdot 2}\Phi_{\xi^2} + \cdots + \frac{\lambda^\nu}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu}\Phi_{\xi^\nu}.$$

Setzt man aber in $\Phi_\xi = 0$ den identisch verschwindenden Ausdruck Φ_π an Stelle von Φ, so ergiebt sich wegen $\pi_{i\xi} = 0$:

$$\Phi_{\pi\xi} = 0, \text{ oder } \Phi_{\xi^2} = 0, \quad \left(\text{wo } \Phi_{\xi^2} \equiv \sum_{ik} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k}\xi_i\xi_k\right)$$

und ebenso, indem man Φ_{π^2} etc. einsetzt:

$$\Phi_{\xi^2} = 0, \cdots \Phi_{\xi^\nu} = 0.$$

Der Satz gilt übrigens für jede, auch nicht ganze Lösung von (6).

Diese Auffassung führt sodann noch zu einer zweiten wichtigen Eigenschaft der Functionen Φ:

Ist eine solche ganze Function Φ *das Product zweier ganzen Functionen*

$$\Phi = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

so sind auch die Factoren selbst Functionen Φ, *also Lösungen von* (6)*).

Denn offenbar müssen, wie $\Phi(x+\lambda\xi)$ selbst, auch $\varphi(x+\lambda\xi)$ und $\psi(x+\lambda\xi)$ von λ unabhängig sein, und man hat auch:

$$\varphi_\xi = 0, \quad \varphi_{\xi^2} = 0, \cdots; \qquad \psi_\xi = 0, \quad \psi_{\xi^2} = 0, \cdots.$$

Aus diesem Satze ergeben sich nun weitere Lösungen von (6). Nach (5) sind auch die $h^{(i)}(x)$, als Factoren der π_i, Lösungen, oder

$$h^{(i)}_\xi = 0, \tag{9}$$

und man hat

$$\xi_i = h^{(i)}(x) = h^{(i)}(x+\lambda\xi), \tag{9'}$$

woraus insbesondere

$$h^{(i)}(\xi) = 0. \tag{9''}$$

Endlich bilden wir noch die Functionen Φ:

$$x_i\xi_k - x_k\xi_i,$$

die sich durch Einsetzen in (6) als Lösungen ergeben Aus diesen letztern Lösungen können wir auch ein *vollständiges* System solcher zusammensetzen. Denn sei, wie wir annehmen wollen, ξ_r nicht identisch $= 0$, so betrachten wir das System von Lösungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = x_1 - \dfrac{\xi_1}{\xi_r} x_r, \\ \eta_2 = x_2 - \dfrac{\xi_2}{\xi_r} x_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{r-1} = x_{r-1} - \dfrac{\xi_{r-1}}{\xi_r} x_r. \end{array}\right. \tag{10}$$

Jede Function Φ *wird eine homogene ganze rationale Function der Grössen* $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}$.

Denn bildet man: indem man noch

$$0 = \eta_r = x_r - \frac{\xi_r}{\xi_r} x_r$$

setzt, die Function Φ für die Argumente η:

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, \eta_r),$$

*) Es ist für manche Anwendungen beachtenswerth, dass dieser Satz für alle ganzen Lösungen irgend einer linearen partiellen Differentialgleichung gilt, deren Coefficienten nur selbst Lösungen der Gleichung sind.

so fallen aus der Entwicklung alle Potenzen von $\frac{x_r}{\xi_r}$ heraus, und man hat:

$$(11) \qquad \Phi(x_1, x_2, \cdots x_{r-1}, x_r) \equiv \Phi(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, 0).$$

Und ebenso drückt sich jede Lösung durch die η allein aus. Die η bilden also ein vollständiges System von einander unabhängiger Lösungen. Und die Gleichung (6) hat daher die Eigenschaft, genau so integrirt zu werden, als ob deren Coefficienten constant wären, nämlich durch das System (10). Als Bedingung hiefür sind nur die Gleichungen (9)* aufgetreten. Im Folgenden haben wir aber nur von den Lösungen Φ Gebrauch zu machen.

Wir wollen noch einer Eigenschaft des Systems (10) Erwähnung thun. Die Gleichungen derselben lassen sich auch *rational* umkehren. Denn da auch die Functionen ξ_i oder $h^{(i)}(x)$ ganze Functionen der η sind, so erhält man aus (10) auch

$$x_i = \eta_i + \frac{h^{(i)}(\eta)}{h^{(r)}(\eta)} x_r, \quad (i = 1, 2, \cdots r-1),$$

also auch die $x_1, x_2, \cdots x_r$ rational ausgedrückt in den neuen Variabeln $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, x_r$.

In (9) haben wir Gleichungen für die unbekannten Functionen $h^{(i)}$ allein erhalten. Wir haben uns zunächst zu der Discussion dieser Gleichungen zu wenden, um dann aus ihren Lösungen mittelst der Gleichungen (3′) und (7) zugehörige Functionen f zu finden.

§ 3.

Transformationsproblem der $h^{(i)}$.

Das System der Gleichungen (9)

$$h^{(i)}_{\xi} = 0$$

hat genau die Form, wie es schon bei Jacobi*) auftritt und kann leicht allgemein integrirt werden. Wir bedürfen indessen in den folgenden Entwicklungen dieser allgemeinen Integration nicht. Es möge daher nur kurz angedeutet werden, dass die Integration dadurch geschieht, dass man neue Functionen der $h^{(i)}$ und x, aus welchen man, indem man sie Constanten gleich setzt, die $h^{(i)}$ zu berechnen hat, als *abhängige* Variable, die $h^{(i)}$ aber ausser den x als unabhängige Variable einführt. Für die neueingeführten Functionen erhält man dann nur wieder die Gleichung (6), deren Lösungen in (10) gegeben sind, und man findet hieraus als allgemeinste Lösungen des Systems (9):

$$h^{(i)}(x) = \psi^{(i)}(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}),$$

wo die $\psi^{(i)}$ irgend welche Functionen der η sein können.

*) Crelle J. II, p. 321.

Aus diesen Gleichungen, welche zur Bestimmung der Functionen $h^{(i)}$ hinreichen, ergeben sich aber dieselben im Allgemeinen nicht als *ganze* rationale Functionen der x. In dem letztern Falle müssen jedenfalls die $\psi^{(i)}$ *ganze* Functionen der η sein; und die Gleichungen (9″) zeigen weiter, dass, sollen die $h^{(i)}$ keinen Factor gemein haben, wenigstens zwei Relationen zwischen den Functionen $h^{(i)}$ allein bestehen müssen, nämlich eben die Gleichungen (9″).

Um aber die *ganzen* Functionen $h^{(i)}$ überhaupt auszuscheiden, wenigstens für einen besonders wichtigen Fall, stellen wir Betrachtungen an, die in ein anderes Gebiet, in das der *Transformationen* gehören und an die Gleichungen (9′) anknüpfen.

Diese Gleichungen

$$\xi_i = h^{(i)}(x) = h^{(i)}(x + \lambda\xi), \tag{9′}$$

in welchen wir von jetzt an die $h^{(i)}$ immer als *ganze* rationale Functionen auffassen, liefern Beziehungen zwischen dem *Werthgebiet der* x und *dem der* ξ. Das Werthgebiet der x umfasst alle möglichen Werthcombinationen der $r-1$ Verhältnisse der r Grössen x und hat daher $r-1$ Dimensionen; das der Verhältnisse der ξ ist dagegen ein beschränktes, da nach (9″) wenigstens zwei Gleichungen zwischen den ξ bestehen; es möge μ Dimensionen haben, wo also μ höchstens $= r-3$ ist. Wir bemerken noch, dass dieses Gebiet der ξ ein irreducibles ist.

Zu jedem Werthsystem der x gehört nach (9′) im Allgemeinen, d. h. wenn für dieses x nicht alle $h^{(i)}(x)$ verschwinden, eindeutig *ein* Werthsystem der Verhältnisse der ξ. Zu diesem gehören aber umgekehrt *unendlich viele* Werthsysteme der Verhältnisse der x, und zwar, wenn x' irgend eines der zu ξ' gehörenden Werthsysteme ist, insbesondere alle von der Form

$$x' + \lambda\xi',$$

für irgend ein λ. Wir werden im Folgenden der Kürze halber die Gesammtheit solcher zusammengehörigen Werthsysteme $x + \lambda\xi$ als *Reihe* $(x\xi)$ bezeichnen.

Hieraus folgt zunächst, dass sich das ganze Werthgebiet der x in ∞^{r-2} Reihen $(x\xi)$, der Form $x + \lambda\xi$, zerlegt. Und da die Verhältnisse der r Grössen x nur von den μ Parametern des ξ-Gebietes abhängen, so müssen zu irgend einem ξ' im Allgemeinen $\infty^{r-\mu-2}$ solcher Reihen $(x'\xi')$ zugehören. Die Gesammtheit dieser zu ξ' gehörenden Reihen $(x'\xi')$ bezeichnen wir als *das Gebilde* $\varphi^{(\xi')}$. Es hat $r-\mu-1$ Dimensionen.

Bei diesem Entsprechen treten aber auch unter den x Ausnahmeelemente auf. Es sind diejenigen Werthsysteme x, welche alle Functionen $h^{(i)}(x)$ gleichzeitig zu 0 machen, und welche wir als die *Funda-*

mentalwerthsysteme y bezeichnen wollen, von denen höchstens ∞^{r-3} existiren können:

$$h^{(i)}(y) = 0; \quad \text{für jedes } i.$$

Zu denselben gehören auch die Werthsysteme ξ selbst, wegen

$$h^{(i)}(\xi) = 0,$$

diese bilden einen *Theil* der y (oder sie können auch insbesondere für $\mu = r - 3$, *alle* y bilden). Einem solchen y kann *ein* ξ oder können *unendlich viele* der ξ entsprechen; diese findet man, indem man die Ausdrücke

$$\xi_i = h^{(i)}(y + \varepsilon y')$$

nach aufsteigenden Potenzen von ε ordnet und dann ε gegen 0 convergiren lässt, während man den Verhältnissen der y' alle möglichen Werthe giebt. Auch hier bleibt der Satz gelten, dass, wenn auf diese Weise zusammengehörige Werthsysteme y und ξ gefunden sind, zu demselben ξ auch die ganze Werthreihe $(y\,\xi)$ oder $y + \lambda\xi$ gehört; denn der Satz gilt für die Werthreihe $(y + \varepsilon y') + \lambda\xi$.

Es können auch noch umgekehrt, wie unter den x, so auch unter den ξ Ausnahmeelemente auftreten. Während die Gleichungen

$$\xi'_k h^{(i)}(x) - \xi'_i h^{(k)}(x) = 0$$

bei willkürlich gegebenen ξ', welche nur dem ξ-Gebiete angehören müssen, für die Verhältnisse der x $\infty^{r-\mu-1}$ Auflösungen, das $\varphi^{(\xi')}$-Gebilde, zulassen, kann sich für *specielle* Werthsysteme ξ' die Zahl der Auflösungen erhöhen. Indessen kann es, wenn man von denjenigen ξ absieht, deren zugehörige x in höherer Dimension nur in das Fundamentalgebiet der y fallen, höchstens $\infty^{\mu-2}$ solcher geben, bei denen dieses eintritt, da bei $\infty^{\mu-1}$ solcher speciellen ξ' die zugehörigen $\varphi^{(\xi')}$-Gebilde schon das ganze x-Gebiet erfüllen würden.

§ 4.

Verhalten der $h^{(i)}$.

Nach Gleichung (8) setzen sich auch die Werthsysteme, für welche *irgend* eine der Functionen Φ verschwindet, nur aus Werthreihen $(x\xi)$, nämlich aus ∞^{r-3} solcher, zusammen. Mit einer von den übrigen ∞^{r-2} Werthreihen $(x\xi)$, die überhaupt existiren, hat $\Phi(x) = 0$ kein Werthsystem gemein, ausser dem betreffenden ξ, wegen

$$\Phi(\xi) = 0.$$

Wie sich die Werthsysteme, für welches irgend eines der $h^{(i)}$ verschwindet, z. B.

$$h \equiv \Sigma\alpha_i h^{(i)}(x) = 0$$

ist, zusammensetzen, können wir noch genauer verfolgen. Dieselben bestehen aus zwei Theilen, a) aus sämmtlichen Fundamentalwerthsystemen x, für die h unabhängig von den α_i, also sämmtliche $h^{(i)}(x)$ ver-

schwinden; und b) aus den von α_i abhängigen Werthsystemen x. Für diese letztern muss zugleich werden

$$\xi' \equiv \Sigma \alpha_i \xi_i = 0,$$

d. h. man erhält nur $\infty^{\mu-1}$ der Werthsysteme ξ und die zugehörigen x. Da auch umgekehrt *nur* die Bedingung $\xi' = 0$ vorliegt, so erhält man auch *alle* x dieser $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde. Daher setzen sich die Werthsysteme b) zusammen aus $\infty^{\mu-1}$ der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde; *und* $h = 0$ *besteht auch nur aus diesen*, da die unter a) genannten nur zur Dimension $r-3$ aufsteigen, also keinen selbständigen Factor von h bilden können und schon unter den in b) bezeichneten enthalten sein müssen.

Wir mögen noch bemerken, dass man die in a) bezeichneten Fundamentalwerthsysteme y dadurch erhalten kann, dass man die Gleichungen aller Gebilde $\varphi^{(\xi)}$, für deren ξ *nicht* $\Sigma \alpha_i \xi_i = 0$ ist, verbindet mit der Gleichung

$$\Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) = 0.$$

Man sieht dabei, dass in jedem Gebilde $\varphi^{(\xi)}$ $\infty^{r-\mu-2}$ der Werthsysteme y liegen, welche sich auf $\infty^{r-\mu-3}$ Reihen $(y\xi)$ vertheilen; oder zu jedem ξ gehören im Allgemeinen $\infty^{r-\mu-3}$ Fundamentalreihen $(y\xi)$; im Ganzen ∞^{r-3} solcher Reihen, die indess zusammen nur ein Gebiet von $r-3$ Dimensionen füllen dürfen, da die $h^{(i)}$ keinen Factor gemein haben sollen; und in der That haben wir gesehen, dass schon $\infty^{\mu-1}$ der ξ-Werthsysteme das ganze Fundamentalgebiet y liefern. In besondern Fällen oder für specielle der ξ kann sich sogar die Anzahl der zugehörigen Fundamentalreihen $(y\xi)$ noch erhöhen.

Während die Functionen h sich nur aus den sämmtlichen Werthsystemen von $\infty^{\mu-1}$ der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde zusammensetzen, entstehen die Functionen Φ im Allgemeinen dadurch, dass nach irgend einem Gesetze aus sämmtlichen ∞^{μ} $\varphi^{(\xi)}$-Gebilden je $\infty^{r-\mu-3}$ Werthreihen $(x\xi)$ herausgenommen werden. —

Die Annahme, dass die ξ nur ein Werthgebiet von μ Dimensionen $(\mu \leqq r-3)$ bilden sollen, können wir auch analytisch ausdrücken. Hiernach dürfen die r Functionen $h^{(i)}(x)$ nur von $\mu+1$ Combinationen der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_r$, die wir mit

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

bezeichnen wollen, homogen abhängen. Nimmt man also die $(\mu+1)$-reihigen Determinanten aus dem unvollständigen Systeme

$$\begin{Vmatrix} h_{i_1}^{(1)} & h_{i_1}^{(2)} & \cdots & h_{i_1}^{(r)} \\ h_{i_2}^{(1)} & h_{i_2}^{(2)} & \cdots & h_{i_2}^{(r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{i_{\mu+1}}^{(1)} & h_{i_{\mu+1}}^{(2)} & \cdots & h_{i_{\mu+1}}^{(r)} \end{Vmatrix},$$

wo

$$h_{i_k}^{(i)} = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_{i_k}}$$

gesetzt ist und $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ irgend eine Combination von $\mu + 1$ verschiedenen Zahlen aus $1, 2, \cdots r$ bedeutet, so verhalten sich dieselben wie die entsprechenden Determinanten aus dem unvollständigen Systeme:

$$\begin{Vmatrix} h_{A_1}^{(1)} & h_{A_1}^{(2)} & \cdots & h_{A_1}^{(r)} \\ h_{A_2}^{(1)} & h_{A_2}^{(2)} & \cdots & h_{A_2}^{(r)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{A_{\mu+1}}^{(1)} & h_{A_{\mu+1}}^{(2)} & \cdots & h_{A_{\mu+1}}^{(r)} \end{Vmatrix}.$$

In diesem Systeme sind die $h^{(i)}$ als Functionen von

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

aufgefasst und es ist in diesem Sinne

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial A_k} = h_{A_k}^{(i)}$$

gesetzt. Da nun der Proportionalitätsfactor die Determinante der A_k nach den entsprechenden x_i ist, und da dieselbe, wenn die A_k von nicht weniger als $\mu + 1$ Combinationen der x abhängen sollen, bei allgemeiner Annahme der Combination $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ nicht verschwinden kann, so können dann auch jene Determinanten der h nach den x_i nicht alle verschwinden, und sie werden von der besondern Combination $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ ganz unabhängig. Dagegen werden *die* $(\mu+2)$*-reihigen Determinanten*, die aus dem obigen Systeme dadurch entstehen, dass man eine weitere Horizontalreihe

$$h_{i_{\mu+2}}^{(1)} \quad h_{i_{\mu+2}}^{(2)} \quad \cdots \quad h_{i_{\mu+2}}^{(r)}$$

hinzufügt, *sämmtlich verschwinden.*

§ 5.

Das h-Problem bei einfach unendlichem Werthgebiete der $h^{(i)}$.

Für den Fall, dass das Werthgebiet der ξ ein *einfach* unendliches ist, können wir die sämmtlichen Functionen $h^{(i)}(x)$, welche den Gleichungen (9′) genügen, wirklich angeben. Sei also $\mu = 1$.

In diesem Falle besteht ein $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde aus $r-2$ Dimensionen und kann daher durch *eine* Gleichung zwischen den Variabeln x dargestellt werden, die wir ebenfalls bezeichnen mit:

$$\varphi^{(\xi)} = 0.$$

Ferner können hier die Werthsysteme, für welche eines der $h^{(i)}$ verschwindet, nämlich

$$\Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) = 0$$

ist, nur aus denen einer endlichen Zahl von $\varphi^{(\xi)}$-Gebilden bestehen, oder man muss eine Identität haben:

$$\Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) \equiv \varphi^{(\xi')} \cdot \varphi^{(\xi'')} \cdots, \tag{12}$$

wo die ξ', ξ'', $\cdots$ diejenigen Werthsysteme ξ sind, für welche

$$\Sigma \alpha_i \xi_i = 0$$

ist. *Die Functionen* $\varphi^{(\xi)}$, als Factoren einer Function $h^{(i)}$, *gehören also hier auch zu den in* § 2. *definirten Functionen* Φ.

Hieraus folgt zunächst, dass

$$\varphi_{\xi_0}^{(\xi')} = 0$$

ist für alle diejenigen Werthsysteme x, welche zu dem beliebigen constanten Werthsysteme ξ_0 gehören, d. h. also für alle diejenigen Werthsysteme x, welche $\varphi^{(\xi_0)}$ zu 0 machen; es muss also eine Identität existiren:

$$\varphi_{\xi_0}^{(\xi')} \equiv \varrho\, \varphi^{(\xi_0)}, \tag{13}$$

wo ϱ eine ganze Function der x oder auch 0 sein kann. Dabei sind ξ' und ξ^0 zwei willkührlich gegebene Werthsysteme aus dem ξ-Gebiet.

Nun ist aber

$$\varphi_{\xi'}^{(\xi')} \equiv 0,$$

bei constantem ξ' für *alle* Werthe von x. Denn da die Werthsysteme, für welche $\varphi^{(\xi)} = 0$ wird, nur aus Werthreihen $(x\xi')$ der Form $x + \lambda\xi'$ bestehen, so kann die Gleichung

$$\varphi^{(\xi')}(x + \lambda\xi') = \varphi^{(\xi')}(x) + \lambda \varphi_{\xi'}^{(\xi')} + \cdots = 0,$$

wenn man x *beliebig* annimmt, nur die Wurzel $\lambda = \infty$ haben, woraus folgt, dass die Coefficienten von λ, von λ^2 etc. identisch verschwinden müssen.

Daher folgt weiter, indem man von $\varphi_{\xi'}^{(\xi')}$ die Polare nach ξ_0 nimmt, dass auch

$$\varphi_{\xi'\xi_0}^{(\xi')} \equiv 0, \quad \text{für alle } x;$$

und Gleichung (13) liefert jetzt:

$$\left(\varrho\, \varphi^{(\xi_0)}\right)_{\xi'} \equiv 0, \quad \text{für alle } x.$$

Aus dieser Gleichung schliesst man nun, genau wie in (8) des § 2., dass

$$\varrho(x + \lambda\xi') \cdot \varphi^{(\xi_0)}(x + \lambda\xi') \equiv \varrho(x) \cdot \varphi^{(\xi_0)}(x)$$

ist, für jedes x, dass also entweder $\varrho \equiv 0$ ist, d. h.

$$\varphi_{\xi_0}^{(\xi')} \equiv 0, \tag{14}$$

oder dass $\varphi_{\xi'}^{(\xi_0)} \equiv 0$ ist, was, da ξ' und ξ_0 beliebige Grössen des ξ-Gebiets waren, wiederum auf Gleichung (14) führt.

In unserem Falle besteht also ein Gebilde $\varphi^{(\xi)}$ nicht nur aus Werthreihen $(x\xi)$, sondern auch aus solchen $(x\xi')$, wo ξ' irgend ein Werthsystem des ξ-Gebiets vorstellt.

Nach Gleichung (12) hat man nun auch für irgend eine der Functionen $h^{(i)}(x)$:

$$h_{\xi'}^{(i)} \equiv 0,$$

bei *constantem* ξ' und *beliebigem* x.

Seien

$$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots \xi^{(r-s)}$$

irgend welche linear von einander unabhängige constante Werthsysteme des ξ-Gebiets, in der Zahl, dass sich alle ξ linear und homogen aus diesen $r-s$ zusammensetzen lassen; also:

$$h_{\xi^{(k)}}^{(i)} \equiv 0.$$

Dann hat man auch für irgend ein y von der Form

$$y = a_1 \xi^{(1)} + a_2 \xi^{(2)} + \cdots + a_{r-s} \xi^{(r-s)}$$

die Identität

$$h_y^{(i)} \equiv 0,$$

woraus

$$h^{(i)}(x + \lambda y) \equiv h^{(i)}(x)$$

und

$$h^{(i)}(y) \equiv 0.$$

Daher muss zunächst $s > 1$ sein, da sonst die $h^{(i)}(x)$ ein Gebiet von ∞^{r-s} Werthsystemen, also einen Factor gemein haben würden.

Zu diesen y, welche hier die Fundamentalwerthsysteme des x-Gebiets bilden, gehören auch alle ξ selbst. Da dieselben also linear und homogen von $r-s$ Parametern abhängen, *so müssen zwischen denselben* s $(\geqq 2)$ *lineare Relationen existiren*, welche man durch Elimination der $r-s$ Parameter findet, etwa

$$h^{(1)}(x) = 0, \; h^{(2)}(x) = 0, \; \cdots \; h^{(s)}(x) = 0.$$

Unser Gleichungssystem $h_{\xi^{(k)}}^{(i)} \equiv 0$ geht dann in folgendes über:

$$\sum_j \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} \xi_j^{(k)} = 0, \quad \text{von } j = s+1 \text{ bis } j = r,$$
$$(k = 1, 2, \cdots r-s).$$

Dies sind, bei gegebenem i, $r-s$ Gleichungen, homogen in den $r-s$ Grössen

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j}.$$

Die Determinante der Coefficienten

$$\Sigma \pm \xi_{s+1}^{(1)} \; \xi_{s+2}^{(2)} \cdots \xi_r^{(r-s)}$$

verschwindet nicht, da die Werthsysteme $\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(r-s)}$ linear von einander unabhängig sein sollen. Daher folgt:

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = s+1, \; s+2, \; \cdots r),$$

d. h. die Grössen

$$h_*^{(s+1)}(x), \; h^{(s+2)}(x), \; \cdots h^{(r)}(x)$$

sind Functionen von $x_1, \; x_2, \; \cdots x_s$ *allein.*

Umgekehrt können aber, wenn die Functionen $h^{(1)}, \; h^{(2)}, \; \cdots h^{(s)}$ identisch 0 sind, die Functionen $h^{(s+1)}, \; \cdots h^{(r)}$ *ganz willkührliche* ganze homogene Functionen von $x_1, \; x_2, \; \cdots x_s$ sein, und man wird immer ein System von Lösungen der Gleichungen (9′) haben.

Damit dann noch ausserdem, wie es in diesem § angenommen war, das Werthgebiet der ξ ein einfach unendliches wird, müssen für $s < \frac{r}{2}$, zu den von selbst bestehenden $r-2s$ identischen Relationen zwischen den $r-s$ Functionen $h^{(s+1)}, \; \cdots h^{(r)}$, noch $s-2$ beliebige weitere Relationen hinzugenommen werden. Für $s = 2$ insbesondere hat man also ohne weitere Relationen schon den Fall des einfach unendlichen Werthgebiets der ξ.

Für $s \gtrless \frac{r}{2}$, in welchem Falle keine Relationen von selbst bestehen, hat man, wenn die ξ *eine* Dimension bilden sollen, noch $r-s-2$ beliebige Relationen zwischen den $h^{(s+1)}, \; \cdots h^{(r)}$ anzunehmen.

§ 6.

Das f-Problem für den Fall, dass mehrere der $h^{(i)}$ verschwinden.

Indem wir jetzt zur Aufsuchung von Functionen f übergehen, deren Determinante Δ_f identisch verschwindet, werden wir dieses Problem in dem Umfange erledigen, als es die im Vorhergehenden gefundenen Lösungen des h-Problems der Gleichungen (9′) gestatten.

Wir haben für die Function f die Gleichungen

$$f_\xi = 0, \quad f_{i\xi} = 0.$$

Differentiirt man die erstere Gleichung nach den Variabeln x, so ergiebt sich mit Hülfe des zweiten Systems Gleichungen:

$$(15) \quad f_1 h_k^{(1)} + f_2 h_k^{(2)} + \cdots + f_r h_k^{(r)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots r),$$

wo

$$h_k^{(i)} = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_k}$$

ist.

Dieses System linearer partieller Differentialgleichungen für die Function f genügt, mit Hinzunahme der Bedingung, dass f eine *ganze* Function sein soll, zur Definition einer Function f, deren Determinante Δ_f identisch verschwindet. Denn indem man die Gleichungen des Systems der Reihe nach mit den Variabeln $x_1, \cdots x_r$ multiplicirt und dieselben addirt, ergeben sich wieder umgekehrt die genügenden Gleichungen

$$f_\xi = 0, \quad f_{i\xi} = 0.$$

Die Gleichungen (15) zeigen, dass nicht alle möglichen ganzen Lösungen des in (9′) gestellten h-Problems zu zugehörigen Functionen f führen; dass vielmehr, da die Gleichungen (15) mit einander verträglich sein müssen, eine Reihe weiterer Bedingungsgleichungen für die Functionen $h^{(i)}(x)$ auftreten. Wir beschränken uns nun bei dieser Untersuchung auf die im vorigen § gefundenen Lösungen $h^{(i)}$, die zugleich alle für $\mu = 1$ möglichen Lösungen umfassen.

Hiernach setzen wir voraus, dass

$$(16)\quad \begin{cases} \xi_1 = h^{(1)}(x) = 0, \ \xi_2 = h^{(2)}(x) = 0, \ \cdots \ \xi_s = h^{(s)}(x) = 0, \\ \xi_{s+1} = h^{(s+1)}(x_1, x_2, \cdots x_s), \qquad \cdots \ \xi_r = h^{(r)}(x_1, x_2, \cdots x_s) \end{cases}$$

sind, wo die $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ ganze homogene Functionen gleicher Ordnung der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_s$ sind.

Die Relation $f_\xi = 0$, welche zwischen den Polaren von f besteht, wird dann eine solche zwischen $f_{s+1}, f_{s+2}, \cdots f_r$ allein:

$$\pi(f_{s+1}, f_{s+2}, \cdots f_r) = 0.$$

da sonst $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \cdots \xi_s = 0$ Relationen von niedrigerer Dimension in den f_i, als π, bildeten, die nach der Annahme über π nicht existiren.

Für $s = r - 1$ folgt hier

$$f_r \equiv 0,$$

eine lineare Relation zwischen den Polaren. Ebenso folgt für $s = r - 2$ eine Relation zwischen f_{r-1} und f_r allein, die, als *binäre*, ebenfalls linear sein muss. In diesen beiden Fällen (wie für $s = 1$) gilt also der von Hesse gegebene Satz. Sei also

$$2 \leq s < r - 2.$$

Das System der Gleichungen (15) wird hier

$$(17)\quad f_{s+1} h_k^{(s+1)} + f_{s+2} h_k^{(s+2)} + \cdots + f_r h_k^{(r)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots s),$$

ein System von s linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen für die eine abhängige Variable f und die $r - s$ unabhängigen Variabeln

$$x_{s+1}, x_{s+2}, \cdots x_r,$$

in welches die Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

nur wie Constanten eingehen, also ein System mit *constanten* Coefficienten $h_k^{(i)}$. In diesem System (17) müssen nun noch die $h^{(i)}$ so bestimmt werden, dass sich die Gleichungen (17) als lineare mit einander vertragen, was wenigstens für $r - s < s$ zu Bedingungen für die $h^{(i)}$ führt.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass das Werthgebiet der ξ ein μ-fach unendliches ist.

Sei nun *erstens* $s < \frac{r}{2}$.

Die ξ würden dann, ohne weitere Bedingungen für die Functionen $h^{(i)}(x)$, ein Gebiet von $s-1$ Dimensionen bilden. Damit sich dasselbe auf μ Dimensionen reducire, müssen zu den obigen Bestimmungen für die $h^{(i)}$ (in (16)) noch $s - \mu - 1$ beliebige Beziehungen zwischen den $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ hinzutreten. Diese Functionen $h^{(i)}(x)$ hängen dann homogen von nur $\mu + 1$ Combinationen der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ ab, die wir wieder mit

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

bezeichnen wollen.

Es folgt dann, dass in dem System (17) $s - \mu - 1$ der Gleichungen von den übrigen $\mu + 1$ linear abhängig sind (nämlich durch lineare Relationen verbunden, die unabhängig sind von den Variabeln x_{s+1}, $x_{s+2}, \cdots x_r$). Denn es verschwinden, wie schon am Ende des § 3. bemerkt ist, sämmtliche $(\mu+2)$-reihige Determinanten, welche man aus den Coefficienten $h_k^{(i)}$ von irgend $\mu + 2$ der Gleichungen des Systems (17) bilden kann, während die aus irgend $\mu + 1$ der Gleichungen gebildeten $(\mu + 1)$-reihigen Determinanten Grössen proportional sind, welche von der Wahl dieser $\mu + 1$ Gleichungen unabhängig sind.

Sei *zweitens* $s \geqq \frac{r}{2}$.

Die ξ aus den Gleichungen (16) sind dann zunächst an Zahl ∞^{r-s-1} Das System (17) liefert also dann *entweder:*

$$f_{s+1} = 0, \quad f_{s+2} = 0, \cdots f_r = 0,$$

d. h. man hat den von Hesse gegebenen Satz, *oder* es müssen noch wenigstens alle $r - s$-reihigen Determinanten aus den Coefficienten des Systems (17) verschwinden, d. h. die $h^{(i)}$ dürfen nur von höchstens $r - s - 1$ Combinationen der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ homogen abhängen, und von den Gleichungen (17) bleiben nur $r - s - 1$ von einander unabhängig. Sollen sodann die ξ nur ein Gebiet von μ Dimensionen bilden, so müssen weiterhin $r - s - \mu - 2$ Relationen zwischen den $h^{(i)}(x)$ beliebig angenommen werden können, also muss sein

$$\mu \leqq r - s - 2.$$

Alsdann hängen die Functionen $h^{(i)}(x)$ wieder von $\mu + 1$ Combinationen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ homogen ab; und es sind nur $\mu + 1$ der Gleichungen des Systems (17) linear von einander unabhängig.

Die $\mu + 1$ linear von einander unabhängigen Gleichungen des Systems (17) bilden nun $\left(\text{für } s < \frac{r}{2} \text{ oder} \geq \frac{r}{2}\right)$, da die Coefficienten des Systems wie Constanten eingehen, ein *vollständiges* System linearer partieller Differentialgleichungen. Um dasselbe zu integriren, braucht man nur

$$r - s - \mu - 1$$

von einander unabhängige Lösungen für f zu kennen, aus denen sich dann durch Zusammensetzung mit den Lösungen

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

die allgemeinste Lösung für f ergiebt. Jene Lösungen sind aber direct anzugeben.

Seien mit

$$P_{i,k}$$

irgend welche Functionen der Grössen

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

oder Constanten bezeichnet, und sei

$$Q = \begin{vmatrix} x_{s+1} & x_{s+2} & \cdots & x_r \\ h^{(s+1)}_{A_1} & h^{(s+2)}_{A_1} & \cdots & h^{(r)}_{A_1} \\ h^{(s+1)}_{A_2} & h^{(s+2)}_{A_2} & \cdots & h^{(r)}_{A_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h^{(s+1)}_{A_{\mu+1}} & h^{(s+2)}_{A_{\mu+1}} & \cdots & h^{(r)}_{A_{\mu+1}} \\ P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,r-s} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,r-s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{r-s-\mu-2,1} & P_{r-s-\mu-2,2} & \cdots & P_{r-s-\mu-2,r-s} \end{vmatrix},$$

in welchem Ausdruck für $r - s - \mu - 2 = 0$ keine Reihen $P_{i,k}$ auftreten sollen und wo wieder die $h^{(i)}$ als Functionen der A_k aufgefasst sind und

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial A_k} = h^{(i)}_{A_k}$$

gesetzt ist.

Diese Grösse Q ist nun eine Lösung des Systems (17).

Seien also weiter

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_{r-s-\mu-1}$$

$r - s - \mu - 1$ verschiedene Grössen, die aus Q dadurch hervorgehen sollen, dass man für die $P_{i,k}$ verschiedene Functions- oder Werthsysteme annimmt. *Die allgemeinste Lösung des Systems* (17) *ist dann*

(18) $$f = \varphi(Q_1, Q_2, \cdots Q_{r-s-\mu-1}, x_1, x_2, \cdots x_s)$$

wo φ eine *beliebige* Function der angegebenen Argumente darstellt.

Wählt man insbesondere die $P_{i,k}$ als Constanten, oder als solche Functionen von $x_1, \cdots x_s$, dass die in den Q_i auftretenden Determinanten der $P_{i,k}$ keinen Factor gemein haben, so müssen, damit f eine *ganze* Function der Variabeln wird, auch die Q_i und die Function φ als *ganze* Functionen genommen werden.

§ 7.

Ternäre und quaternäre Formen. Specielle Fälle.

Wir behandeln im Folgenden noch einige specielle Fälle, als Anwendung des Vorhergehenden.

a) Die *ternären* Formen f lassen sich schon durch die Gleichung (9″) des § 2. direct erledigen. Denn wenn die Grössen

$$\xi_i = h^{(i)}(x)$$

hier noch Functionen der Variabeln x wären, so würde ihr Gebiet nur ein einfach unendliches sein können, und nach (9″) würden die Functionen $h^{(i)}(x)$ einen *Factor* gemein haben müssen, gegen die Annahme in § 1. Daher ist die Relation (3) zwischen den Polaren f_i eine *lineare* mit constanten Coefficienten, was der von Hesse ausgesprochene Satz ist. Verschwinden insbesondere auch alle ersten Unterdeterminanten von Δ_f, so existiren zwei lineare Relationen (3), und f wird die Potenz einer linearen Form.

b) Die *quaternären* Formen f sind durch die Entwicklungen der §§ 2—5. ebenfalls vollständig erledigt. Sollen hier nämlich die ξ Functionen der Variabeln x sein, so kann ihr Werthgebiet nur ein *einfach* unendliches sein. Denn wäre dasselbe ein zweifach unendliches, so würden wegen

$$h^{(i)}(\xi) = 0$$

die Functionen $h^{(i)}$ einen Factor gemein haben müssen, was gegen die Annahme des § 1. ist.

Aber für diesen Fall, dass die ξ *eine* Dimension bilden, liefert § 5. *alle* Lösungen f. Man hat dann in (16) $r=4$, also $s=r-2=2$ zu setzen und erhält eine Relation zwischen f_3 und f_4 allein, die, wie schon dort erwähnt, als binäre *linear* sein muss. Auch für die *quaternären* Formen gilt also der Satz Hesse's immer.

Da unser Beweisgang auch bei dem Verschwinden von Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante Δ_f von f unverändert bestehen bleibt, so können wir weiter schliessen, dass *eine, zwei* oder *drei* von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den Polaren von f existiren werden, je nachdem nur Δ_f oder auch sämmtliche erste, oder endlich auch sämmtliche zweite Unterdeterminanten von Δ_f iden-

tisch verschwinden; dass sich also unter diesen verschiedenen Bedingungen die Form f durch lineare Transformation auf eine solche von bezügl. 3, 2 oder 1 Variabeln reduciren lässt.

c) Wir erwähnen noch der einfacheren Form, in welche man die Lösungen (18) in einem speciellen Falle, insbesondere für $s = r - \mu - 2$, $s < \frac{r}{2}$ setzen kann.

Seien die Grössen

$$P_1, P_2, \cdots P_{r-s}$$

beliebige ganze homogene Functionen gleicher Ordnung von

$$x_1, x_2, \cdots x_s,$$

und sei

$$Q = x_{s+1} P_1 + x_{s+2} P_2 + \cdots + x_r P_{r-s}.$$

Eine allen Bedingungen genügende Function f ist dann

$$f = \varphi(Q, x_1, x_2, \cdots x_s),$$

wo φ eine beliebige ganze Function von $Q, x_1, x_2, \cdots x_s$ ist, nur der Art, dass dieselbe homogen wird in den Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_r.$$

Denn zwischen den Polaren

$$f_{s+1}, f_{s+2}, \cdots f_r,$$

die bezüglich mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Q} \cdot P_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Q} P_2, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial Q} P_r$$

übereinstimmen, werden, da $r - s > s$ ist, $r - 2s$ von allen Variabeln unabhängige identische Relationen stattfinden, die im Allgemeinen nicht linear sein werden.

Dieser Fall erschöpft insbesondere alle *quinären* Formen, bei denen das Werthgebiet der ξ ein einfach unendliches sein soll, indem man $r = 5$, $s = 2$ setzt.

§ 8.

Quinäre Formen.

In § 7. c) haben wir alle quinären Formen f angegeben, welche auf ein *einfach* unendliches Werthgebiet der ξ führen. Für die quinären Formen wäre nur noch der Fall eines *zweifach* unendlichen Werthgebiets der ξ möglich. Wir erledigen nun diesen Fall, indem wir nachweisen werden, dass keine Formen f solcher Art existiren. Dabei werden indess noch einige, in dem Vorhergehenden nicht enthaltene Betrachtungen nothwendig.

Sei in § 3.:

$$r = 5, \quad \mu = 2.$$

Das zu irgend einem ξ' des zweifach unendlichen ξ-Gebiets gehörige

$\varphi^{(\xi)}$-Gebilde hat hier zwei Dimensionen und besteht aus einfach unendlich vielen Werthreihen $(x'\xi')$. Jedes dieser $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde enthält (nach § 4.) im Allgemeinen eine endliche Zahl von Werthreihen $(y\xi')$, welche alle Fundamentalwerthsysteme des x-Gebietes umfassen. Und da diese Werthsysteme y auch nur ein Gebiet von 2 Dimensionen bilden können, so wird hier das irreducible ξ-Gebiet jedenfalls ein *endlicher* Theil des y-Gebiets und *besteht also ebenfalls* nur, wie jenes, *aus Werthreihen der Form* $(\xi'\xi'')$. Es giebt wenigstens einfach unendlich viele solcher Werthreihen, die wir mit $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$, $\cdots$ bezeichnen wollen. Man sieht sogar, dass die zu *allgemeinen* Werthsystemen α, α', α'' $\cdots$ der bel. Werthreihe $(\alpha\alpha')$ gehörigen Fundamentalreihen

$$(\alpha y),\ (\alpha' y'),\ (\alpha'' y'') \cdots$$

kein von dem ξ-Gebiet verschiedenes y-Gebiet bilden können; denn dasselbe würde für unendlich viele andere Werthreihen

$$(\beta\beta'),\ (\gamma\gamma') \cdots$$

ebenso gelten und das entstehende y-Gebiet würde mit dem irreducibeln ξ-Gebiet alle zweifach unendlich vielen Werthsysteme desselben gemein haben.

Wir werden nun zunächst nachweisen, dass zwischen den Functionen $\xi_i = h^{(i)}(x)$ entweder wenigstens *eine lineare* Relation besteht, oder dass der Satz Hesse's gilt.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Gesammtheit der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde, welche zu irgend einer Werthreihe des ξ-Gebiets, etwa zu

$$(\alpha\alpha'),$$

gehören. Diese liefern zusammengenommen ein Gebilde, das durch *eine* Gleichung dargestellt werden kann:

$$\mathsf{A} = 0,$$

wo A eine Function Φ ist (siehe § 4.). Wenn $\Sigma a_i \xi_i = 0$ eine Gleichung ist, welche durch alle Werthsysteme der Reihe $(\alpha\alpha')$ befriedigt wird, so ist A ein Factor von $\Sigma a_i h^{(i)}(x)$.

Das Gebiet $\mathsf{A} = 0$ muss also sämmtliche Werthsysteme des ξ-Gebiets enthalten. Wenn nun ein von $(\alpha\alpha')$ verschiedenes Werthsystem β desselben zum $\varphi^{(\alpha)}$-Gebilde gehört, so ist auch die ganze Werthreihe $(\alpha\beta)$ unter den Fundamentalwerthen y enthalten. Es ergeben sich hier nur zwei mögliche Fälle:

a) entweder hat man von jedem Werthsystem α, α', α'' $\cdots$ aus ausser der Werthreihe $(\alpha\alpha')$ noch wenigstens je eine weitere Werthreihe, bez.

$$(\alpha\beta),\ (\alpha'\beta'),\ (\alpha''\beta''),\ \cdots,$$

welche sämmtlich dem ξ-Gebiet angehören müssen, oder

b) man hat von wenigstens *einem* Werth α der Werthreihe $(\alpha\alpha')$ aus einfach unendlich viele Werthreihen

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\beta_1),\ (\alpha\beta_2),\ \cdots,$$

welche dem ξ-Gebiet angehören.

Wir haben diese beiden Fälle besonders zu behandeln.

Fall a)

Im Falle a) haben *sämmtliche* Werthsysteme ξ, da ja die Werthreihe $(\alpha\alpha')$ irgend eine des ξ-Gebiets war, die Eigenschaft, dass von ihm wenigstens zwei Werthreihen $(\xi\xi')$ und $(\xi\xi'')$ ausgehen.

Nehmen wir die allgemein gewählte Reihe $(\alpha\alpha')$ heraus. Die sämmtlichen übrigen Reihen

$$(\beta\beta'),\ (\gamma\gamma'),\ \cdots$$

haben entweder *alle* je ein Werthsystem mit $(\alpha\alpha')$ gemein, oder nicht.

Im ersten Falle wird eine Werthreihe $(\gamma\gamma')$ ebensowohl ein Werthsystem mit der Reihe $(\beta\beta')$, als mit der $(\alpha\alpha')$, gemein haben, sie ist daher von der Form

$$(\alpha+\lambda\alpha')+\varrho(\beta+\mu\beta'),$$

und da auch β' schon linear von α, α', β abhängt, so sind sämmtliche Werthsysteme des ξ-Gebiets in der Form

$$\alpha+\lambda\alpha'+\varrho\beta$$

enthalten.

Wenn zweitens $(\alpha\alpha'')$ und $(\beta\beta')$ kein Werthsystem gemein haben, so bilde man alle zu den verschiedenen α, α', α'', $\cdots$ von $(\alpha\alpha')$ gehörigen Reihen

$$(\alpha\gamma),\ (\alpha'\gamma'),\ (\alpha''\gamma'')$$

des ξ-Gebiets. Diese müssen zusammen auch die Reihe $(\beta\beta')$ enthalten; es muss also unendlich viele derselben geben, welche je einen Werth dieser $(\beta\beta')$-Reihe enthalten, und da diese zusammen schon ein irreducibles zweifach unendliches Gebilde darstellen, so ergiebt sich so schon das ganze ξ-Gebiet. Irgend ein Werth γ'' dieses Gebiets ist folglich in der Form

$$\alpha''+\varrho\beta'',$$

d. h.

$$(\alpha+\lambda\alpha')+\varrho(\beta+\mu\beta')$$

enthalten.

Hieraus folgt aber, da die ξ linear und homogen von höchstens vier Parametern abhängen, dass im Falle a) zwischen den Functionen $\xi_i = h^{(i)}(x)$ wenigstens *eine* lineare Relation besteht. Wir wollen nun nachweisen, dass für solche Functionen $h^{(i)}$, welche zu unserm f-Problem gehören, diese eine Relation noch eine zweite lineare mit sich führt.

Sei die hier gefundene lineare Relation bezeichnet mit

$$h^{(1)}(x) = 0.$$

Wir entwickeln dann f nach Potenzen von x_1:

$$f = x_1^{\mu} A + x_1^{\mu+1} B,$$

wo A eine homogene Function der Variabeln x_2, x_3, x_4, x_5 allein ist.

Nun hat man zwischen f_2, f_3, f_4, f_5 eine identische Relation

$$\Pi(f_2, \cdots f_5) = 0,$$

von der wir, wenn der Hesse'sche Satz nicht gültig sein soll, annehmen müssen, dass sie *nicht linear* ist.

Als identische Relation gilt dieselbe auch für die Glieder niedrigster Ordnung in x_1, also, wenn man $\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_i$ setzt:

$$\Pi(A_2, A_3, A_4, A_5) = 0,$$

d. h. A ist eine quaternäre Form mit verschwindender Hesse'scher Determinante. Aber jede Relation, welche in diesem Falle zwischen den Polaren von A besteht, muss nach § 7. b) auf *lineare* zurückführbar sein. Da nun $\Pi(A_2, \cdots A_5) = 0$ an sich keine solche und der Ausdruck Π auch nicht reducibel ist, so muss es nothwendig wenigstens *zwei* lineare Relationen zwischen den A_i geben, mit deren Hülfe Π identisch erfüllt wird. Daher ist A entweder eine *binäre* Form oder die *Potenz* eines linearen Ausdrucks in x_2, x_3, x_4, x_5, und besteht in beiden Fällen nur aus *linearen* Factoren.

Der Ausdruck

$$\frac{f}{x_1^{\mu}} = A + x_1 B$$

ist, als Factor von f, eine Function Φ (§ 2.), man hat also:

$$A(\xi) + \xi_1 B(\xi) = 0,$$

und wegen $\xi_1 = 0$:

$$A(\xi) = 0.$$

Es verschwindet daher einer der linearen Factoren von $A(\xi)$, was eine weitere in den Grössen ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 *lineare Relation* liefert. Wir wollen dieselbe mit $\xi_2 = 0$ bezeichnen.

Sei also jetzt

$$h^{(1)}(x) = 0, \quad h^{(2)}(x) = 0,$$

Das System (15) des § 6. liefert dann die 5 Gleichungen:

$$f_3 h_k^{(3)} + f_4 h_k^{(4)} + f_5 h_k^{(5)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots 5),$$

aus welchen entweder

$$f_3 = 0, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0,$$

also der Hesse'sche Satz, folgt, oder das Verschwinden sämmtlicher dreireihiger Determinanten aus den Differentialquotienten der $h^{(3)}$, $h^{(4)}$,

$h^{(5)}$. Dieses letztere sagt aus, dass zwischen den Functionen $h^{(4)}$ noch eine weitere, von allen Variabeln unabhängige identische Relation existirt, dass also das Werthgebiet der ξ kein *zweifach* unendliches sein kann.

Damit ist der Fall a) als nicht existirend erwiesen.

Fall b)

Das ξ-Gebiet enthält hier die einfach unendlich vielen Werthreihen

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\beta_1),\ (\alpha\beta_2),\ \cdots,$$

welche alle dasselbe Werthsystem α enthalten, und besteht als irreducibles auch nur aus denselben.

Sei

$$\xi = \lambda\alpha + \beta.$$

Die Gleichung

$$f_\xi \equiv \lambda f_\alpha + f_\beta = 0$$

gilt, wenn ξ gegeben ist, für die ∞^2 Werthsysteme x des zu ξ gehörigen $\varphi^{(5)}$-Gebildes. Für dieselben gilt dann auch die durch Differentiation nach λ daraus entstehende Gleichung

$$f_{1\xi}\frac{dx_1}{d\lambda} + f_{2\xi}\frac{dx_2}{d\lambda} + \cdots f_{5\xi}\frac{dx_5}{d\lambda} + f_\alpha = 0,$$

und da auch für dieselben Werthsysteme

$$f_{i\xi} = 0$$

ist, so hat man auch für alle x des $\varphi^{(5)}$-Gebildes identisch:

$$f_\alpha = 0.$$

Nun war hier β, also auch ξ, irgend ein Werthsystem des ξ-Gebiets. Daher ist die Gleichung

$$f_\alpha = 0,$$

in welcher α constant ist, identisch für *alle* Werthsysteme x überhaupt, was aber der Hesse'sche Satz ist.

Erlangen, im Mai 1876.

Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche.

Von

C. Neumann in Leipzig.

Es mag mir gestattet sein, hier mit wenig Worten auf dasjenige Thema einzugehen, welches Kirchhoff in den Monatsberichten der Berl. Akad. d. Wiss. vom 19. Juli 1875 behandelt hat, und zu bemerken, dass der dort von Kirchhoff ausgesprochene allgemeine Satz über die gegenseitige Beziehung des elektrischen Strömung-Problems und des Problems der ähnlichen Abbildung von mir bereits im Jahre 1863 (oder noch früher) entdeckt worden ist. Nicht nur habe ich seit jener Zeit hin und wieder gesprächsweise hierüber Mittheilung gemacht, sondern ich habe auch während des Wintersemesters 1873/74 in dem mit meinen hiesigen Universitäts-Vorlesungen verbundenem Mathematischen Seminar Gelegenheit genommen, jenen Satz vorzutragen und zu beweisen.

Hiervon aber abgesehen, wird eine kurze Mittheilung über den Gegenstand vielleicht schon deswegen von Interesse sein, weil meine Methode zur Ableitung jenes Satzes von der Kirchhoff'schen Methode wesentlich abweicht, und hinsichtlich ihrer Einfachheit schwer zu übertreffen sein dürfte.

Es sei F eine gekrümmte *leitende Fläche*, die nach Belieben entweder geschlossen, oder von irgend welchen Randcurven begrenzt ist; ferner sei c die überall gleiche unendlich kleine Dicke der Fläche, und k ihr Leitungsvermögen; endlich seien a_0 und a_1 irgend zwei auf F gegebene Punkte*).

Fliesst durch die Fläche F ein constanter elektrischer Strom von der Stärke J, welcher bei a_0 in die Fläche eintritt und bei a_1 wieder austritt, so wird die nach Eintritt des stationären Zustandes in der

---

*) Ebenso wie Kirchhoff verstehe ich unter *leitender Fläche* eine sehr dünne leitende Platte, die beliebig gekrümmt sein kann, also einen leitenden Körper, der begrenzt ist von zwei einander sehr nahe liegenden parallelen Flächen.

Fläche vorhandene elektrische Spannung V folgende Eigenschaften besitzen*):

Erstens. — Ist T ein beliebiger Theil von F, ferner s der Rand von T, und n die innere Normale dieses Randes, endlich M die während der Zeiteinheit durch die Punkte a_0 und a_1 in den Theil T einströmende Elektricitätsmenge, so findet die Formel statt:

$$\int \frac{dV}{dn}\, ds = \frac{M}{kc}, \tag{A}$$

die Integration ausgedehnt über den Rand von T. — Dabei sei bemerkt, dass die Grösse M (zufolge ihrer Definition) einen der drei Werthe 0, J oder $-J$ besitzen wird, nämlich den Werth 0, falls T *keinen* der Punkte a_0, a_1 oder *beide* enthält, ferner den Werth J, falls T nur a_0, und den Werth $-J$, falls T nur a_1 enthält.

Zweitens. — Am Rande der gegebenen Fläche F findet die Formel statt:

$$\frac{dV}{dn} = 0, \tag{B}$$

falls nämlich n die Normale jenes Randes bezeichnet.

Man erkennt leicht, dass diese beiden Eigenschaften (A) und (B) vollkommen ausreichend sind, um V zu bestimmen (abgesehen von einer additiven Constanten). Ist V ermittelt, so sind dadurch mitbestimmt sowohl die Curven constanter Spannung, als auch die Strömungscurven; denn die erstern sind dargestellt durch

$$V = \text{Const.},$$

und die letztern sind zu diesen orthogonal.

Wir wollen uns nun eine zweite Fläche Φ denken, welche der Fläche F in den kleinsten Theilen ähnlich ist, und gleichzeitig wollen wir uns die Function V (ohne Abänderung ihrer Werthe) von allen Punkten a, b, c, $\cdots$ der Fläche F nach den correspondirenden Punkten α, β, γ, $\cdots$ der Fläche Φ versetzt denken; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$V_a = V_\alpha,$$
$$V_b = V_\beta,$$
$$V_c = V_\gamma,$$
$$\cdots\quad\cdots$$

*) Bezeichnet a einen *beliebigen* Punkt der Fläche F, so ist die im Punkte a vorhandene elektrische Spannung V nichts Anderes als das Gesammtpotential aller freien Elektricität auf eine in a gedachte elektrische Masseneinheit. — Wenigstens ist dies die heut zu Tage übliche (von Weber und Kirchhoff aufgestellte) Ansicht.

Hieraus folgt z. B.:

$$V_c - V_b = V_\gamma - V_\beta .$$

Bilden die drei Punkte a, b, c ein unendlich kleines bei b rechtwinkliges Dreieck, so wird das von den Punkten α, β, γ gebildete ähnliche Dreieck rechtwinklig sein bei β, und zugleich der Relation entsprechen:

$$\frac{(ab)}{(bc)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\beta\gamma)} .$$

Durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen folgt sofort:

$$\frac{V_c - V_b}{(bc)}(ab) = \frac{V_\gamma - V_\beta}{(\beta\gamma)}(\alpha\beta);$$

und diese Relation gewinnt, falls man nachträglich



$$(ab) = ds, \qquad (\alpha\beta) = d\sigma ,$$
$$(bc) = dn, \qquad (\beta\gamma) = d\nu$$

setzt, die einfachere Gestalt:

$$\frac{dV}{dn} ds = \frac{dV}{d\nu} d\sigma ,$$

wo $\frac{dV}{dn}$ und $\frac{dV}{d\nu}$ nichts Anderes sind, als die nach den Richtungen n und ν genommenen Differentialquotienten von V.

Vermöge der soeben gefundenen Relation können wir nun die Formeln (A) und (B) umgestalten respective in:

(A′) $$\int \frac{dV}{d\nu} d\sigma = \frac{M}{kc} ,$$

und in:

(B′) $$\frac{dV}{d\nu} = 0 ;$$

hier bezeichnet σ in der *einen* Formel den Rand von T, in der *andern* den von Φ, wo selbstverständlich T denjenigen Theil der Fläche Φ vorstellen soll, welcher dem Theile T von F correspondirt.

Entspricht also die Function V auf der ursprünglichen Fläche F den Bedingungen (A), (B), so wird sie gleichzeitig auf der neuen Fläche Φ den analogen Bedingungen (A′), (B′) Genüge leisten.

Kann man also das Problem des stationären Strömungszustandes lösen für eine gegebene Fläche F, so kann man dasselbe auch lösen für jede andere Fläche Φ, welche mit F in den kleinsten Theilen ähnlich ist; vorausgesetzt, dass die Einströmungspunkte der beiden Flächen correspondirende Punkte sind, und die Ausströmungspunkte ebenfalls. — Repräsentirt nämlich V die Spannung für den Strömungszustand der Fläche F, so wird dieselbe Function V, versetzt nach den correspondirenden Punkten von Φ, die Spannung für den Strömungszustand von Φ darstellen.

Leipzig, Juli 1876.

Ueber den Fundamentalsatz der Algebra.

Von P. Gordan*) in Erlangen.

Im Nachstehenden versuche ich, den zweiten Beweis, welchen Gauss (siehe Werke Bd. 3. p. 33—56) für den Fundamentalsatz der Algebra gegeben hat: *dass jede ganze, rationale algebraische Function einer Variabeln x in lineare Functionen zerfällbar ist,* in einigen wesentlichen Punkten zu vereinfachen. Dabei unterdrücke ich der Kürze wegen einige Ausführungen, die allgemein bekannt sind. Z. B. beschränke ich mich darauf, den geforderten Nachweis für Gleichungen mit reellen Coefficienten zu führen und bei ihnen die Existenz überhaupt *einer* Wurzel zu zeigen. Andererseits mögen die beiden Sätze als bewiesen gelten:

> dass zwei Functionen, deren Resultante**) verschwindet, einen gemeinsamen Factor haben, und dass eine ganze Function nur auf eine Weise in Primfactoren zerlegt werden kann.

Sei also

$$f = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = 0$$

eine Gleichung mit gegebenen reellen Coëfficienten; von ihr soll gezeigt werden, dass sie eine Wurzel besitzt.

Wenn n ungerade, ist dies unmittelbar deutlich, da $f(+\infty)$ und $f(-\infty)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, und also ein Werth von x existiren muss, in welchem f sein Vorzeichen ändert, also verschwindet.

---

*) Vergl. Erlanger Berichte, Mai 1876.

**) Als Resultante zweier Functionen

$$f = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \cdots,$$
$$\varphi = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \cdots$$

wird hier und weiterhin der Ausdruck bezeichnet:

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ist aber n eine gerade Zahl, so werde, mit Gauss, eine weitere Unterscheidung eingeführt nach der Multiplicität, in welcher die Zahl 2 als Factor in n enthalten ist. Es werde angenommen, man habe bereits den erforderlichen Nachweis geführt:

1) für solche Gleichungen mit reellen Coëfficienten, deren Grad den Factor 2 in einer niedrigeren Potenz als die gegebene Gradzahl n enthält,
2) für solche Gleichungen mit reellen Coëfficienten, deren Grad kleiner als n ist und den Factor 2 in keiner höheren Potenz als n enthält.

Wir zeigen dann, dass unsere Behauptung auch für die gegebene Zahl n richtig ist, und führen damit den Beweis allgemein, indem er für ungerades n bereits erbracht ist, dann also der Reihe nach für alle Zahlen n gewonnen wird, welche die 2 einmal als Factor enthalten, etc.

Zu dem Zwecke setze ich nun

$$f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \frac{u^2}{2}f''(x) + \cdots = f(x) + u \cdot P(x, u)$$

und bilde die Resultante der beiden Functionen:

$$f(x), \quad P(x, u)$$

die als

$$R_{f(x),\, P(x,\, u)},$$

bezeichnet werden mag*). Sie ist eine Function von u vom Grade $n(n-1)$, in welcher $u^{n(n-1)}$ den Coëfficienten 1 hat. Sie ist zugleich Resultante der Functionen

$$f(x) + uP(x, u) = f(x+u) \text{ und } P(x, u),$$

oder, da sie den Charakter einer simultanen Invariante besitzt, Resultante der Functionen:

$$f(x) \text{ und } P(x-u, u) = P(x, -u);$$

sie ist somit eine gerade Function von u, also eine ganze Function von u^2 und als solche vom Grade $\frac{n \cdot n-1}{2}$.

Aber $\frac{n \cdot n-1}{2}$ besitzt den Factor 2 in einer geringeren Potenz als die (gerade) Zahl n; es hat also

$$R_{f(x),\, P(x,\, u)} = 0,$$

*) Dies ist die erste Abweichung von Gauss. Die Resultante, wie sie im Texte gebildet wird, bestimmt, gleich Null gesetzt, schliesslich die Quadrate der Wurzeldifferenzen der vorgelegten Gleichung resp. diese Differenzen selbst. Gauss dagegen benutzt eine allgemeinere Resolvente, deren Wurzel

$$= A\alpha\beta + B(\alpha+\beta) + C \text{ (vgl. Gauss Seite 46)}$$

ist, unter α, β zwei Wurzeln von f, unter A, B, C beliebige Constante verstanden.

aufgefasst als Gleichung für u^2, oder auch als Gleichung für u, nach Voraussetzungen (1) eine Wurzel. Bezeichnen wir dieselbe durch v, so entsteht die Identität

$$R_{f(x),\,P(x,\,v)} = 0,$$

welche zeigt, dass $f(x)$ und $P(x, v)$ einen gemeinsamen Factor besitzen, *dass also $f(x)$ in Factoren zerfällbar ist.*

Aus dieser Thatsache kann nun folgendermassen einfach gefolgert werden, dass f eine Wurzel besitzt, also schliesslich in lineare Factoren zerfällbar ist*). Ich unterscheide drei Fälle.

1) Der Factor, den $f(x)$ mit $P(x, v)$ gemein hat, sei reell, $= g(x)$. Dann ist

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

wo $h(x)$ ebenfalls reell. Der Grad mindestens eines dieser Factoren enthält den Factor zwei in keiner höheren Potenz als n; dieser Factor ergiebt also, nach Voraussetzung (2), gleich Null gesetzt, eine Wurzel, und also hat auch $f(x) = 0$ eine Wurzel.

2) Der Factor, welchen $f(x)$ mit $P(x, v)$ gemein hat, sei imaginär gleich $\varphi(x)$ aber sein Grad kleiner als $\frac{n}{2}$. So enthält $f(x)$ selbstverständlich auch den conjugirt imaginären Factor $\psi(x)$. Die beiden Factoren φ, ψ können ihrerseits einen reellen Factor gemein haben; dann hat man eine Zerlegung von $f(x)$ von der Art, die wir gerade betrachtet haben. Sind aber φ, ψ relativ prim, so setze man einfach $\varphi \cdot \psi = g(x)$ und man hat wieder, da f nur auf eine Weise in Primfactoren zerlegbar ist,

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

unter g, h reelle Functionen verstanden, so dass auch dann der soeben entwickelte Schluss in Kraft tritt.

3) Der Factor, welchen $f(x)$ und $P(x, v)$ gemein haben, sei imaginär, gleich $\varphi(x)$, sein Grad gleich $\frac{n}{2}$. Bezeichnet dann wieder $\psi(x)$ die conjugirt imaginäre Function, so braucht wiederum nur der Fall erörtert zu werden, wo φ, ψ relativ prim sind und man für sie keine weitere Zerlegung in niedere Factoren kennt. Dann ist**) also

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

und nun schliesse man folgendermassen:

Da $\varphi(x)$ imaginär, so hat v einen complexen (nicht verschwindenden) Werth:

$$v = \alpha + i\beta.$$

---

*) Man vergl. dazu die relativ umständliche Erörterung, deren Gauss bei seinem Beweise bedarf.

**) Als Coëfficienten der höchsten Potenz von x in φ und ψ setze ich die 1 voraus.

Betrachten wir dann:

$$f(x+v) = \varphi(x+v) \cdot \psi(x+v).$$

Da $f(x+v) = f(x) + v \cdot P(x, v)$, so enthält $f(x+v)$ ebenfalls den Factor $\varphi(x)$. Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen, denen wir φ, ψ unterwerfen durften, muss daher $\varphi(x)$ mit $\varphi(x+v)$ oder mit $\psi(x+v)$ identisch sein. Aber der Ausdruck $\varphi(x+v) - \varphi(x)$ hat als Coëfficienten von $x^{\frac{n}{2}-1}$ die Grösse $\frac{nv}{2}$, verschwindet also nicht. Daher ist:

$$\varphi(x) = \psi(x+v) = \psi(x+\alpha+i\beta).$$

Ersetzt man hierin x durch $x - \alpha - i\beta$, ändert andererseits das Verzeichen von i, wodurch φ in ψ übergeht, so entstehen die Relationen:

$$\varphi(x-\alpha-i\beta) = \psi(x),$$
$$\varphi(x+\alpha-i\beta) = \psi(x).$$

Mithin verschwindet der Ausdruck:

$$\varphi(x+\alpha-i\beta) - \varphi(x-\alpha-i\beta)$$

und also der Coëfficient von $x^{\frac{n}{2}-1}$ in ihm, d. h. $n\alpha$. Also ist $\alpha = 0$ und die Function

$$\varphi\left(x - \frac{i\beta}{2}\right) = \psi\left(x + \frac{i\beta}{2}\right)$$

ändert ihren Werth mit i nicht, hat also nur reelle Coëfficienten. Ihr Grad $\frac{n}{2}$ besitzt den Factor 2 in einer niederen Potenz als n; mithin hat die Gleichung:

$$\varphi\left(x - \frac{i\beta}{2}\right) = 0$$

nach Voraussetzung (1) eine Wurzel; ein Gleiches gilt für $\varphi(x) = 0$ und also auch für $f(x) = 0$.

Notiz über infinitäre Gleichheiten.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

In meiner Abhandlung: „*Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln*“ findet sich in der kurzen Uebersicht über die Methoden des Infinitärcalcüls II. pag. 2 die Stelle: „Man kann jede beliebige Gleich- oder Ungleichheit . . . . auf beliebige Potenzen erheben oder logarithmiren“. Das letztere ist nicht genau ausgedrückt. Es muss heissen „oder im Falle der Gleichheit logarithmiren“. Im Falle $u \succ v$ ist $lu \succsim lv$. Ich habe diese Frage schon (diese Annalen Bd. VIII, pag. 370, Anm., und pag. 574, wo ein an der ersten Stelle vorkommendes Versehen corrigirt ist) erörtert, indem ich angab, was aus der Gleichheit $lf(x) \sim lx$ folgt. Ich würde daher jene Stelle in der neueren Abhandlung, die schwerlich Jemand irre führen wird, einfach auf sich beruhen lassen können, wenn nicht Aehnliches später auch in der Rechnung an zwei Stellen vorkäme, so dass ich eine kurze Verbesserung doch nicht für überflüssig halte. Namentlich aber scheint mir die Gelegenheit schicklich, um auf die allgemeine Frage, wann aus der Gleichheit $u \sim v$ folgt $f(u) \sim f(v)$, etwas genauer als bisher geschehen, einzugehen.

I.

Aus der Ungleichheit $u \succ v$ folgt, wie bemerkt, $lu \succsim lv$, und ich habe an der oben angeführten Stelle bereits angegeben, dass das untere Zeichen gilt, wenn das Unendlich von v zwischen dem Unendlich von Potenzen von u eingeschlossen ist. Da aber erfahrungsgemäss für diesen Fall die Sätze, welche man durch Logarithmen von $u \succ v$ beweisen will, selbstverständlich zu sein pflegen, so habe ich die Gewohnheit, nur $lu \succ lv$ zu schreiben, und habe dies ein paar Mal im Druck so gelassen. Erstens pag. 4 der Abhandlung: „Untersuchungen etc.“ müssen einige Zeilen der unteren Hälfte der Seite lauten: „Nun werde ich zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen stets $\gamma\psi'' \succsim \gamma'\psi'$ ist. Aus $\sigma = \gamma\psi' \succ 1$ folgt $\psi' \succ \frac{1}{\gamma}$ oder $l\psi' \succsim l\frac{1}{\gamma}$. Durch Differentiation folgt: $\frac{\psi''}{\psi'} \succsim \frac{\gamma'}{\gamma}$ und durch Multiplication mit $\gamma\psi'$ ergiebt sich $\gamma\psi'' \succsim \gamma'\psi'$.“

Aus dem nämlichen Grunde bedarf der Beweis für das Verschwinden des Integrals

$$J_2 = \int_{\chi(0)}^{\chi(\alpha)} d\chi \, \frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h} \sin\chi$$

(Art. 13, pag. 25) einer kleinen Vervollständigung. Es handelt sich dort, um es kurz zu sagen, um den infinitären Werth von

$$v = \frac{1}{1 + \frac{\gamma(\alpha)\psi''(\alpha)}{\gamma'(\alpha)\psi'(\alpha)}},$$

im Falle $\psi'(\alpha) \succ \frac{1}{\gamma(\alpha)} \succ 1$: Zunächst ist, weil $\psi \succ 1$, für $\alpha = 0$, die Grösse $\frac{\gamma}{\gamma'}\frac{\psi''}{\psi'}$ negativ. Weiter wird, was man gerade wie bei der obigen Correctur zeigt, $\frac{\gamma\psi''}{\gamma'\psi'} \precsim 1$ sein. Endlich kann im Falle $\frac{\gamma\psi''}{\gamma'\psi'} \sim 1$ der $\lim \frac{\gamma\psi''}{\gamma'\psi'}$ numerisch nicht kleiner als Eins sein. Dies lässt sich direct beweisen, es folgt aber schon daraus, dass $h = \psi'(\alpha) \cdot v$ nicht negativ sein kann.

Also bewegt sich v zwischen 0 und $-\infty$. Die aufzulösende infinitäre Gleichung pag. 26 lautet:

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) \cdot v = -N\pi$$

und ihre Auflösung ist unter jener Annahme über v:

$$\delta = -\frac{N\pi u}{(1-v)\psi'(\alpha)},$$

wie durch einen Blick auf die Behandlung dieser infinitären Gleichung (diese Annalen Bd. VIII, pag. 412) leicht zu erkennen. Am weiteren Beweis ist nichts zu ändern.

II.

Wir gehen nun dazu über, die Beziehungen zwischen den Gleichheiten $u \sim v$, $f(u) \sim f(v)$ etwas zu verfolgen.

Aus der gewöhnlichen Gleichheit $a = b$ folgt, falls f irgend ein Operationszeichen vorstellt: $f(a) = f(b)$. *Wenn man aber hat, unter u und v zwei Functionen von x verstanden:*

$$u \sim v,$$

so folgt daraus keineswegs immer

$$f(u) \sim f(v),$$

und es handelt sich um die Bedingungen für f und $\frac{u}{v}$, unter denen vorstehende Gleichheit gilt, oder nicht gilt, wobei wir uns auf die Annahme $f(x) \succ 1$ beschränken wollen.

Ich schreibe:

$$f(x) = x^{\varphi(x)}.$$

Zuerst setzen wir voraus $\varphi(x) \succsim 1$. Ist $\varphi(x) \sim 1$, so hat $f(x)$ die Form $x^M\psi(x)$, wo $\psi(x)^{\pm 1}$ ein kleineres Unendlich hat, als eine Potenz von x. Nun folgt aus $u \sim v$, dass $v = \lambda \cdot u$ ist, wo $\lambda \sim 1$. Also folgt aus $u \sim v$: $u^M \sim v^M$. Weiter habe ich (diese Annalen Bd. VIII, pag. 390) folgenden Satz bewiesen: „Wenn $F(x) \succ 1$, und für zwei Functionen y und η von x findet die Gleichheit $F(y) \sim F(\eta)$ statt, so ist sie auch richtig für jede Function $F_1(x)$, die der Bedingung $1 \precsim F_1(x) \prec F(x)$ genügt.“ Also ist auch $\psi(u) \sim \psi(v)$, wenn $u^M \sim v^M$ ist. Daraus folgt, dass, wenn $\varphi(x)$ in $f(x) = x^{\varphi(x)}$ der Bedingung $\succsim 1$, also der Typus von $f(x)$ der Bedingung $\precsim x$ genügt, man stets

$$f(u) \asymp f(v)$$

hat.

Zweitens werde vorausgesetzt $\varphi(x) \succ 1$. Wann ist alsdann $f(u) \asymp f(\lambda u)$ und wann nicht? Indem wir $x^{\varphi(x)}$ statt $f(x)$ einsetzen, folgt zuerst:

$$u^{\varphi(u)} \asymp (\lambda u)^{\varphi(\lambda u)},$$

oder

$$e^{l u \varphi(u)} \asymp e^{l(\lambda u)\varphi(\lambda u)},$$

oder

$$1 \asymp e^{l(\lambda u)\varphi(\lambda u) - l u \varphi(u)},$$

oder endlich

$$l(\lambda u)\varphi(\lambda u) - l u \varphi(u) \precsim 1$$

als Bedingung für das Stattfinden der Gleichheit $f(u) \asymp f(\lambda u)$. Wir geben dieser Bedingung die zwei Formen:

$$l\lambda\varphi(\lambda u) + l u(\varphi(\lambda u) - \varphi(u)) \precsim 1,$$

$$-\left[l\tfrac{1}{\lambda}\varphi(\lambda u) + l u(\varphi(u) - \varphi(\lambda u))\right] \precsim 1,$$

jenachdem nämlich $\lim \lambda \gtrsim 1$. *In beiden Fällen ist sie ersichtlich unerfüllbar.*

Ist endlich $\lim \lambda = 1$, so führen die vorstehenden Bedingungen, wenn man darin $\varphi(x) = \frac{l f(x)}{l x}$ zurücksetzt, zu nichts, indem sie erfüllt sind, wenn $\frac{f\lambda u}{f u} \asymp 1$, was wir ja wissen, und wofür wir gerade die Form von λ suchen. Diese Aufgabe versuche ich nicht in solcher Allgemeinheit zu lösen. Setzen wir $\lambda = 1 + \mu$, so ist $\mu u \prec u$, und nach pag. 376, VIII. Bd. dieser Annalen ist für $1 \prec a \prec x$, und $e^{x^M} \precsim f(x) \precsim e^{-x^M}$, M beliebig gross:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\frac{f'(x)}{f(x)}\omega}, \quad \omega \overline{\infty} 1.$$

In diesem Unendlichkeitsintervall wird daher $f(u) \asymp f(\lambda u)$ sein, wenn $(\lambda - 1)u\frac{f'(u)}{f(u)} \precsim 1$.

Im Ganzen folgt also:

Wenn $u \asymp v$ *und* $\frac{l f}{l x} \precsim 1$, *so ist auch* $f(u) \asymp f(v)$. *Ist* $\frac{l f}{l x} \succ 1$, *und* $\lim \frac{u}{v} \gtrsim 1$, *so hat man nie* $f(u) \asymp f(v)$. *Ist* $\lim \frac{u}{v} = 1$, *so finden verwickeltere Verhältnisse statt. Es kann* $f(u) \asymp f(v)$ *sein, und für ein gewisses Unendlichkeitsintervall von* $f(x)$ *ist die Bedingung hierfür im Vorstehenden mitgetheilt.*

Tübingen, Mai 1876.

Inhaltsverzeichniss der Bände 1—10.

	Band	Seite
Fr. G. Affolter in Solothurn.		
Lehrsätze und Aufgaben über die Kugel	4,	185
Zur Staudt-Schröter'schen Construction des regulären Vielecks	6,	582
Construction des regulären Sieben- und Dreizehn-Ecks	6,	592
Ueber das Malfatti'sche Problem	6,	597
M. Andrélewsky in Warschau.		
Propriétés de quelques quadratures déduites de l'intégration des expressions différentielles à deux variables	4,	391
Formules relatives à la théorie des intégrales définies	4,	550
G. Ascoli in Mailand.		
Ueber trigonometrische Reihen	6,	231
A. V. Bäcklund in Lund.		
Ueber Flächentransformationen	9,	297
R. S. Ball in Dublin.		
The Theory of Screws, a study in the Dynamics of a rigid body. (Auszug aus einem grösseren Werke)	9,	541
R. Beez in Plauen.		
Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung	7,	387
E. Beltrami in Rom.		
Zur Theorie des Krümmungsmaasses	1,	575
A. Bessel in Petersburg.		
Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen	1,	173
D. Bobylew in Petersburg.		
Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik	6,	72
Ueber die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln	7,	396
P. du Bois-Reymond in Tübingen.		
Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend	4,	135
Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln	4,	362
Summation der Reihe mit dem Gliede $\frac{p \sin pu}{h^2 + p^2}$	5,	399
Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen	7,	241
Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz	7,	605
Ueber asymptotische Werke, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen	8,	363

	Band	Seite
Nachtrag zur vorstehenden Abhandlung	8,	574
Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. (Abh. der K. Bayer. Akademie der W. II. Cl., XII. Bd., II. Abth.)	10,	481
Notiz über infinitäre Gleichheiten	10,	576
W. Braun in Passau.		
Ueber Lissajous' Curven	8,	567
A. Brill in München.		
Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen	1,	225
Note bezüglich der Zahl der Moduln einer Classe algebraischer Gleichungen	1,	401
Zweite Note bezüglich der Moduln einer Classe von algebraischen Gleichungen	2,	471
Ueber die Doppelpunkte von Curven im Raume, deren Geschlecht Null ist	3,	456
Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren	3,	459
Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven	4,	510
Ueber zwei Berührungsprobleme	4,	527
Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen	5,	378
Note über die Gleichung der auf einer Ebene abbildbaren Flächen	5,	401
Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve	6,	33
Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt	6,	66
Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. (Zus. mit Nöther)	7,	269
Ueber die Correspondenzformel	7,	607
Ueber Systeme von Curven und Flächen	8,	534
J. Brioschi in Mailand.		
Des substitutions de la forme $\Theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right)$ pour un nombre n premier de lettres. (Abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten 1869. S. 491)	2,	467
Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double	4,	95
G. Cantor in Halle a. S.		
Ueber trigonometrische Reihen	4,	139
Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen	5,	123
Algebraische Notiz	5,	133
A. Cayley in Cambridge.		
Note on the Solution of the Quartic Equation $\alpha U + 6\beta H = 0$	1,	54
Note on the theory of Invariants	3,	268
On the transformation of unicursal surfaces	3,	469
On the deficiency of certain surfaces	3,	526
An example of the higher transformation of a binary form	4,	359
On a surface of the eighth order	4,	558
On a theorem in Covariants	5,	625
On the Non-Euclidian Geometry	5,	630
On the group of Points G_4^1 on a sextic curve with five double points	8,	359

R. Clausius in Bonn.

	Band	Seite
Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum und zweier materieller Punkte um einander . .	4,	231
Ueber die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden charakteristischen Grössen	6,	390

Clebsch †.

Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen (Zus. mit Gordan)	1,	56
Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p = 2$ ist	1,	170
Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung	1,	253
Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (Zus. mit Gordan)	1,	359
Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung	1,	634
Ueber die Plücker'schen Complexe	2,	1
Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen	2,	193
Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren	2,	373
Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung	2,	382
Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen	2,	445
Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen	3,	45
Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit	3,	238
Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form	3,	263
Zur Theorie der binären algebraischen Formen	3,	265
Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5^{ten} Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits . .	4,	284
Ueber das ebene Fünfeck	4,	476
Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen	4,	490
Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$	5,	1
Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung	5,	419
Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung . . .	5,	422
Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie	5,	427
Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe	5,	435
Zur Theorie der Charakteristiken	6,	1
Zum Andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch	6,	197
Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene	6,	203
Zur Theorie der Riemann'schen Flächen	6,	216
Ueber cubische ternäre Formen (Zus. mit Gordan)	6,	436
Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde	7,	1

L. Cremona in Rom.

Observations géométriques à propos de la Note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4^e ordre avec un point double"	4,	99
Ueber die Abbildung algebraischer Flächen	4,	213

	Band	Seite
O. Dersch in Offenbach a. M.		
Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung	7,	497
J. Diekmann in Wesel.		
Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3^{ter} Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält (mit einer lithographirten Tafel)	4,	442
E. Dorn in Breslau.		
Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der Transformationen der ultraelliptischen Functionen für beliebige Transformationsgrade	7,	481
v. Drach in Marburg.		
Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe	2,	128
Ueber das vollständige Fünfeck und gewisse durch dasselbe bestimmte Kegelschnitte	5,	404
H. Durège in Prag.		
Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte	1,	509
Uber die Curve 3^{ter} Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet	5,	83
J. E. Eckhardt †.		
Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3^{ten} Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven	5,	30
Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen	7,	591
Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. (Aus einem Programm der Realschule I. Ordnung zu Chemnitz)	10,	227
A. Enneper in Göttingen.		
Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen	2,	587
Bemerkungen über die Enveloppe einer Fläche	5,	304
Ueber ein bestimmtes Integral	6,	360
Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme	7,	456
W. Ermakoff in Heidelberg.		
Ueber die Cylinderfunctionen	5,	639
W. Frahm †.		
Bemerkung über die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung	7,	512
Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung	7,	635
Note über die Rotation eines starren Körpers	8,	31
Ueber gewisse Differentialgleichungen	8,	35
C. F. Geiser in Zürich.		
Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades	1,	129
Notiz über die algebraischen Minimumsflächen	3,	530
J. W. P. Godt in Schleswig.		
Notiz über die Vertheilung der Elektricität auf einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper	4,	245

	Band	Seite
P. Gordan in Erlangen.		
Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen. (Zus. mit A. Clebsch)	1,	56
Ueber ternäre Formen dritten Grades	1,	90
Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. (Zus. mit A. Clebsch)	1,	359
Die simultanen Systeme binärer Formen	2,	227
Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen	3,	355
Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten	3,	631
Resultanten von Covarianten	4,	169
Ueber Combinanten	5,	95
Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung	5,	341
Ueber die simultanen Invarianten binärer Formen	5,	595
Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten	6,	23
Ueber cubische ternäre Formen. (Zus. mit Clebsch)	6,	436
Ueber den grössten gemeinsamen Factor	7,	433
Ueber dis algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. (Zus. mit Nöther)	10,	547
Ueber den Fundamentalsatz der Algebra	10,	572
W. Göring in Rudolstadt.		
Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben	7,	311
R. Götting in Torgau.		
Differentiation des Ausdrucks x^k, wenn x eine Function irgend einer unabhängigen Variabeln bedeutet	3,	276
J. P. Gram in Kopenhagen.		
Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne	7,	230
H. Grassmann in Stettin.		
Die neue Algebra und die Ausdehnungslehre	7,	538
S. Gundelfinger in Tübingen.		
Bemerkung zur Auflösung der cubischen Gleichungen	3,	272
Zur Theorie der ternären cubischen Formen	4,	144
Ueber einige allgemeine Theoreme aus der neueren Algebra	4,	164
Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung	4,	561
Ueber die Wendepunktdreiseite einer Curve dritter Ordnung	5,	442
Erweiterte Fassung eines von Clebsch aufgestellten Uebertragungsprincips und deren Anwendung	6,	16
Quadratische Transformation des elliptischen Differentiales $\dfrac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}}$ unter der Voraussetzung $f(xxx) = 0$	7,	449
Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen	7,	452
Ueber geometrische Deutung algebraischer Formen, die in der Theorie der Curven dritter Ordnung auftreten	8,	136
S. Günther in München.		
Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche	7,	262
P. Güssfeld in Berlin.		
Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen, und darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner algebraischer Curven, mit besonderer Berücksichtigung der Curven dritter Ordnung	2,	65

	Band	Seite
J. C. F. Haase in Augsburg.		
Zur Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Rückkehrpunkten	2,	515
H. Hankel †.		
Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art	1,	467
Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel	7,	583
Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen	8,	453
Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen	8,	471
F. Harbordt in Giessen.		
Das simultane System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form	1,	210
A. Harnack in Leipzig.		
Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades	9,	1
Zur Theorie der ternären cubischen Formen	9,	218
Ueber eine Behandlungweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten	9,	371
Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven	10,	189
E. Heine in Halle a. S.		
Aus brieflichen Mittheilungen (namentlich über Variationsrechnung)	2,	187
Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes	4,	626
Ch. Hermite in Paris.		
Lettre de M. Ch. Hermite à M. P. Gordan	10,	287
C. Hierholzer †.		
Ueber Kegelschnitte im Raume	2,	563
Ueber eine Fläche der vierten Ordnung	4,	172
Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren	6,	30
R. Hoppe in Berlin.		
Abbildung der Flächen zweiten Grades nach Aehnlichkeit der Flächenelemente	2,	504
Ueber independente Darstellung der höheren Differentialquotienten	4,	85
E. Hossenfelder in Graudenz.		
Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung	4,	195
B. Igel in Wien.		
Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt	6,	633
E. de Jonquières in Paris.		
Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques	1,	424
C. Jordan in Paris.		
Commentaire sur Galois	1,	145
Sur les équations de la division des fonctions abéliennes	1,	583
H. Kinkelin in Basel.		
Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung	1,	502

	Band	Seite
F. Klein in München.		
Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades . . .	2,	198
Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten	2,	366
Ueber die Abbildung der Complexflächen vierter Ordnung und vierter Classe	2,	371
Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. (Zus. mit S. Lie)	4,	50
Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen	4,	346
Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper	4,	403
Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie	4,	573
Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie	5,	257
Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen	5,	278
Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie	6,	112
Ueber Flächen dritter Ordnung. (Dazu gehörig mehrere lithographirte Tafeln)	6,	551
Ueber die Plücker'sche Complexfläche	7,	208
Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie (Bd. VI., p. 112)	7,	531
Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen	7,	549
Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen	7,	558
Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst . .	9,	183
Ueber den Zusammenhang der Flächen.	9,	476
Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve	10,	199
Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Mit 4 lithographirten Tafeln)	10,	365
Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen. (Zweite Mittheilung.)	10,	398
J. König in Pest.		
Ueber die Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen . . .	5,	310
Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades	9,	530
L. Königsberger in Dresden.		
Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades	1,	161
Die Differentialgleichungen der Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	1,	165
Berichtigung eines Satzes von Abel, die Darstellung der algebraischen Functionen betreffend	1,	168
Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Function	3,	1
Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen	9,	487
A. Korkine in Petersburg.		
Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel . .	2,	13
Sur les formes quadratiques positives quaternaires. (Zus. mit G. Zolotareff)	5,	581
Sur les formes quadratiques. (Zus. mit Zolotareff)	6,	366

	Band	Seite
G. Korndörfer in Neumünster.		
Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten	1,	592
Fortsetzung dieses Aufsatzes	2,	41
Ueber diejenigen Raumcurven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen	3,	415
Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden	3,	496
Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht	4,	117
M. Krause in Breslau.		
Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen	8,	539
Fortsetzung dieses Aufsatzes	9,	554
H. Krey in Kiel.		
Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar	10,	221
S. Lie in Christiania.		
Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. (Zus. mit F. Klein)	4,	50
Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen	5,	145
Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen	8,	215
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	9,	245
L. Lindelöf in Helsingfors.		
Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume	2,	150
Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima . .	2,	160
F. Lindemann in Schwerin.		
Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung	7,	56
F. Lippich in Prag.		
Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's	7,	212
R. Lipschitz in Bonn.		
Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und Geometrie	6,	416
E. Lommel in Erlangen.		
Integration der Gleichung $x^{m+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}} \mp y = 0$ durch Bessel'sche Functionen	2,	624
Zur Theorie der Bessel'schen Functionen	3,	475
Zur Theorie der Bessel'schen Functionen	4,	103
Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function . .	9,	435
J. Lüroth in Carlsruhe.		
Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung	1,	37
Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume	3,	124

	Band	Seite
Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche	4,	181
Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit	6,	319
Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie	8,	145
Beweis eines Satzes über rationale Curven	9,	163
L. Marcks †.		
Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung	5,	27
A. Mayer in Leipzig.		
Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Princip der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht	2,	148
Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	3,	435
Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function	4,	88
Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen	5,	488
Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	6,	162
Nachtrag. Directe Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy	6,	192
Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen	8,	304
Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode	8,	313
Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	9,	347
F. G. Mehler in Elbing.		
Ueber die Darstellung einer willkührlichen Function zweier Variabeln durch Cylinderfunctionen	5,	135
Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ u. über eine analoge Integralform für die Cylinderfunction $J(x)$	5,	141
Meissel in Iserlohn.		
Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen	2,	636
Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Hundert Millionen natürlicher Zahlen vorkommen	3,	523
P. Meutzner in Meissen.		
Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentiales	8,	319
G. F. Meyer in München.		
Notiz über zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale	3,	157
Bemerkungen über den Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatz	6,	313
B. Minnigerode in Greifswald.		
Bemerkung über irrationale Zahlen	4,	497
R. Most in Stettin.		
Ueber die höheren Differentialquotienten	4,	499
H. Müller in Metz.		
Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung	1,	407
Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung	1,	627
Ueber eine geometrische Verwandschaft fünften Grades	2,	281

	Band	Seite
C. Neumann in Leipzig.		
Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers	1,	195
Zur Theorie der Functionaldeterminanten	1,	208
Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik	1,	317
Ueber die Aetherbewegung in Krystallen	1,	325
Notiz über das cykloidische Pendel	1,	507
Nachtrag zu dem Aufsatze „Ueber die Aetherbewegung in Krystallen"	2,	182
Ueber Producte und Quadrate der Bessel'schen Functionen (Notiz über die Resultate einer Abhandlung in den Berichten der Kgl. Sächsischen Ges. d. Wiss. 1869, S. 221)	2,	192
Zur Theorie des Potentiales	2,	514
Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentiales	3,	325
Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper	3,	350
Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentiales	3,	424
Ueber die Entwickelung einer Function nach Quadraten und Producten der Fourier-Bessel'schen Functionen	3,	581
Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale	3,	611
Ueber die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs	5,	602
Ueber die theoretische Behandlung der sogenannten constanten Magnete	6,	330
Ueber gewisse von Helmholtz für die Magnetoinduction und Voltainduction aufgestellte Formeln	6,	342
Notiz zu dem Aufsatz: Ueber die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs (Bd. 5, Seite 602)	6,	350
Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. (Auszug aus den Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1874, S. 79)	8,	555
Ueber den stationären elektrischen Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche	10,	569
M. Nöther in Erlangen.		
Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen	2,	293
Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen	3,	161
Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen	3,	547
Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen	5,	635
Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen	6,	351
Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie (Zus. mit Brill)	7,	269
Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. (Zweiter Aufsatz)	8,	495
Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve	9,	166
Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. (Zus. mit Gordan)	10,	547
M. Okatow in Petersburg.		
Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie bildet	2,	9

Preisaufgaben — Band Seite

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig
für das Jahr 1874 . . . . . 4, 138
für die Jahre 1876—1879 . . . . . 10, 417
der Beneke'schen Stiftung für das Jahr 1874, gestellt von der philosophischen Honorenfacultät der Universität Göttingen 5, 397

A. Pringsheim in Berlin.

Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 9, 445

R. Radau in Paris.

Ueber gewisse Differentialgleichungen der Dynamik 2, 167

M. Reiss †.

Analytisch-geometrische Studien 2, 385

Th. Reye in Strassburg.

Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung 1, 455
Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung 2, 475

J. Rosanes in Breslau.

Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage 2, 549
Ueber algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung 3, 535
Ueber Systeme von Kegelschnitten 6, 264

E. Schering in Göttingen.

Mittheilungen über den III. Band von Gauss' Werken 1, 139

L. Schläfli in Bern.

Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen 3, 134
Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe 3, 286
Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{0}{J}(\beta_1 x),\quad \overset{0}{J}(\beta_2 x),\quad \overset{0}{J}(\beta_3 x),\quad \cdots\cdots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{0}{J}(\beta) = 0$ vorstellen 10, 137

V. Schlegel in Waren.

Ueber die mechanische Erzeugung von Curven 6, 321

E. Schröder in Darmstadt.

Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen . . 2, 317
Ueber iterirte Functionen 3, 296
Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe . . 10, 289

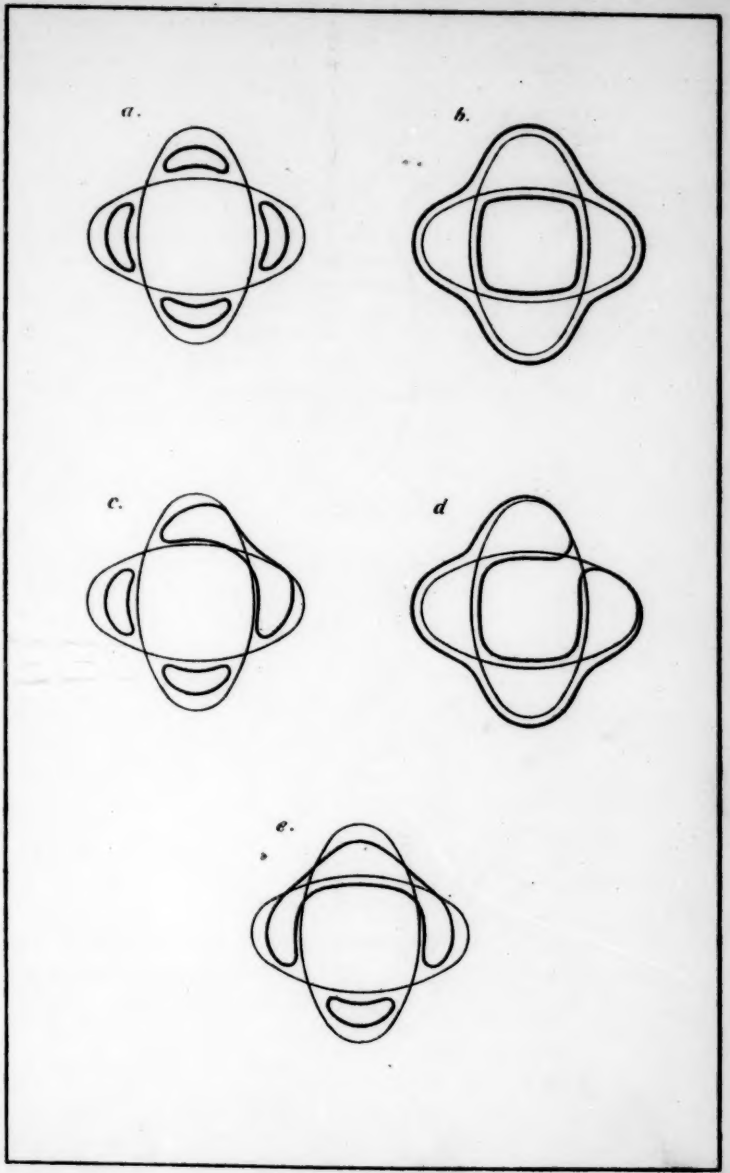
H. Schröter in Breslau.

Ueber perspectivisch liegende Dreiecke 2, 553
Ueber eine besondere Curve 3^{ter} Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3^{ter} Ordnung 5, 50
Ueber Curven dritter Ordnung (Fortsetzung des Aufsatzes Bd. 5, S. 50) 6, 85
Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks 7, 517
Zur Construction eines äquianharmonischen Systems 10, 420

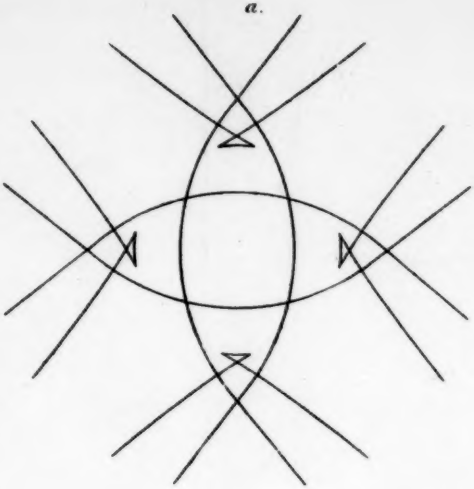
	Band	Seite
H. Schubert in Hamburg.		
Beiträge zur abzählenden Geometrie. Erste Abhandlung	10,	1
Moduln vielfacher Bedingung bei Flächen zweiter Ordnung	10,	318
A. Schumann in Berlin.		
Ein Beweis des Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale	7,	623
L. Sohncke in Carlsruhe.		
Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen	9,	504
J. Somoff in Petersburg.		
Ueber die annähernde Rectification beliebiger Curven	4,	505
S. Spitzer in Wien.		
Integration der linearen Differentialgleichung $y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy$, in welcher n eine ganze positive Zahl und A, B, C constante Zahlen bezeichnen, mittelst bestimmter Integrale	3,	453
H. Stahl in Aachen.		
Zur Theorie der Krümmungslinien und der dreifachen Orthogonalsysteme	3,	488
Stoll in Bensheim.		
Zum Problem des Apollonius	6,	613
O. Stolz in Innsbruck.		
Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie	4,	416
Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven	8,	415
R. Sturm in Darmstadt.		
Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades	1,	533
Ueber die Römische Fläche von Steiner	3,	76
Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung	4,	249
Ueber Fusspunkt-Curven und Flächen, Normalen und Normalebenen	6,	241
Das Problem der räumlichen Projectivität	6,	513
Ueber Normalen an algebraische Flächen	7,	567
Ueber die v. Staudt'schen Würfe (Mit einer Tafel)	9,	333
Zur Theorie der algebraischen Flächen	9,	573
Das Problem der Collineation	10,	117
M. L. Sylow in Frederikshald.		
Théorèmes sur les groupes de substitutions	5,	584
J. Thomae in Freiburg i. Br.		
Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe $1 + \frac{a_0a_1a_2}{1\cdot b_1b_2}x + \frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{1\cdot 2\cdot b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}x^2 + \text{etc}$	2,	427
Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel ganzer Periodicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Functionen	6,	693

	Band	Seite
K. Von der Mühll in Leipzig.		
Ueber den stationären Temperaturzustand	2,	643
Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze unkrystallinischer Medien	5,	471
A. Voss in Darmstadt.		
Zur Theorie der windschiefen Flächen	8,	54
Ueber Complexe und Congruenzen	9,	55
Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung	9,	241
Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche	9,	483
Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades	10,	143
H. Weber in Königsberg i. Pr.		
Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$	1,	1
Note über ein Problem der Abbildung	2,	140
Ueber eine Darstellung willkürlicher Functionen durch Bessel'sche Functionen	6,	146
Neuer Beweis des Abel'schen Theorems	8,	49
L. Weber in Rostock.		
Notiz über die Flächen constanten Potentiales	8,	45
L. Wedekind in Carlsruhe.		
Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen	9,	209
A. Weiler in Zürich.		
Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades	7,	145
Emil Weyr in Wien.		
Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involutionen	3,	34
Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen	3,	228
Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte	3,	235
Ueber rationale Curven vierter Ordnung	4,	243
Ph. Wiederhold in Worms.		
Ueber binäre Formen, welche Polaren einer Form sind	8,	444
Ch. Wiener in Carlsruhe.		
Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde auf einander	3,	11
Ueber eine Aufgabe aus der Geometria situs	6,	29
Mittheilung über eine Untersuchung von Hierholzer	6,	30
W. von Zahn in Leipzig.		
Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel	7,	583
H. G. Zeuthen in Kopenhagen.		
Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace	1,	432
Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes	3,	150
Addition au mémoire sur les séries de points correspondants sur deux courbes	3,	323
Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface	4,	1

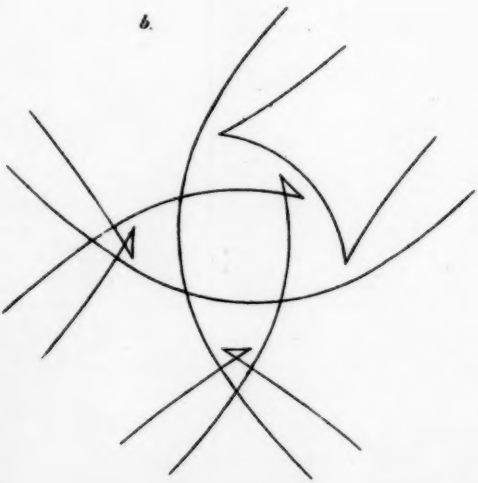
	Band	Seite
Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un	4,	21
Note sur la théorie de surfaces réciproques	4,	633
Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. (Mit zwei lithographirten Tafeln)	7,	410
Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques	8,	1
Sur une classe de points singuliers de surfaces	9,	321
Note sur les singularités des courbes planes	10,	210
Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques	10,	446
G. Zolotareff in Petersburg.		
Sur la méthode d'intégration de M. Tchébychef	5,	560
Sur les formes quadratiques positives quaternaires. (Zus. mit A. Korkine)	5,	581
Sur les formes quadratiques. (Zus. mit A Korkine)	6,	366
H. Züge in Hildesheim.		
Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids	10,	273

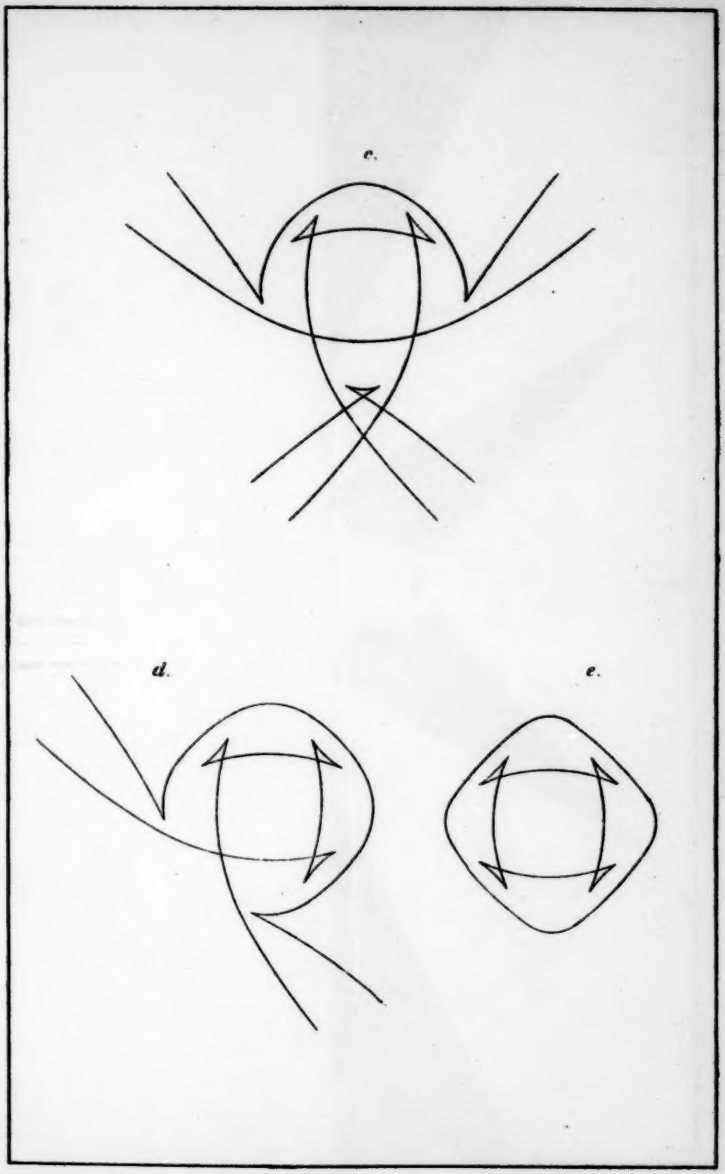

a.
b.
c.
d
e.

a.



b.




c.
d.
e.

